Exercice - représentation paramétrique d'une droite

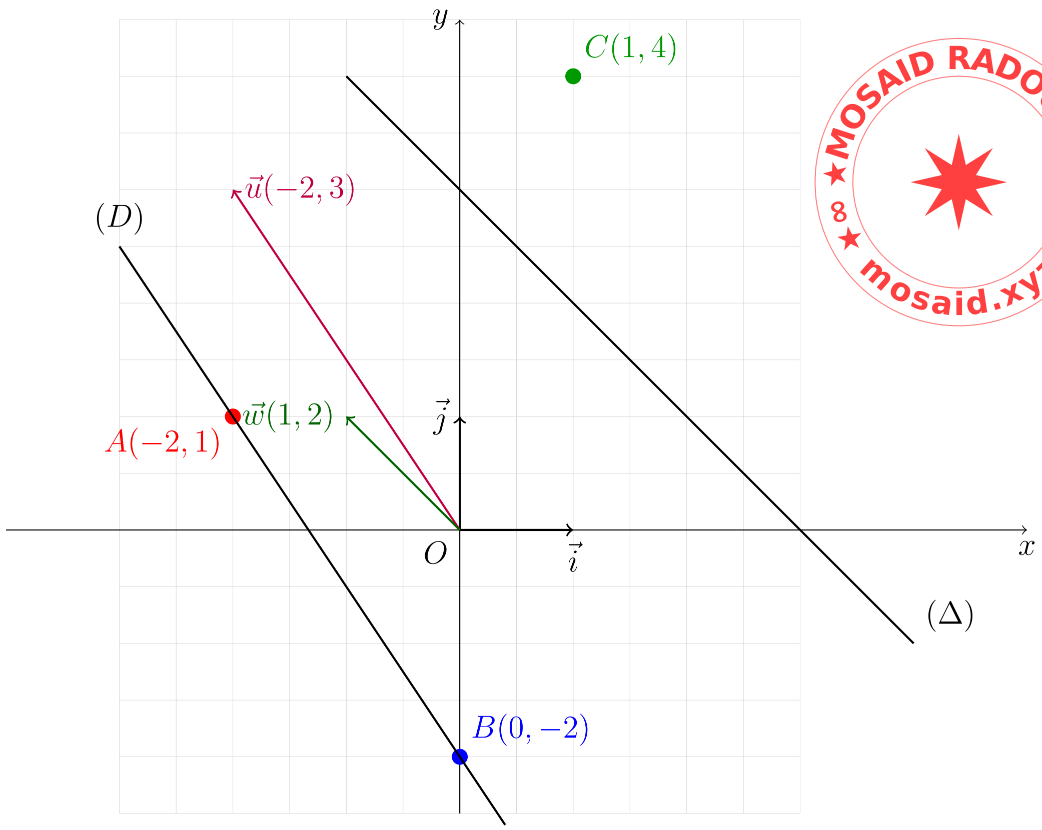
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
on considère les points $A(-2;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;4)$, et les vecteurs $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(4;-6)$.
Soit $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$ une représentation paramétrique d'une droite (Δ)

1. Construire la droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et la droite (Δ)
2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D).
   (b) Donner 3 points appartenant à la droite (D).
   (c) Les points B et C appartiennent-ils à la droite (D) ?
3. (a) Vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   (b) Donner une représentation paramétrique pour $D(C;\vec{v})$. Qu'observez-vous ?
4. Déterminer une équation paramétrique pour la droite (AC).

Solution

Solution is in the next page, don't cheat, make a little effort with the exercise first

1 − La figure



2.a − La représentation paramétrique d'une droite (D) passant par un point $A(x_0, y_0)$ et dirigée par un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ est donnée par : $\quad (D) : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Substituons les coordonnées de $A(-2,1)$ et de $\vec{u}(-2,3)$: $\quad (D) : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

2.b − Donner 3 points appartenant à (D) : En choisissant $t = -1$, $t = 1$, et $t = 0.5$, on calcule les points correspondants sur (D) :

- Pour $t = -1$: $x = -2 - 2(-1) = 0, \quad y = 1 + 3(-1) = -2.$ Donc $A_1(0,-2) \in (D)$.
- Pour $t = 1$: $x = -2 - 2(1) = -4, \quad y = 1 + 3(1) = 4.$ Donc $A_2(-4,4) \in (D)$.
- Pour $t = 0.5$: $x = -2 - 2(0.5) = -3, \quad y = 1 + 3(0.5) = 2.5.$ Donc $A_3(-3,2.5) \in (D)$.

2.c − Vérifier si $B(0,-2)$ et $C(1,4)$ appartiennent à (D) :

•Vérifions $B(0,-2)$: Remplaçons $x = 0$ et $y = -2$ dans l'équation paramétrique de (D) :

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 0 = -2 - 2t \\ -2 = 1 + 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2 = -2t \\ -2 - 1 = 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \quad \text{Alors } B \in (D).$$

•Vérifions $C(1,4)$: Remplaçons $x = 1$ et $y = 4$ dans l'équation paramétrique de (D) :

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 1 = -2 - t \\ 4 = 1 + 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 1 + 2 = -t \\ 4 - 1 = 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{Alors } C \notin (D)$$

3.a – Vérifier si $\vec{u}(-2,3)$ et $\vec{v}(4,-6)$ sont colinéaires :

Calculons : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (-2)(-6) - (3)(4) = 12 - 12 = 0$

Comme le déterminant est nul, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3.b – Donner une représentation paramétrique pour $D(C;\vec{v})$:

La droite $D(C;\vec{v})$ passe par $C(1,4)$ et est dirigée par $\vec{v}(4,-6)$. Sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 4 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque: la droite $D(C;\vec{v})$ est aussi $D(C;\vec{u})$. une droie peut avoir une infinité de représentations paramétriques

4 – Déterminer une équation paramétrique pour la droite (AC):

La droite (AC) passe par $A(-2,1)$ et $C(1,4)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = (1 - (-2), 4 - 1) = (3,3)$.

La représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

MOSAID le 28/11/2024

www.mosaid.xyz