المعادلات والمتراجحات والنظمات

I- المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى :

1) معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف :

كل متساوية على شكل $ax+b=0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .
قيم الأعداد x التي تحقق $ax+b=0$ تسمى حلول أو جذور هذه المعادلة ، ومجموعة هذه القيم تسمى مجموعة الحلول ، ونرمز لها عادة بالرمز S .

مثال :

حل المعادلتين $2x-3=0$ و $3x+4=0$.

خاصية :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax+b=0$ ولتكن S مجموعة حلولها ،
- إذا كان $a\neq 0$ فإن $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$
- إذا كان $a=0$ فإنه : إذا كان $b=0$ فإن $S=\mathbb{R}$ وإذا كان $b\neq 0$ فإن $S=\phi$.

مثال : حل المعادلات :

$2x-1=2(x+1)$ و $3(x-1)+7=3x+4$ و $(3x+1)(6x-5)-(3x-2)(3x+1)=0$

2) متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف :

كل متفاوتة على شكل $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b>0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .
قيم الأعداد x التي تحقق هذه المتفاوتة تسمى حلولا لهذه المتراجحة ، ومجموعة هذه القيم تسمى مجموعة الحلول ، ونرمز لها عادة بالرمز S .

مثال :

حل المتراجحات $2x-4\leq 0$ و $2x-4>0$ و $-2x-6<0$.

خاصيات :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax+b\leq 0$ ،	نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax+b\geq 0$ ،
إذا كان $a>0$ فإن **مجموعة الحلول:** $S=\left]-\infty;\frac{-b}{a}\right]$	**إذا كان** $a>0$ فإن **مجموعة الحلول:** $S=\left[\frac{-b}{a};+\infty\right[$
إذا كان $a<0$ فإن **مجموعة الحلول:** $S=\left[\frac{-b}{a};+\infty\right[$	**إذا كان** $a<0$ فإن **مجموعة الحلول:** $S=\left]-\infty;\frac{-b}{a}\right]$

أمثلة :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $2x-1<4x+3$ ، $2+\frac{1}{2}x>\frac{x+2}{2}$ و $2x+4\geq 2(x+4)$

3) إشارة الحدانية $ax+b$:

خاصية :

نعتبر الحدانية $ax+b$ حيث $a\neq 0$ ،
إذا كان $x\geq\frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي إشارة a .
إذا كان $x\leq\frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي عكس إشارة a.

ونلخص النتائج في جدول الإشارات التالي :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

أمثلة :

حدد جدولي إشارات الحدانيتين : $\frac{1}{2}x-6$ و $-4x+5$ ثم حل المتراجحات : $\frac{1}{2}x-6\geq 0$ و $-4x+5<0$

تمرين تطبيقي :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $(x-1)(2x+4)\leq 0$

II- المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

1) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

تعريف :

كل متساوية على شكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد .

العدد الحقيقي $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ أو مميز ثلاثية الحدود ax^2+bx+c

نشاط :

1) حل المعادلة $x^2=\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

نعتبر المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و Δ مميزها.

2) بين أن : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ثم حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

خاصيات :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ بحيث $a\neq 0$ و Δ مميزها ، لدينا :

- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد هو $\frac{-b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

أمثلة :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$x^2-5x+6=0$ ، $x^2-2x+7=0$ و $x^2+6x+9=0$

2) تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية :

خاصية :

نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c بحيث $a\neq 0$ ، و Δ مميزها ، لدينا :

- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

ولدينا : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد x_0 إذن : ولدينا : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ ولا يمكن تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c إلى جداء حدانيتين.

أمثلة :

عمل ثلاثيات الحدود التالية إذا أمكن :

$P(x)=x^2-x-12$ ، $Q(x)=2x^2-8x+8$ و $R(x)=x^2+2x+5$

3) مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية :

خاصية :

إذا كان مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ موجبا قطعا فإنها تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 يحققان :

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

أمثلة :

أ) تحقق أن المعادلة $-2x^2+x+6=0$ تقبل حلين مختلفين .

ب) حدد مجموع وجداء هاذين الحلين دون حسابهما .

4) تحديد عددين مجموعهما وجداؤهما معلومان :

خاصية :

ليكن p و s عددين حقيقيين ،

- النظمة $\begin{cases} u+v=s \\ u\cdot v=p \end{cases}$ تقبل حلا إذا وفقط إذا كان $s^2-4p\geq 0$

- العددان u و v هما حلا المعادلة $x^2-sx+p=0$

أمثلة :

1) هل يمكن إيجاد عددين حقيقيين مجموعهما 2 وجداؤهما 5 ؟

2) حدد عددين مجموعهما 1 وجداؤهما 6– .

5) إشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية :

خاصية :

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ و Δ مميزها ،

إذا كان $\Delta>0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة a خارج الجذرين وعكس إشارة a داخل الجذرين وتنعدم عند الجذرين.

إذا كان $\Delta=0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة a على $\mathbb{R}$ وتنعدم عند الجذر.

إذا كان $\Delta<0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة a على $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على $\mathbb{R}$.

أمثلة :

أدرس إشارات ثلاثيات الحدود التالية :

$P(x)=-2x^2+5x-3$ ، $Q(x)=2x^2-8x+8$ و $R(x)=x^2-2x+7$

6) المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

تعريف :

كل متفاوتة على شكل $ax^2+bx+c\leq 0$ أو $ax^2+bx+c\geq 0$ أو $ax^2+bx+c<0$ أو $ax^2+bx+c>0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى متراجحة من الدرجة الثانية بمجهول واحد .

طريقة الحل :

لحل هذه المتراجحة نتبع المراحل التالية :

- نحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

- نستنتج جدول إشارات ثلاثية الحدود ax^2+bx+c .

- نستخرج حلول المتراجحة مباشرة من الجدول .

أمثلة :

حل المتراجحات التالية :

1) $2x^2-5x+3\leq 0$ 2) $2x^2-5x+3>0$

3) $x^2-6x+9<0$ 4) $x^2-6x+9\geq 0$

5) $x^2-6x+9\leq 0$ 6) $x^2-6x+9>0$

7) $x^2-3x+9\leq 0$ 8) $x^2-3x+9>0$

III– نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

1) معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين :

تعريف :

كل متساوية على شكل $ax+by+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و x و y عددين مجهولين تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين .

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ المعادلة $ax+by+c=0$ يعني حدد الأزواج $(x;y)$ التي تحقق هذه المعادلة .

مثال :

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ المعادلة $2x-3y+1=0$.

2) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

تعريف :

النظمة $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a و b و c و a' و b' و c' من $\mathbb{R}$ و x و y عددين مجهولين

تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

محددة النظمة (S) هي العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز D والمعرف بـ : $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

المحددة المرتبطة بـ x هي العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز D_x والمعرف بـ : $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$

المحددة المرتبطة بـ y هي العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز D_y والمعرف بـ : $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$

أمثلة :

حل النظمة التالية $(S):\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ بطريقة التعويض ثم بطريقة التأليفة الخطية .

3) طريقة المحددات (طريقة كرامر) :

خاصيات :

نعتبر النظمة $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ و D محددتها ،

1) إذا كان $D\neq 0$ فإن : النظمة (S) تقبل حلا وحيدا هو الزوج $\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)$.

2) إذا كان $D=0$ هناك حالتان :

- إذا كان $D_x=0$ و $D_y=0$ فإن النظمة (S) تقبل ما لا نهاية له من الحلول و $(S)\Leftrightarrow ax+by=c$
- إذا كان $D_x\neq 0$ أو $D_y\neq 0$ فإن النظمة (S) ليس لها حل .

أمثلة :

حل النظمات التالية بطريقة المحددات :

1) $(S_1):\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 2) $(S_2):\begin{cases} 2x-3y=15 \\ -4x+6y=7 \end{cases}$ 3) $(S_3):\begin{cases} 2x-4y=6 \\ -x+2y=-3 \end{cases}$