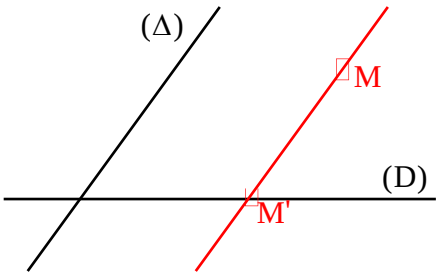
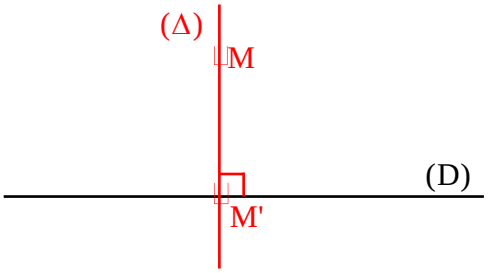
الإسـقــاط



I- تعريف الإسقاط وخاصياته :

1) الإسقاط على مستقيم بتواز مع آخر :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و M نقطة من المستوى ،
يوجد مستقيم وحيد مار من M ويوازي (Δ) ،
هذا المستقيم يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة M'.
- النقطة M' تسمى **مسقط النقطة** M على (D) بتواز مع (Δ) .
- العلاقة التي تربط كل نقطة M بمسقطها M' على (D) بتواز مع (Δ) تسمى الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) ونرمز لها بالرمز p ونكتب $p(M)=M'$.



2) الإسقاط العمودي على مستقيم :

ليكن (D) مستقيم ، و M نقطة من المستوى ،
يوجد مستقيم وحيد (Δ) مار من M وعمودي على (D) ،
هذا المستقيم يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة M'.
هذه النقطة تسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D).

3) خاصيات الإسقاط :

خاصية 1 :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين ، و M نقطة من المستوى ، و p الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) .
لدينا : $M\in(D)$ يكافئ $p(M)=M$

ملاحظة :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين ، و M نقطة من المستوى ، و p الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) .
إذا كان $p(M)=M$ فإننا نقول إن النقطة M صامدة بالإسقاط p .

خاصية 2 :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين ، و A نقطة من المستقيم (D) ،و p الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ)
مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $P(M)=A$ هي المستقيم الموازي لـ (Δ) والمار من A.

II- مبرهنة طاليس المباشرة والعكسية متجهيا – معامل استقامية متجهتين :

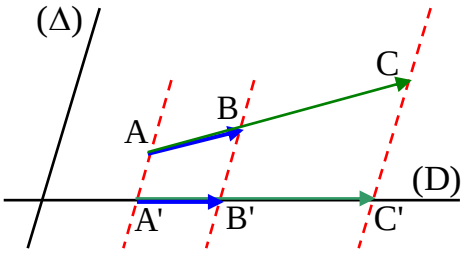
في جميع الفقرات المتبقية (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في المستوى .

1) مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا :

نشاط 1 :

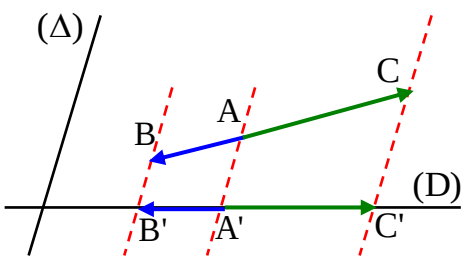
لتكن A و B و C نقط من المستوى بحيث $A\neq B$ ، و α من $\mathbb{R}$ و A' و B' و C' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ) ،
نفترض أن $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ ، بين أن $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

جواب :



لدينا $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ ، وحسب مبرهنة طاليس المباشرة لدينا : $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'}$

- **الحالة ① :** إذا كان α عدد موجب : إذن $AC=\alpha AB$
إذن $\dfrac{AC}{AB}=\alpha$ ومنه $\dfrac{A'C'}{A'B'}=\alpha$ إذن $A'C'=\alpha A'B'$
لدينا $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى و $A'C'=\alpha A'B'$
إذن $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$



- **الحالة ② :** إذا كان α عدد سالب : إذن $AC=-\alpha AB$
إذن $\dfrac{AC}{AB}=-\alpha$ ومنه $\dfrac{A'C'}{A'B'}=-\alpha$ إذن $A'C'=-\alpha A'B'$
لدينا $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ لهما نفس الإتجاه ومنحيان متعاكسان و $A'C'=-\alpha A'B'$
إذن $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

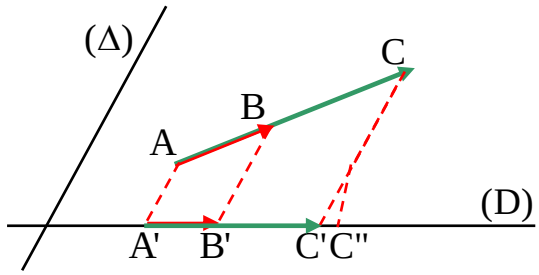
مبرهنة 1 : (مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا)

لتكن A و Bو C ثلاث نقط من المستوى بحيث $A\neq B$، و A' و B' و C' على التوالي مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)
و α عدد حقيقي . إذا كان $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فإن $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

2) مبرهنة طاليس العكسية متجهيا :

نشاط 2 :

لتكن A و B و C نقط مستقيمية من المستوى بحيث $A \neq B$ و $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ حيث α من $\mathbb{R}$
وليكن A' و B' على التوالي مسقطي النقطتين A و B على (D) بتواز مع (Δ) ،
لتكن C' نقطة من المستوى بحيث : $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$
بين أن C' هي مسقط النقطة C على (D) بتواز مع (Δ) .



جواب :

لتكن $C"$ مسقط النقطة C على (D) بتواز مع (Δ) ،
لدينا $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ، إذن $\overrightarrow{A'C"} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$
وبما أن $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ فإن : $\overrightarrow{A'C"} = \overrightarrow{A'C'}$ ومنه $C" = C'$

مبرهنة 2 : (مبرهنة طاليس العكسية متجهيا)

لتكن A و B و C نقط من المستوى بحيث $A \neq B$ و $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ حيث α من $\mathbb{R}$
و A' و B' على التوالي مسقطي النقطتين A و B على (D) بتواز مع (Δ) ، و C' نقطة من المستوى .
إذا كان $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ فإن C' مسقط النقطة C على (D) بتواز مع (Δ).

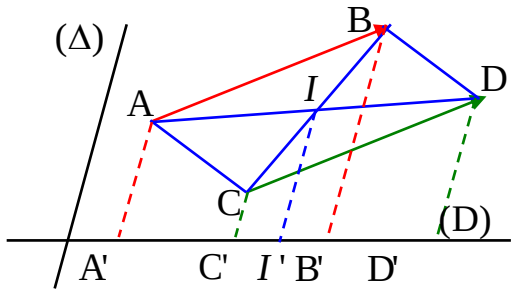
3) الإسقاط وتساوي متجهتين :

نشاط 3 :

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى بحيث $A \neq B$ ، و A' و B' و C' و D' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)،
نفترض أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، بين أن $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

جواب :

لدينا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذن $ABDC$ متوازي الأضلاع ، ليكن I مركزه
و I' المسقط العمودي لـ I على (D) بتواز مع (Δ)،
لدينا $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{ID}$ (هذه المتجهات لها نفس الأصل)
إذن حسب المبرهنة 1 : $\overrightarrow{I'B'} = -\overrightarrow{I'C'}$ و $\overrightarrow{I'A'} = -\overrightarrow{I'D'}$
إذن $\overrightarrow{I'B'} = \overrightarrow{C'I'}$ و $\overrightarrow{A'I'} = \overrightarrow{I'D'}$
ومنه $\overrightarrow{A'I'} + \overrightarrow{I'B'} = \overrightarrow{C'I'} + \overrightarrow{I'D'}$ وبالتالي $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$



مبرهنة 3 :

لتكن A و Bو C و D أربع نقط من المستوى و A' و B' و C' و D' مساقطها على التوالي على (D) بتواز مع (Δ).
إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$
ونقول إن الإسقاط يحافظ على تساوي متجهتين .

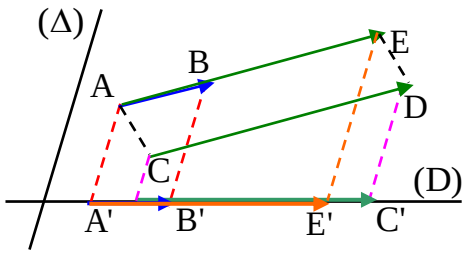
4) الإسقاط ومعامل إستقامية متجهتين :

نشاط 4 :

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى بحيث $A \neq B$. و α من $\mathbb{R}$
و A' و B' و C' و D' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)،
نفترض أن $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ، بين أن $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

جواب :

لدينا $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ، لتكن E نقطة بحيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$
و E' مسقط E على (D) بتواز مع (Δ).
لدينا حسب المبرهنة 1 : $\overrightarrow{A'E'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$
وبما أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ فإنه حسب المبرهنة 2 : $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'E'}$
وبالتالي $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$



مبرهنة 4 :

لتكن A و Bو C و D أربع نقط من المستوى و A' و B' و C' و D' على التوالي مساقطها على (D) بتواز مع (Δ).
و α عدد حقيقي ،
إذا كان $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{C'D'}$ ونقول إن الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين .