Soit le polynome $P(x) = x^3 - (3\sqrt{3}+1)x^2 + m(2+\sqrt{3})x - 6$

1. Determiner la valeur de m tel que $P(x)$ est divisible par $x-1$, càd $P(1) = 0$

$$\begin{gathered}
1^3 - (3\sqrt{3}+1) \times 1^2 + m(2+\sqrt{3}) \times 1 - 6 = 0 \\
1 - (3\sqrt{3}+1) + m(2+\sqrt{3}) - 6 = 0 \\
(2+\sqrt{3})m = 6 + 3\sqrt{3} \\
m = \tfrac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\
m = 3
\end{gathered}$$

On pose $m = 3$ alors $P(x) = x^3 - (3\sqrt{3}+1)x^2 + (6+3\sqrt{3})x - 6$

2.1 Pour Determiner $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$, On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - (3\sqrt{3}+1)x^2 + (6+3\sqrt{3})x - 6 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 \\ \cline{1-1}
-3\sqrt{3}x^2 + (6+3\sqrt{3})x \qquad & \\
-3\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
6x - 6 & \\
6x - 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Donc $Q(x) = x^2 - 3\sqrt{3}x + 6$

3. Pour vérifier si $\sqrt{3}$ est une racine du polynôme $Q(x)$, nous devons substituer $x = \sqrt{3}$ dans $Q(x)$ et voir si le résultat est égal à zéro.

$$\begin{aligned}
Q(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 6 \\
&= 3 - 3 \times 3 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme le résultat est 0, cela signifie que $\sqrt{3}$ est une racine du polynôme $Q(x)$.

4. • Diviser $Q(x)$ par $x - \sqrt{3}$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 & x - \sqrt{3} \\ \cline{2-2}
x^2 - \sqrt{3}x \qquad & x - 2\sqrt{3} \\ \cline{1-1}
-2\sqrt{3}x + 6 & \\
-2\sqrt{3}x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

5. Factoriser $P(x)$: $P(x) = (x-1)(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$