الحدوديات

1) الحدوديات :

تعاريف :

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و a_0 و a_1 و .... و a_n أعداد حقيقية .
- نعتبر التعبير التالي : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_2x^2+a_1x+a_0$
تسمى حدودية $P(x)$ أو P .
- إذا كان $a_n \neq 0$ فإن n يسمى درجة الحدودية P ، ونكتب $d^oP=n$.
- العدد a_i حيث $0 \leq i \leq n$ يسمى معامل الحد من الدرجة i .
- تكون حدودية منعدمة إذا وفقط إذا كانت جميع معاملات حدودها منعدمة .
- تكون حدوديتان متساويتان إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة للحدوديتين متساوية .
- الحدودية المنعدمة ليس لها درجة .

أمثلة :

1) $p(x)=4x^3-2x^2+x+7$ حدودية من الدرجة الثالثة .
$p(x)=-2x^5-2x^2+1$ حدودية من الدرجة الخامسة .
$p(x)=6$ حدودية من الدرجة صفر .
$p(x)=0$ حدودية ليس لها درجة لأنها منعدمة .

2) نضع $P(x)=-4x^2+8x+3$ و $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ،
$P(x)=Q(x)$ يعني $a=0$ و $b=-4$ و $c=8$ و $d=3$

حالات خاصة :

- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية وتكتب على شكل $ax+b$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$.
- كل حدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود وتكتب على شكل ax^2+bx+c حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b;c \in \mathbb{R}$.

2) العمليات على الحدوديات :

نشاط :

1) أحسب d^oP و d^oQ و $d^o(P+Q)$ في كل حالة من الحالات التالية :
أ) $P(x)=-2x^5-2x^2+1$ و $Q(x)=2x^3-5x^2+1$
ب) $P(x)=3x^4-2x^2+1$ و $Q(x)=-3x^4+x^2-2$
2) قارن $d^o(PQ)$ مع d^oP+d^oQ حيث : $P(x)=x^2+1$ و $Q(x)=2x^3-x$

تعريف وخاصية :

لتكن P و Q حدوديتين غير منعدمتين ،
- مجموع الحدوديتين P و Q هو حدودية نرمز لها بالرمز $P+Q$ ولدينا : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$
إذا كانت $P+Q$ حدودية غير منعدمة فإن: $d^o(P+Q) \leq d^o(P)$ أو $d^o(P+Q) \leq d^o(Q)$
- فرق الحدوديتين P و Q هو حدودية نرمز لها بالرمز $P-Q$ ولدينا : $(P-Q)(x)=P(x)-Q(x)$
إذا كانت $P-Q$ حدودية غير منعدمة فإن : $d^o(P+Q) \leq d^o(P)$ أو $d^o(P+Q) \leq d^o(Q)$
- جداء الحدوديتين P و Q هو حدودية نرمز لها بالرمز $P \cdot Q$ ولدينا : $(P \cdot Q)(x)=P(x) \cdot Q(x)$
لدينا $P.Q$ حدودية غير منعدمة و : $d^o(P \cdot Q)=d^o(P)+d^o(Q)$

3) القسمة على $(x-\alpha)$:

خاصيات :

لتكن P حدودية درجتها n غير منعدمة و $\alpha \in \mathbb{R}$ ،
توجد حدودية وحيدة Q بحيث : $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$ و $d^oQ=n-1$
Q تسمى خارج القسمة الأقليدية للحدودية P على $(x-\alpha)$ و $P(\alpha)$ الباقي .

أمثلة :

نعتبر الحدودية : $P(x)=2x^3-4x^2+x+3$.

لنحدد الحدودية Q بحيث $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-4x^2+x+3 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3+2x^2} & 2x^2-2x-1 \\
0-2x^2+x & \\
\underline{2x^2-2x} & \\
0\quad \underline{-x+3} & \\
0+2 &
\end{array}$$

إذن : $P(x)=(x-1)(2x^2-2x-1)+2$ أي $Q(x)=2x^2-2x-1$ و $P(1)=2$

- طريقة أخرى : نضع $Q(x)=ax^2-bx-c$ ثم نحسب $(x-1)Q(x)+P(1)$

وبعد ذلك نستنتج معاملات حدود $Q(x)$ من خلال تساوي الحدوديتين $P(x)$ و $(x-1)Q(x)+P(1)$.

4) جذر حدودية :

تعريف :

لتكن P حدودية و $\alpha\in\mathbb{R}$ ،
نقول أن α **جذر** للحدودية P إذا كان : $P(\alpha)=0$

أمثلة :

1) نعتبر الحدودية P المعرفة كما يلي: $P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

حدد من بين الأعداد التالية : -1 و $\frac{1}{2}$ و 2 و 3 ، تلك التي تمثل جذرا لـ P.

2) حدد قيم m التي من أجلها يكون 2 جذر للحدودية P المعرفة كما يلي $P(x)=(m-2)x^2-\frac{m}{2}x-1$

خاصية :

لتكن P حدودية درجتها n غير منعدمة و $\alpha\in\mathbb{R}$ ،
يكون α جذرا للحدودية P إذا وفقط إذا وُجدت حدودية Q درجتها $n-1$ بحيث : $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
ونقول إن الحدودية P **قابلة للقسمة** على $(x-\alpha)$.

أمثلة :

أ) بين أن الحدودية P المعرفة كما يلي $P(x)=x^3-2x^2-3x+6$ قابلة للقسمة على $(x-2)$
ثم حدد الحدودية Q بحيث $P(x)=(x-2)Q(x)$.

ب) حدد قيم m التي من أجلها تكون الحدودية P المعرفة بـ $P(x)=(m+1)x^2+3x+3m$
قابلة للقسمة على $(x+1)$

تمرين 1 :

نعتبر الحدودية $P(x)=x^3-7x+6$ ،

1) بين أن 1 و -3 جذرين للحدودية P.

2) عمل $P(x)$ إلى جداء ثلاث حدانيات .

تمرين 2 :

أوجد حدودية P درجتها 3 بحيث يكون 1 و 2 و 3 جذورا لها وتحقق $P(4)=12$.