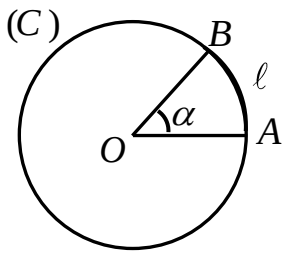
الحساب المثلثي (الجزء الأول)

I- وحدات قياس الزوايا :

نشاط :



لتكن (C) دائرة مركزها O وشعاعها $R=1$ و A و B نقطتين من (C) .

1) أحسب محيط هذه الدائرة .

2) ليكن α قياس الزاوية (AOB) بالدرجة و ℓ طول القوس AB المحصورة بهذه الزاوية ،

(أنظر الشكل) نضع $\beta=\dfrac{\ell}{R}$ ، العدد β يسمى قياس الزوية (AOB) بالراديان ،

بين أن : $\dfrac{\beta}{\pi}=\dfrac{\alpha}{180}$.

3) أملا الجدول التالي :

قياس (AOB) بالدرجة	0	30	45	60	90	120	180	360
قياس (AOB) بالراديان								

تعريف :

لتكن (C) دائرة مركزها O وشعاعها 1 و A و B نقطتين منها ، قياس الزاوية (AOB) بالراديان هو طول القوس AB المحصورة بهذه الزاوية .

ملاحظة :

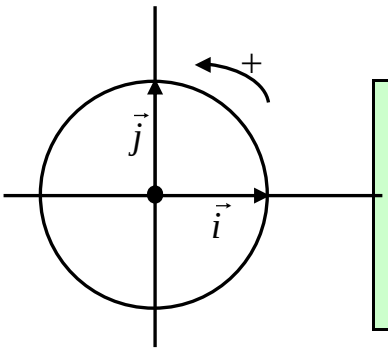
- قياس زاوية مستقيمة بالدرجة هو 180 وبالراديان هو π وقياسها بوحدة أخرى تسمى الغراد هو 200 .

- إذا كان α و β و γ قياسات الزاوية (AOB) على التوالي بالدرجة والراديان والغراد فإن $\dfrac{\alpha}{180}=\dfrac{\beta}{\pi}=\dfrac{\gamma}{200}$

II- الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية :

1) الدائرة المثلثية :

تعريف :



المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ،

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O أصل المعلم وشعاعها 1 واصلها النقطة $I(1;0)$

وموجهة توجيها موجبا (أو مباشرا)، والتوجيه الموجب هو منحى الدوران حول الدائرة انطلاقا من I وفي المنحى المعاكس لمنحى حركة عقارب الساعة .

نرمز لهذه الدائرة عادة بالرمز (U) .

2) الأفاصيل المنحنية :

أ) الأفصول المنحني الرئيسي :

تعريف :

لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I و α عددا من المجال $]-\pi;\pi]$ ،

- في الحالة $0\le\alpha\le\pi$ ، نعتبر النقطة M من (U) بحيث طول القوس IM هو α عند التنقل على (U) في المنحى الموجب .

- في الحالة $\pi<\alpha<0$ ، نعتبر النقطة M من (U) بحيث طول القوس IM هو $-\alpha$ عند التنقل على (U) في المنحى السالب (عكس المنحى الموجب) .

- في الحالتين معا α يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M على (U) ونكتب $M(\alpha)$.

ب) الأفاصيل المنحنية :

تعريف :

لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I و M نقطة من الدائرة (U) أفصولها المنحني الرئيسي α .

كل عدد حقيقي $x=\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M على (U) ونكتب $M(x)$.

مثال :

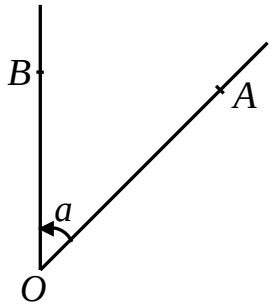
مثل على الدائرة المثلثية النقط التالية :

$A\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ ، $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $D\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ و $E\left(\frac{25\pi}{4}\right)$

III– الزوايا الموجهة وقياساتها :

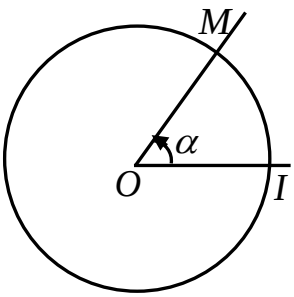
1) الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل وقياساتها :

تعريف 1 :



لتكن A و B و O ثلاث نقط بحيث $A \neq O$ و $B \neq O$ ، نصفي المستقيم $[OA)$ و $[OB)$ في هذا الترتيب يحددان زاوية موجهة نرمز لها بالرمز $(OA;OB)$ ، ونرمز لقياسها بالرمز : $(\overline{OA;OB})$

تعريف 2 :



(U) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I و M نقطة منها أفصولها المنحني الرئيسي α

- العدد الحقيقي α يسمى القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(OI;OM)$.

- العدد الحقيقي $\alpha + k2\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(OI;OM)$ ، ونكتب : $(\overline{OI;OM}) = \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ أو $(\overline{OI;OM}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ ونقرأ قياس الزاوية $(OI;OM)$ يوافق α بترديد 2π .

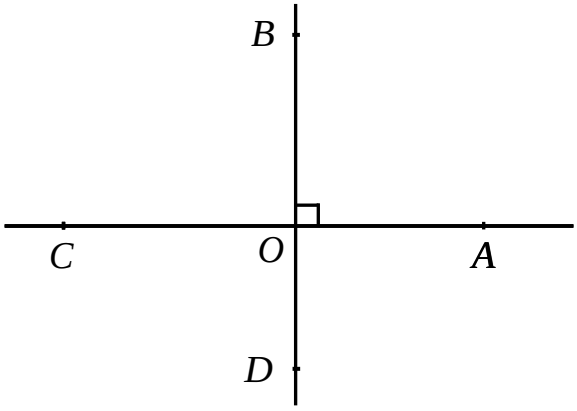
خاصيات :

لتكن $[OA)$ و $[OB)$ و $[OC)$ ثلاثة أنصاف مستقيمات لها نفس الأصل O ، لدينا :

$(\overline{OA;OA}) = 2k\pi$ ، $(\overline{OA;OB}) = -(\overline{OB;OA}) + 2k\pi$

$(\overline{OA;OC}) = (\overline{OA;OB}) + (\overline{OB;OC}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ هذه العلاقة تسمى علاقة شال .

أمثلة :



نعتبر الشكل التالي ، لدينا :

$(\overline{OA;OB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $(\overline{OB;OC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(\overline{OA;OD}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ ، $(\overline{OC;OB}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$

$(\overline{OA;OC}) = \pi + 2k\pi$ ، $(\overline{OA;OC}) = -\pi + 2k\pi$

$(\overline{OA;OD}) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ، $(\overline{OB;OD}) = \pi + 2k\pi$

حيث $(k \in \mathbb{Z})$

2) الزاوية الموجهة لمتجهتين وقياساتها :

تعريف :

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و O نقطة من المستوى ،

لتكن A و B نقطتين من المستوى بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

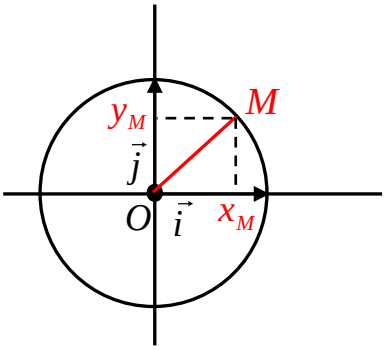
الزاوية الموجهة المحددة بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب هي الزاوية $(OA;OB)$ ونرمز لها بـ : $(\vec{u};\vec{v})$.

قياسات $(\vec{u};\vec{v})$ هي قياسات $(OA;OB)$ ونكتب : $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = (\overline{OA;OB}) + 2k\pi$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$

IV- النسب المثلثية لعدد حقيقي :

1) جيب وجيب تمام عدد حقيقي :

تعريف :



لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I و $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ نقطة من (U) ،
ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة من (U) بحيث أحد أفاصيلها المنحنية هو x .
ليكن $(x_M ; y_M)$ زوج إحداثيتي M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ ،
- العدد x_M يسمى جيب تمام العدد x ونكتب $\cos x = x_M$.
- العدد y_M يسمى جيب العدد x ونكتب $\sin x = y_M$.

خاصيات :

لدينا لكل عدد حقيقي x : $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$ و $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

أمثلة :

جدول بعض القيم الإعتيادية :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2) علاقات مثلثية :

خاصيات :

لدينا لكل عدد حقيقي x و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا العلاقات المثلثية التالية :

علاقات sin :

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$

علاقات cos :

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ و $\cos(-x) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ و $\cos(\pi + x) = -\cos x$

علاقات بين sin و cos :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

تمرين تطبيقي :

أحسب جيب وجيب تمام الأعداد التالية :

$\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{-5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$.