Ch. 3 :L'ordre dans IR

Partie 2 (opérations et ordre- valeur absolue –encadrement)

I. Ordre et comparaison

Comparer deux nombres réels a et b, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).
Dire que $a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a - b$.
exemples : Soient a et b deux nombres réels, comparer $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.

a) Ordre et addition

Propriété : Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$
Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

Propriété : Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
En effet, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

b) Ordre et multiplication

Propriété : Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Autrement dit, multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité,
- *par un même nombre **strictement positif, ne change pas** le sens de l'inégalité.*
- *par un même nombre **strictement négatif, change** le sens de l'inégalité.*

*Propriété : Si a, b, c et d sont des réels **positifs** tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.*
En effet, si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.
De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $d > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

c) Encadrement

Soient a, b et x trois nombres réels. On dit que a et b encadrent x lorsque $a \leq x \leq b$.

Exercice : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.
Trouver un encadrement de B.

II. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

a) Passage au carré, à la racine carrée

Propriété : a et b étant deux nombres positifs distincts, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

démonstration : On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et a^2 et b^2 sont de même signe. D'où

- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.
- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Conséquence : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$.

b) Passage à l'inverse

Propriété : a et b étant deux nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Démonstration : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ équivaut à $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. Or $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$ et $ab > 0$, car $a > 0$ et $b > 0$.

Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ et $b - a$ sont de même signe. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ équivaut à $b - a > 0$, c'est à dire $a < b$.

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exercice : x est un réel tel que $2 < x < 5$. Donner un encadrement de $A = x + \frac{1}{x}$.

III. Comparaison de a, a² et a³ lorsque a > 0

Propriété : a est un réel strictement positif.

1. Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$; 2. si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Démonstration : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par
$a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a^2 > 0$). Donc $a^3 > a^2 > a$.
De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$.

<u>Exercice :</u> x est un réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$.
Comparer les nombres A, A^2 et A^3.

IV. Valeur absolue

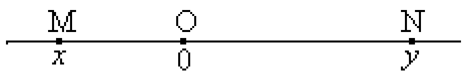
a) Distance entre deux réels

*<u>Définition :</u> La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.*
$|x - y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

<u>Exemples :</u> • *$|3 - 5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5 - 3 = 2$.*

• *$|-2 - 3|$ est la distance entre les réels –2 et 3. Cette distance est égale à $3 - (-2) = 5$.*

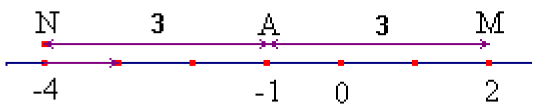
Interprétation graphique de $|x - y|$



Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.
$|x - y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.

<u>Application :</u> Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.
L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par MA = MB, avec A, B et M alignés : cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

<u>Exercice :</u> Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$.
A et M sont les points d'abscisses respectives –1 et x sur une droite graduée :
$AM = |x - (-1)| = |x + 1|$



Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que AM = 3.
Les nombres cherchés sont donc : 2 et –4.

b) Valeur absolue d'un réel

Lorsque $y = 0$, $|x - y| = |x|$. Le nombre réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

Donc : $$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|5| = 5$ *car 5 est un nombre positif.* $|-3| = 3$ *car -3 est un nombre négatif.*

Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ *car* $x^2 \geq 0$.

Propriétés :

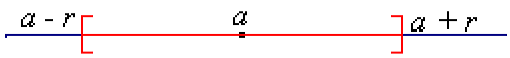
1. *Dire que* $|x| = 0$ *équivaut à dire que* $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. *Dire que* $|x| = |y|$ *équivaut à dire que* $x = y$ *ou* $x = -y$.

c) L'inégalité $|x - a| \leq r$ (a et r fixés, $r > 0$)

Propriété : *a est un réel, r est un réel strictement positif.*

Dire que $|x - a| \leq r$ *équivaut à dire que x appartient à l'intervalle* $[a - r\,;\, a + r]$.

Démonstration : $|x - a| \leq r$ *signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r, c'est à dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.*



Donc $|x - a| \leq r$ ***équivaut à dire que x appartient à*** $[a - r\,;\, a + r]$ ***donc équivaut à dire que***

$$a - r \leq x \leq a + r.$$

V. Encadrement d'un nombre.

i. *Définition:*

Soit x un nombre donné. Réaliser un encadrement de x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. *Le nombre b-a est l'amplitude de cet encadrement.*

Exemples:

Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ *d'amplitude 1, de* π *d'amplitude 0,1.*

ii. *Encadrement d'une somme, d'un produit.*

Règle 1: *Si* $a \leq b$ *et* $c \leq d$ *alors* $a + c \leq b + d$.

Règle 2: *Si* $0 \leq a \leq b$ *et* $0 \leq c \leq d$ *alors* $0 \leq ac \leq bd$.

VI. Valeur approchée d'un nombre.

Définition:

Soit a et x deux nombres et ε *un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à* ε *près (ou à la précision* ε*) lorsque* $|x - a| \leq \varepsilon$.

Définition:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε), par défaut, lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$. a est une valeur approchée de x à ε près, par excès, lorsque $a - \varepsilon \leq x \leq a$.