الترتيب في $\mathbb{R}$

I- الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$:

نشاط :

قارن العددين : $\frac{6}{7}$ و $\frac{7}{8}$.

تعريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين ،
- نقول إن a أصغر من أو يساوي b ونكتب $a \leq b$ إذا كان : $0 \leq b-a$
- نقول إن a أصغر قطعا من b ونكتب $a < b$ إذا كان : $0 < b-a$

II- الترتيب والعمليات :

1) الترتيب والجمع :

نشاط :

- لتكن a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $a \leq b$ ، قارن $a+c$ مع $b+c$.
- لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث : $a \leq b$ و $c \leq d$ ، قارن $a+c$ مع $b+d$.

خاصيات :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ،
- لدينا : $a \leq b$ **يعني** $a+c \leq b+c$.
- إذا كان ($a \leq b$ و $c \leq d$) فإن $a+c \leq b+d$.

مثال :

قارن $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ مع $\sqrt{5}+1,5$ ثم $3,14+\frac{2}{7}$ مع $\frac{3}{7}+\pi$.

ملاحظات :

- $a < b$ يعني أن ($a \leq b$ و $a \neq b$).
- إذا كان $a < b$ فإن $a \leq b$. (بصفة عامة العكس غير صحيح)
- إذا كان ($a \leq b$ و $b \leq c$) فإن $a \leq c$.

2) الترتيب والضرب :

نشاط 1 :

لتكن a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $a \leq b$ ، قارن ac مع bc في كل حالة من الحالتين :
- الحالة 1 : $c > 0$.
- الحالة 2 : $c < 0$.

خاصية 1 :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ،
- إذا كان $c > 0$ فإن $a \leq b$ **يعني** $ac \leq bc$.
- إذا كان $c < 0$ فإن $a \leq b$ **يعني** $ac \geq bc$.

نتيجة 1 :

إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن : $a \leq b$ **يعني** $-a \geq -b$.

نشاط 2 :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية .
1) بسط الكتابة التالية : $a(d-c)+d(b-a)$
2) نفترض أن : $a \leq b$ و $c \leq d$ ، قارن ac مع bd في كل حالة من الحالتين :
- الحالة 1 : الأعداد a و b و c و d موجبة .
- الحالة 2 : الأعداد a و b و c و d سالبة .

خاصية 2 :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ، بحيث : $a \leq b$ و $c \leq d$ ،
- إذا كانت الأعداد a و b و c و d موجبة فإن : $ac \leq bd$.
- إذا كانت الأعداد a و b و c و d سالبة فإن : $bd \leq ac$.

نتيجة 2 :

ليكن a و b عددين حقيقيين ، بحيث : $a \leq b$.
- إذا كان a و b موجبين فإن $a^2 \leq b^2$.
- إذا كان a و b سالبين فإن $b^2 \leq a^2$.

تمرين تطبيقي :

ليكن x عدد حقيقي ،

1) نفترض أن $x \geq -4$ ، بين أن $2(-2x+5) \leq 26$

2) نفترض أن $x < -2$ ، بين أن $x^2 - 1 > 3$

ملاحظات :

☜ $ab \geq 0$ **يكافئ** a و b لهما نفس الإشارة .

☜ $ab \leq 0$ **يكافئ** a و b ليس لهما نفس الإشارة (أحدهما موجب والآخر سالب).

3) الترتيب والمقلوب :

نشاط :

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين ولهما نفس الإشارة ،

نفترض أن $a \leq b$ ، قارن $\frac{1}{a}$ مع $\frac{1}{b}$.

خاصية :

إذا كان a و b عددين حقيقيين لهما نفس الإشارة وغير منعدمين ،

فإن : $a \leq b$ **يعني** $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

ملاحظات :

☑ إذا كان a عدد سالب قطعا و b موجب قطعا فإن $a \leq b$ و $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ (مثال $-2 \leq 4$ و $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{4}$)

☑ إذا كانت a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd > 0$ فإن : ($\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ **يعني** $ad \leq bc$)

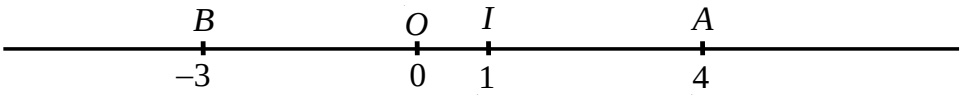
⊘ إذا كانت a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $a \leq b$ و $c \leq d$ ،

فإن هذا لا يعني بالضرورة أن : $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$.

4) القيمة المطلقة :

نشاط :

نعتبر المحور الممنظم $D(O;I)$ الممثل أسفله والنقطتين A و B . (ممنظم : $OI = 1cm$)



1) أ) حدد أفصول النقطة A ثم أحسب المسافة OA .

ب) حدد أفصول النقطة B ثم أحسب المسافة OB .

2) لتكن M نقطة من المستقيم (D) أفصولها x ، حدد بدلالة x المسافة OM .

تعريف :

ليكن x عدد حقيقي ، ولتكن M نقطة من المحور الممنظم $D(O;I)$ بحيث أفصولها هو x ،

نسمي القيمة المطلقة للعدد x المسافة OM ، ونرمز لها بالرمز $|x|$ ،

أي : $|x| = x$ إذا كان x موجبا و $|x| = -x$ إذا كان x سالبا .

أمثلة :

أحسب القيمة المطلقة لكل عدد من الأعداد للأعداد التالية :

5 ، -7 ، $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

خاصيات :

ليكن x و y عددين حقيقيين و n عدد صحيح طبيعي، لدينا :

$|x|\geq 0$ ، $|-x|=|x|$ ، $|y-x|=|x-y|$ ، $|xy|=|x||y|$ ، $\sqrt{x^2}=|x|$ و $|x^n|=|x|^n$

وإذا كان $y\neq 0$ فإن : $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ و $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$

ملاحظات :

☜ $|x|=|y|$ يعني أن ($x=y$ أو $x=-y$)

☜ إذا كان x و y غير منعدمين فإن : $|x+y|<|x|+|y|$ و $|x|-|y|<|x-y|$

أمثلة :

لدينا : $|x|=8$ يعني أن ($x=8$ أو $x=-8$)

$|x|=-2$ مستحيل (لأن $|x|\geq 0$)

$|x|=0$ يعني أن $x=0$.

5) المسافة بين عددين حقيقيين :

تعريف :

ليكن x و y عددين حقيقيين ،نسمي المسافة بين العددين x و y العدد الحقيقي $|x-y|$.

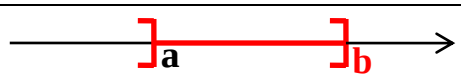
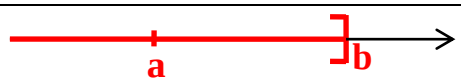
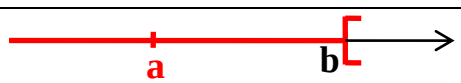
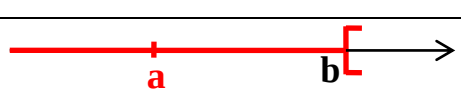
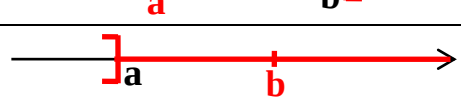
أمثلة :

أحسب المسافة بين العددين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

$a=3$ و $b=7$ ، $a=-4$ و $b=2$ ثم $a=-1$ و $b=-6$

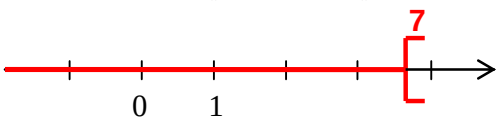
6) المجالات في $\mathbb{R}$:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a<b$ ،

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق	نرمز لها بالمجال	تمثيل المجال على مستقيم عددي
$a\leq x\leq b$	$[a;b]$	
$a<x<b$	$]a;b[$	
$a\leq x<b$	$[a;b[$	
$a<x\leq b$	$]a;b]$	
$x\leq b$	$]-\infty;b]$	
$x<b$	$]-\infty;b[$	
$x\geq a$	$[a;+\infty[$	
$x>a$	$]a;+\infty[$	

تمرين تطبيقي :

1) أكتب المجال الممثل في الشكل التالي :



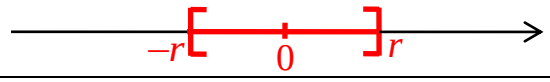
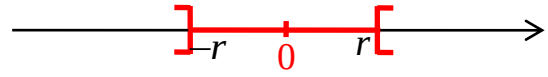
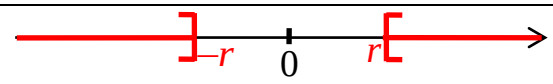
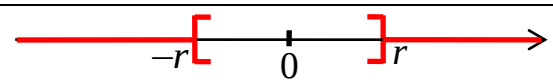
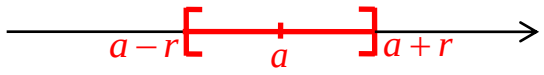
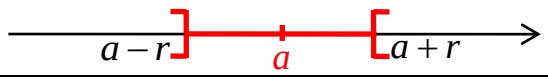
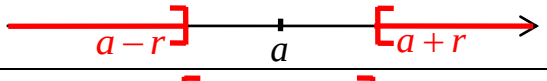
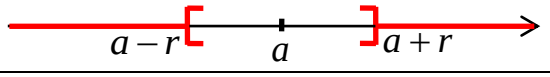
2) مثل على محور ممنظم المجالين : $]-1;3[$ و $]-\infty;2[$ ثم حدد تقاطعهما واتحادهما .

ملاحظات :

$[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$ و $]-\infty;0]=\mathbb{R}^-$ و $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

7) المجالات والقيمة المطلقة :

ليكن x و a عددين حقيقيين ، و r عدد حقيقي موجب قطعا ، لدينا :

الكتابة باستعمال القيمة المطلقة	الكتابة باستعمال المجالات	تمثيله على مستقيم عددي
$\lvert x\rvert\le r$	$x\in[-r;r]$	
$\lvert x\rvert<r$	$x\in]-r;r[$	
$\lvert x\rvert\ge r$	$x\in]-\infty;-r]\cup[r;+\infty[$	
$\lvert x\rvert>r$	$x\in]-\infty;-r[\cup]r;+\infty[$	
$\lvert x-a\rvert\le r$	$x\in[a-r;a+r]$	
$\lvert x-a\rvert<r$	$x\in]a-r;a+r[$	
$\lvert x-a\rvert\ge r$	$x\in]-\infty;a-r]\cup[a+r;+\infty[$	
$\lvert x-a\rvert>r$	$x\in]-\infty;a-r[\cup]a+r;+\infty[$	

أمثلة :

$\lvert x\rvert\le 2$ يعني أن : $x\in[-2;2]$

$\lvert x\rvert>1$ يعني أن : $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$\lvert x\rvert\le -2$ مستحيل ، لا يوجد x من $\mathbb{R}$ يحقق $\lvert x\rvert\le -2$ (لأن $\lvert x\rvert\ge 0$)

$\lvert x\rvert\le 0$ يعني أن : $\lvert x\rvert=0$ (لأن $\lvert x\rvert\ge 0$) يعني أن : $x=0$

III– التأطير :

1) تعريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$ ،
كل كتابة من الكتابات التالية : $a\le x\le b$ ، $a\le x<b$ ، $a<x\le b$ و $a<x<b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $I=b-a$

أمثلة :

$1,41\le\sqrt{2}\le 1,42$ تأطير للعدد $\sqrt{2}$ سعته $0,01$

$3,1415<\pi<3,1416$ تأطير للعدد π سعته 10^{-4}

2) التأطير والعمليات :

أ) تأطير مجموع عددين :

خاصيات :

إذا كان $a\le x\le b$ و $c\le y\le d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي سعتيهما I_1 و I_2 فإن :
$a+c\le x+y\le b+d$ تأطير للعدد $x+y$ سعته I_1+I_2 .

ملاحظات هامة (تأطير فرق عددين):

- لتأطير الفرق $x-y$ نؤطر أولا العدد $-y$ ثم نؤطر المجموع $x+(-y)$ ،

تطبيق :

إذا علمت أن : $1,4\le\sqrt{2}\le 1,5$ و $1,7\le\sqrt{3}\le 1,8$ ،
أطر الأعداد التالية : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ، $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

ب) تأطير جداء عددين :

خاصية :

إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي ، فإن :
إذا كانت الأعداد a و b و c و d موجبة فإن $ac \leq xy \leq bd$ تأطير للعدد xy
إذا كانت الأعداد a و b و c و d سالبة فإن $bd \leq xy \leq ac$ تأطير للعدد xy

مثال :

إذا علمت أن : $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$ و $1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$ ، حدد تأطيرا للعدد $\sqrt{6}$.

نتائج :

إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطير للعدد x فإنه :
إذا كان العددين a و b موجبين فإن $a^2 \leq x^2 \leq b^2$ تأطير للعدد x^2 .
إذا كان العددين a و b سالبين فإن $b^2 \leq x^2 \leq a^2$ تأطير للعدد x^2 .

مثال :

إذا علمت أن : $-1 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 5$

حدد تأطيرا للأعداد التالية x^2 ، y^2 و xy .

ج) تأطير مقلوب عدد :

خاصية :

إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطير للعدد x بحيث a و b لهما نفس الإشارة وغير منعدمين فإن :
$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b}$ تأطير للعدد $\frac{1}{x}$.

ملاحظة هامة (تأطير خارج عددين) :

- لكل عددين x و y بحيث $y \neq 0$ لدينا : $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$.

- لتأطير الخارج $\frac{x}{y}$ نؤطر أولا العدد $\frac{1}{y}$ ثم نؤطر الجداء $x \times \frac{1}{y}$.

تطبيق :

إذا علمت أن : $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$ وأن $1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$ ،

حدد تأطيرا للعدد $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

IV– التقريب :

1) التقريب بإفراط أو بتفريط :

تعريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \leq b$ ،
ليكن $a \leq x \leq b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$ أو $a < x < b$ تأطير للعدد x سعته $I = b - a$.
- العدد a يسمى تقريب للعدد x إلى I بتفريط .
- العدد b يسمى تقريب للعدد x إلى I بإفراط .

تمرين تطبيقي :

باستعمال الآلة الحاسبة : ($\pi \approx 3,14159265$)

1) حدد تقريبا للعدد π إلى 10^{-4} بتفريط .

2) حدد تقريبا للعدد π إلى 10^{-4} بإفراط .

2) قيمة مقربة :

تعريف :

ليكن x و r عددين حقيقيين بحيث $r > 0$ ،
إذا كان a عددا حقيقيا بحيث $|x - a| \leq r$ فإن a يسمى قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

مثال :

بين أن العدد $0,335$ هو قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{3}$ بالدقة 5×10^{-3} .

3) التقريبات العشرية :

تعريف :

ليكن x عددا حقيقيا و $p\in\mathbb{N}$ حيث $n.10^{-p}\le x<(n+1).10^{-p}$ و $n\in\mathbb{Z}$ ،

- العدد $n.10^{-p}$ يسمى **التقريب العشري** للعدد x إلى 10^{-p} **بتفريط** .
- العدد $(n+1).10^{-p}$ يسمى **التقريب العشري** للعدد x إلى 10^{-p} **بإفراط** .

مثال :

لدينا $3,14\le\pi<3,15$ إذن $314\cdot10^{-2}\le\pi<315\cdot10^{-2}$ إذن :

- العدد $3,14$ يسمى التقريب العشري للعدد π إلى 10^{-2} بتفريط .
- العدد $3,15$ يسمى التقريب العشري للعدد π إلى 10^{-2} بإفراط .

تمرين تطبيقي :

باستعمال الآلة الحاسبة حدد تقريبا عشريا للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط .