مجموعــات الأعداد

$I-$ المجموعات :

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تُكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ، ونكتب : $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$

$\mathbb{N}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة ، $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;.....\}$

- الأعداد الصحيحة الطبيعية ومقابلاتها تُكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ، ونكتب : $\mathbb{Z}=\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$

$\mathbb{Z}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية غير المنعدمة ،

$\mathbb{Z}^+$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية الموجبة : $\mathbb{Z}^+=\{0;1;2;3;.....\}=\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}^-$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية السالبة : $\mathbb{Z}^-=\{.....;-3;-2;-1;0\}$

- الأعداد التي تُكتب على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث a عدد صحيح نسبي و n عدد صحيح طبيعي ، تُكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العشرية النسبية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{D}$ ، ونكتب : $\mathbb{D}=\left\{\frac{a}{10^n}/a\in\mathbb{Z}\ ;n\in\mathbb{N}\right\}$

- الأعداد التي تُكتب على شكل $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح نسبي و b عدد صحيح طبيعي غير منعدم ، تُكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الجذرية ، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، ونكتب : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a\in\mathbb{Z}\ ;b\in\mathbb{N}^*\right\}$

- الأعداد الجذرية واللاجذرية تُكون مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ ، هذه المجموعة يمكن تمثيلها على مستقيم (D) مزود بمعلم $(o;I)$ بحيث :

✱ كل نقطة من المستقيم (D) تقبل عددا وحيدا أفصولا لها .

✱ كل عدد حقيقي هو أفصول لنقطة وحيدة من المستقيم (D) .

✱ المستقيم (D) في هذه الحالة يسمى محورا ، ونرمز له بالرمز $D(O;I)$.

3) ملاحظة :

☜ لدينا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

1) حدد طبيعة كل عدد من الأعداد التالية :

$\sqrt{49}$ ، $(-4)^2$ ، $-(4)^2$ ، $\frac{\sqrt{36}}{15}$ ، $\frac{1}{7}$ ، $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2$

2) عرف المجموعات التالية : $\mathbb{R}^+$ ، $\mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R}^{*+}$ ، $\mathbb{Z}^+$ ، $\mathbb{D}^*$ و $\mathbb{D}^-$.

$II-$ العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$:

1) الجمع في $\mathbb{R}$:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :

✱ $a+b=b+a$ ونقول إن عملية الجمع تبادلية في $\mathbb{R}$.

✱ $a+(b+c)=(a+b)+c$ ونقول إن عملية الجمع تجميعية في $\mathbb{R}$.

✱ $a+0=0+a=a$ ونقول إن 0 هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$.

✱ $a+(-a)=(-a)+a=0$ ونقول إن $-a$ هو مقابل العدد a بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$.

2) الضرب في $\mathbb{R}$:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :

✱ $ab=ba$ ونقول إن عملية الضرب تبادلية في $\mathbb{R}$.

✱ $a(bc)=(ab)c$ ونقول إن عملية الضرب تجميعية في $\mathbb{R}$.

✱ $a\cdot1=1\cdot a=a$ ونقول إن 1 هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$.

✱ إذا كان $a\neq0$: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ ونقول إن $\frac{1}{a}$ هو مقلوب العدد a بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$.

ملاحظة :

العدد 0 لا يملك مقلوبا في $\mathbb{R}$.

إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $a\neq0$ و $b\neq0$ فإن مقلوب العدد $\frac{a}{b}$ هو $\frac{b}{a}$.

3) العمليات على الأعداد الجذرية :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، لدينا :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$$

- إذا كان $c \neq 0$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$$

4) ملاحظات :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، لدينا :

✱ $\frac{a}{b}=c$ يكافئ $a=bc$ ✱ $\frac{a}{b}=1$ يكافئ $a=b$

✱ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكافئ $ad=bc$ ✱ $\frac{a}{b}=0$ يكافئ $a=0$

5) النشر والتعميل :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ، لدينا :

✱ $a(b+c)=ab+ac$ ✱ $a(b-c)=ab-ac$

✱ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ✱ $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$

✱ $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ ✱ $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

النشر $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ التعميل   النشر $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ التعميل

تمرين تطبيقي :

1) أكتب العدد A على شكل عدد جذري مختزل ، حيث :

$$A=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}$$

2) حدد قيم x من $\mathbb{R}$ التي من أجلها يكون حساب B ممكنا ثم بسطه : $B=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{1+x}+1$

3) عمل التعبير : $ab+a-b-1$ حيث a و b من $\mathbb{R}$.

4) أنشر التعبير : $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ حيث a و b من $\mathbb{R}$.

III- الجذور المربعة :

1) تعريف :

لبكن x عددا حقيقيا موجبا ، نسمي جذر مربع x العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي x ، ونرمز له بالرمز : $\sqrt{x}$

أمثلة :

$\sqrt{4}=2$ ، $\sqrt{1}=1$ ، $\sqrt{0}=0$ ، $\sqrt{25}=5$ و $\sqrt{1,44}=1,2$

2) ملاحظة :

إذا كان x و y من $\mathbb{R}^+$ فإن : $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يكافئ $x=y$.

$\sqrt{x}=0$ يكافئ $x=0$.

3) خاصية :

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ و n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$\left(\sqrt{x}\right)^n=\sqrt{x^n}$ ، $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{x^2}=x$ ، $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

إذا كان $y>0$: $\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}$ ، $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

تمرين تطبيقي :

1) بسط كتابة الأعداد A و B و C حيث :

$$A=\sqrt{288}+\frac{\sqrt{200}}{4}-\frac{15}{\sqrt{18}}+\frac{11}{2}\sqrt{\frac{32}{242}} \quad \text{و} \quad B=3+\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-1}+\frac{3\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}$$

و $C=\sqrt{a}\sqrt{a^3b^2}-\sqrt{b}\sqrt{a^4b}+\sqrt{\sqrt{a^4b^4}}$ حيث a و b من $\mathbb{R}^+$

2) بين أن العدد $D=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ عدد صحيح طبيعي .

IV– القـــوى :

1) تعريف :

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم ، و n عددا صحيحا طبيعيا :

نسمي قوة العدد x ذات الأس n العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز x^n ويحقق :

$$x^n=\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{n\ facteurs} \quad \text{و} \quad x^0=1 \qquad x^{-n}=\frac{1}{x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

2) العمليات على القوى :

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و n و m من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$a^na^m=a^{n+m} \quad ، \quad \left(a^n\right)^m=a^{n.m} \quad ، \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad ، \quad a^nb^n=(ab)^n \quad \text{و} \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3) قوى العدد 10 :

لدينا : $10^0=1$ ، $10^1=10$ ، $10^2=100$ ، $10^{-1}=0,1$ ، $10^{-2}=0,01$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $10^n=1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zeros}$ و $10^{-n}=\underbrace{0,00\ldots0}_{n\ zeros}1$

4) الكتابة العلمية لعدد عشري غير منعدم :

كل عدد عشري نسبي غير منعدم x يُكتب بكيفية وحيدة على الشكل $x=a\cdot10^p$ ، حيث $p\in\mathbb{Z}$ و a عدد عشري له رقم وحيد غير منعدم قبل الفاصلة .

أمثلة :

- كتلة الكرة الأرضية (بـ kg) هي حوالي : $m=6400.000.000.000.000.000.000.000$

وبالكتابة العلمية لدينا : $m=6,4\times10^{24}$

- شحنة الإلكترون (بـ C) هي حوالي : $e=-0,000.000.000.000.000.000.16$

وبالكتابة العلمية لدينا : $e=-1,6\times10^{-19}$

5) متطابقات هامة :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا :

✳ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

✳ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

✳ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

✳ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

النشر $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ التعميل

✳ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

✳ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

✳ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

التعميل $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ النشر