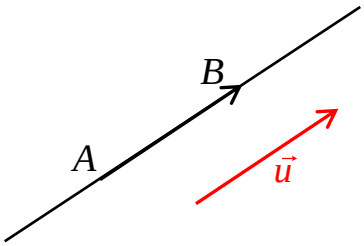
الحساب المتجهي في المستوى

I- تساوي متجهتين :

1) تحديد متجهة :

تعريف :



لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى ، نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
✱ اتجاه المتجهة $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB).
✱ منحى المتجهة $\vec{u}$ هو من A نحو B.
✱ منظم المتجهة $\vec{u}$ هو المسافة بين A و B.

حالة خاصة :

إذا كان $A=B$ فإن $\vec{u}=\overrightarrow{AA}$ و المتجهة $\vec{u}$ ليس لها اتجاه وليس لها منحى ، ومنظمها 0 .
نقول إن المتجهة $\vec{u}$ منعدمة ونرمز لها بالرمز $\vec{0}$ ونكتب : $\vec{u}=\vec{0}$.

خاصية 1 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى ،
تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم .

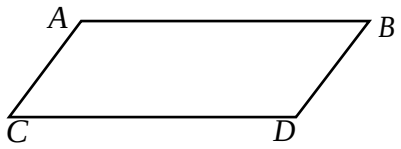
خاصية 2 :

لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل نقطة A من المستوى توجد نقطة وحيدة B من المستوى بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

نتائج :

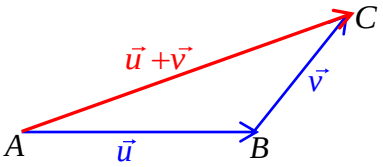
إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ فإن $B=C$ ، وإذا كان $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ فإن $A=B$

ملاحظة :

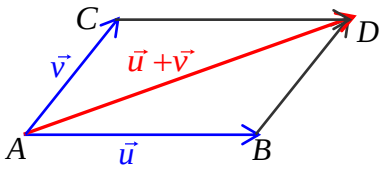


لتكن A و B و C و D نقط من المستوى .
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يكافئ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ يكافئ $ABDC$ متوازي الأضلاع .

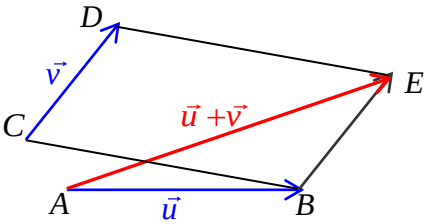
II- مجموع متجهتين في المستوى :



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى ، بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
✱ إذا كانت $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ ،
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
العلاقة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ تسمى **علاقة شال** .



✱ إذا كانت $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ،
لتكن D النقطة من المستوى بحيث $ABDC$ متوازي الأضلاع .
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$



✱ إذا كانت $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ ،
توجد نقطة وحيدة E من المستوى بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{BE}$
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$

خاصيات :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى لدينا :
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ ، $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ ، $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

III- جداء متجهة في عدد حقيقي :

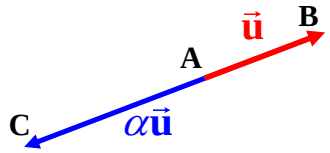
لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و α عددا حقيقيا غير منعدما ،

✱ **إذا كان** $\alpha>0$ **:**

توجد نقطة وحيدة C من المستوى تحقق :

$C\in(AB)$ و $AC=\alpha.AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى .

هذه النقطة C تحقق : $\overrightarrow{AC}=\alpha.\overrightarrow{AB}$



✱ **إذا كان** $\alpha<0$ **:**

توجد نقطة وحيدة C من المستوى تحقق :

$C\in(AB)$ و $AC=-\alpha.AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما منحيان متعاكسان .

هذه النقطة C تحقق : $\overrightarrow{AC}=\alpha.\overrightarrow{AB}$

في الحالتين معا المتجهة $\overrightarrow{AC}$ تسمى جداء المتجهة $\vec{u}$ في α ، ونرمز لها بالرمز $\alpha\vec{u}$.

حالات خاصة :

لكل متجهة $\vec{u}$: $0\vec{u}=\vec{0}$ ، لكل عدد حقيقي α : $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$ و $\alpha\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0})$

خاصيات :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى و α و β عددين حقيقيين لدينا :

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ ، $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ ، $\alpha(\vec{u}-\vec{v})=\alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}$ ، $(\alpha-\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u}$

$\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$

تمرين تطبيقي :

1) بسط التعبير : $2(5\vec{u}-\vec{v})-3(\vec{u}+2\vec{v})-(\vec{v}-\vec{u})$

2) حدد a حيث : $2a\vec{u}-3\vec{u}=\vec{0}$ و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة .

IV– فرق متجهتين :

1) مقابل متجهة :

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة ، و A و B نقطتين مختلفتين من المستوى ،

مقابل المتجهة $\vec{u}$ هو المتجهة $(-1)\vec{u}$ ونرمز لها بالرمز $-\vec{u}$.

مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المتجهة $-\overrightarrow{AB}$ و نرمز لها بالرمز $\overrightarrow{BA}$.

2) فرق متجهتين :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى ،

فرق المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u}-\vec{v}$ و تساوي مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و مقابل $\vec{v}$ ،

أي : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

V– استقامية متجهتين – استقامية ثلاث نقط :

1) تعريف :

- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى ،

تكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ ،

(العدد الحقيقي α يسمى معامل استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$) .

- لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى ،

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كانت المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين .

ملاحظة :

المتجهة المنعدمة مستقيمية مع أية متجهة من المستوى : لكل متجهة $\vec{u}$ من المستوى لدينا $\vec{0}=0\vec{u}$

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين من المستوى ، و α و β عددين حقيقيين ،

إذا كان : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ فإن : $\alpha=0$ و $\beta=0$

2) منتصف قطعة :

خاصية 1 :

تكون نقطة I منتصف قطعة $[AB]$ إذا تحققت إحدى العلاقات التالية :

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ، $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ، $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

خاصية 2 :

إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ فإنه لكل نقطة M من المستوى لدينا : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$