NAJAH EN MATHÉMATIQUES

- Tronc Commun Scientifique
- Tronc Commun Technologique

Auteurs

HAKKANI Abdeslem
Inspecteur principal de l'enseignement secondaire qualifiant
«Coordinateur»

FAHMI Mostafa
Inspecteur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

JYAD Mostafa
Professeur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

GHOUZAILI Mohamed
Professeur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

Livre de l'élève

NAJAH EN MATHÉMATIQUES

- Tronc Commun Scientifique
- Tronc Commun Technologique

Auteurs

HAKKANI Abdeslem
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant
«Coordinateur»

FAHMI Mostafa
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

JYAD Mostafa
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

GHOUZAILI Mohamed
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Livre de l'élève

مطبعة النجاح الجديدة
IMPRIMERIE NAJAH AL JADIDA
17, Rue Haj Jilali AL Aoufir - Casablanca
Tél.: 05.22.25.38.38/25.58.89 - Fax: 05.22.25.52.81

6ème édition 2020

AVANT-PROPOS

C'est dans le cadre de la réforme globale du système éducatif et selon les développements enregistrés par le curriculum, que ce manuel a été élaboré. Il s'adresse aux élèves du tronc commun secondaire qualifiant (scientifique et technologique) ; il accompagne ainsi une étape cruciale importante du cursus scolaire des élèves. Cette étape se caractérise par :

- l'acquisition d'un bagage cognitif mathématique permettant l'amélioration de l'apprentissage ;
- L'émergence d'aptitudes et de capacités facilitant l'orientation vers des études appropriées meilleures.

L'élaboration de ce livre a donc tenu compte des considérations et caractéristiques suivantes :

- Maintien, organisation et perfectionnement des acquis.
- Introduction de chaque chapitre par des activités préparatoires qui incitent l'élève à l'adhésion et à l'engagement dans son apprentissage. Ces activités représentent un trait d'union entre les prérequis et les "nouveaux" savoirs et savoirs-faire.
- Adoption de la démonstration et du raisonnement pour parvenir aux propriétés et à leurs conséquences et corollaires.
- Consolidation des savoirs et savoirs-faire fondamentaux par le biais d'exemples et d'applications qui jalonnent la totalité de l'ouvrage et qui favorisent la fixation des concepts et leur affermissement.
- Organisation des connaissances acquises dans un canevas que l'on a convenu d'appeler "points essentiels" ; cette phase n'est pas une abréviation, ni une réduction du savoir, mais se distingue par une présentation structurée qui catalyse et aiguise la mémoire.
- Proposition d'exercices résolus et commentés qui conduisent à la confirmation des notions et leur assimilation à travers l'application fonctionnelle, au contrôle du degré d'acquisition et de la qualité de maîtrise aussi bien que l'entraînement à la formulation rigoureuse du raisonnement.
- Proposition d'exercices et problèmes nombreux, diversifiés et catégorisés comme suit :
  - Exercices d'application.
  - Exercices de renforcement des apprentissages.
  - Exercices de synthèse.
  - Problèmes.

Les exercices proposés sont calibrés en fonction des capacités exigibles et sont classés selon leur degré de difficulté. Dans tous les cas, ces exercices permettent de noter la pertinence et l'efficacité des outils mathématiques dans des situations variées.

En conclusion, nous souhaitons que ce manuel soit un moyen d'éclairement pour les enseignants et un outil profitable aux élèves. Finalement, le manuel scolaire reste un instrument pédagogique efficient que le professeur investit pour réaliser les ambitions auxquelles il aspire.

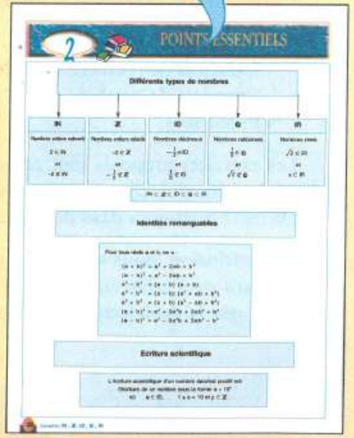
Comment j'utilise ce livre

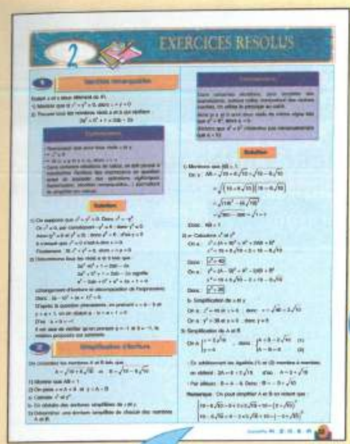
On y trouve le détail des paragraphes du chapitre et les titres des pages. On y rencontre les capacités attendues et les contenus

Ces activités te facilitent la construction du savoir en se référant à ton prérequis

On trouve, dans cette étape, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies

Ce paragraphe est un guide pour évoquer les conclusions et les résultats essentiels





Exercices résolus

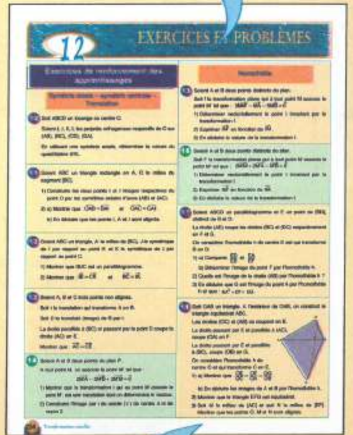
Ce type d'exercices permet de consolider le savoir, de l'investir et de s'exercer au raisonnement

Exercices de renforcement des apprentissages

Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution vers la maîtrise, la perfection et l'enrichissement des acquis

Exercices d'application

Exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages



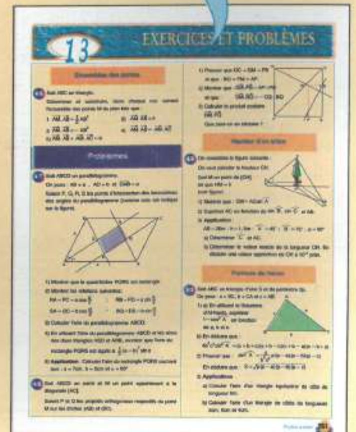
Exercices de synthèse

Nécessitent une organisation plus approfondie des acquis et la mobilisation des ressources

Tu trouveras à la fin du livre les indications des solutions de ce genre d'exercices

Problèmes

C'est la phase d'intégration des apprentissages et l'investissement du savoir dans tous ses aspects



Programme de mathématiques du tronc commun scientifique et du tronc commun technologique

Contenu du programme	Capacités attendues
I- Ensembles de nombres et calcul numérique	
1) Ensemble des nombres entiers naturels IN et notions d'arithmétique – Nombres pairs et nombres impairs. – Multiples d'un nombre – plus petit multiple commun de deux nombres. – Diviseurs d'un nombre – plus grand diviseur commun de deux nombres. – Nombres premiers – décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.	Utilisation de la parité et de la décomposition en produit de facteurs premiers dans la résolution de certains problèmes simples sur les nombres entiers naturels.
2) Les ensembles IN, ℤ, ID, ℚ, IR – Ecritures et notations. – Ensembles de nombres irrationnels. – Opérations dans IR et propriétés. – Puissances de 10 ; écriture scientifique d'un nombre décimal. – Identités : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$: a^2-b^2 ; a^3-b^3 ; a^3+b^3 ; $(a+b)^3$; $(a-b)^3$ – Développement et factorisation.	* Discernement des relations entre nombres et distinction des différents ensembles de nombres. * Détermination de l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée.
3) Ordre dans l'ensemble IR – Ordre et opérations. – Valeur absolue et propriétés. – Intervalles. – Encadrement et approximation ; approximations décimales.	* Maîtrise des différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utilisation de la plus pertinente d'entre elles selon la situation étudiée. * Représentation des différentes relations relatives à l'ordre sur la droite numérique. * Connaissance et détermination de l'approximation d'un nombre (ou d'une expression) à une précision donnée. * Effectuer des majorations et des minorations d'expressions algébriques. * Utilisation de la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.
4) Polynômes – Présentation d'un polynôme ; égalité de deux polynômes. – Somme et produit de deux polynômes. – Racine d'un polynôme ; division par $x-a$. – Factorisation d'un polynôme.	* Maîtrise de la technique de la division euclidienne par $x-a$. * Discernement de la divisibilité par $x-a$.
5) Equations, inéquations et systèmes – Equations et inéquations du premier degré à une inconnue. – Equations et inéquations du second degré à une inconnue. • Forme canonique d'un trinôme du second degré. • Equations du second degré à une inconnue. • Signe d'un trinôme du second degré. • Inéquations du second degré à une inconnue. – Systèmes :	* Résolution d'équations et d'inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier ou du second degré à une inconnue. * Résolution de systèmes du premier degré à deux inconnues en utilisant les différentes méthodes (combinaison linéaire ; substitution ; déterminant). * Mathématisation de situations comportant des grandeurs variables en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes.

Contenu du programme	Capacités attendues
• Equation du premier degré à deux inconnues. • Système de deux équations du premier degré à deux inconnues. • Régionnement du plan	* Représentation graphique des solutions d'inéquations ou de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues et utilisation du graphique pour régionner le plan et pour la résolution de problèmes simples sur la programmation linéaire.
II- Géométrie plane	
1) Calcul vectoriel dans le plan – Egalité de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; relation de chasles. – Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; colinéarité de deux vecteurs. – Alignement de trois points ; détermination vectorielle du milieu d'un segment. **2) Projection** – Projection sur une droite, projection orthogonale ; projection sur un axe. – Théorème de Thalès et réciproque. – Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs. **3) La droite dans le plan (étude analytique)** – Repère : coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur ; condition de colinéarité de deux vecteurs. – Détermination d'une droite par un point et un vecteur directeur ; représentation paramétrique d'une droite. – Equation cartésienne d'une droite ; position relative de deux droites.	* Construction d'un vecteur de la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$. * Exprimer les notions et le propriétés géométriques en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement. * Résolution de problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.
4) Transformations du plan – Rappel : symétrie axiale / symétrie centrale / translation. – Homothétie. – Propriétés caractéristiques de la translation et de l'homothétie ; cas de la symétrie centrale. – Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs ; distance et transformations précédentes. – Images de figures (segment ; droite ; cercle ; angle).	* Utilisation de la translation, de l'homothétie et de la symétrie dans la résolution de problèmes géométriques. * Reconnaître l'isométrie et la similitude de figures. Utiliser la translation, l'homothétie et la symétrie.
5) Produit scolaire – Définition et propriétés ; formule trigonométrique ; orthogonalité de deux vecteurs. – Quelques applications du produit scolaire. – Relations métriques dans un triangle rectangle. – Théorème de la médiane. – Théorème d'Al-Kashi.	* Exprimer la distance et l'orthogonalité au moyen du produit scolaire. * Utilisation du produit scolaire dans la résolution de problèmes. * Utilisation du théorème d'Al-Kashi et du théorème de la médiane dans la résolution de problèmes.
III- Géométrie dans l'espace	
– Axiomes d'incidence ; détermination d'un plan dans l'espace. – Positions relatives de droites et de plans dans l'espace. – Propriétés de parallélisme et d'intersection. – Orthogonalité : orthogonalité d'une droite et d'un plan ; plans perpendiculaires ; propriétés de l'orthogonalité et du parrallélisme. – Formules des aires et des volumes des solides : prisme droit ; pyramide régulière ; cylindre ; cône de révolution ; sphère.	* Reconnaître et représenter les parties de l'espace dans le plan. * Percevoir les cas d'analogie et les cas de dissemblance entre les notions et propriétés de la géométrie plane et leurs correspondantes dans l'espace. * Emploi des propriétés de la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes extraits de la réalité.

IV- Fonctions numériques

- Généralités :
  - Ensemble de définition d'une fonction numérique.
  - Egalité de deux fonctions numériques.
  - Représentation graphique d'une fonction numérique.
  - Fonction paire et fonction impaire (interprétation graphique)
- Variations d'une fonction numérique.
- Valeurs minimales (minima) et valeurs maximales (maxima) d'une fonction numérique sur un intervalle.
- Représentation graphique et variations des fonctions suivantes :

$$x \mapsto ax^2 \ ; \ x \mapsto \frac{a}{x} \ ; \ x \mapsto ax^2+bx+c \ ; \ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

* Reconnaître la variable et l'ensemble de définition d'une fonction définie par un tableau de données, par une courbe ou par une expression.
* Lecture de l'image d'un nombre et détermination d'un nombre dont l'image est donnée à partir de la représentation graphique d'une fonction.
* Déduire les variations d'une fonction ou les maxima et les minima à partir de la représentation graphique.
* Utilisation de la représentation graphique pour étudier certaines équations et inéquations.
* Capacité de tracer la courbe d'une fonction polynôme du second degré ou d'une fonction homographique sans le recours au changement de repère.
* Exprimer des situations extraites de la réalité ou tirées des autres matières en termes de fonctions.

V- Calcul trigonométrique

- Cercle trigonométrique ; abscisses curvilignes d'un point ; l'abscisse curviligne principale.
- Angle orienté de deux demi-droites de même origine ; mesures d'un angle orienté de deux demi-droites de même origine ; mesure principale ; relation de Chasles ; relation entre le degré, le radian et le grade ; angle orienté de deux vecteurs et ses mesures.
- Rapports trigonométrique d'un nombre réel et rapports trigonométriques d'un angle de deux vecteurs.
  - Relations :

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \ ; \ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \ ; \ \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

  - Rapports trigonométriques d'un angle de mesure :

$$0 \ ; \frac{\pi}{6} \ ; \frac{\pi}{4} \ ; \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2}$$

  - Relations entre les rapports trigonométriques de deux angles dont la somme ou la différence des mesures vaut :

$$0 \ ; \frac{\pi}{2} \ ; \pi \quad \text{modulo } 2\pi$$

- Représentation graphiques des fonctions sin et cos.
- Equations et inéquations trigonométriques fondamentales :

$$\sin x = a \ ; \ \cos x = a \ ; \ \tan x = a$$
$$\sin x \geq a \ ; \ \cos x \geq a \ ; \ \tan x \geq a$$
$$\sin x \leq a \ ; \ \cos x \leq a \ ; \ \tan x \leq a$$

- Angles inscrits ; quadrilatères inscriptibles.
- Relations :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \ ; \ S=\frac{1}{2}ab\sin C \ ; \ S=pr$$

* Emploi de la trigonométrie dans des situations et des problèmes relatifs au triangle.
* Représentation des nombres réels sur le cercle trigonométrique en utilisant la notion d'abscisse curviligne.
* Résolution des équations et inéquations fondamentales et représentations des solutions sur le cercle trigonométrique.
* Vérification des formules trigonométriques de base en utilisant le cercle trigonométrique.
* Découverte des phénomènes périodiques dans la réalité en utilisant les fonctions sinus et cosinus.
* Emploi de la calculatrice scientifique pour déterminer une valeur approchée d'un angle défini par l'une de ses lignes trigonométriques et réciproquement.
* Capacité de tracer la courbe de chacune des fonctions sin et cos et l'exploiter dans la compréhension et la consolidation des notions de périodicité, de parité, de monotonie...

VI- Statistiques

- Tableaux statistiques.
- Effectifs et effectifs cumulés.
- Pourcentages ; fréquences ; fréquences cumulées.
- Représentation graphique ; histogramme.
- Caractéristiques de position : moyenne arithmétique ; médiane ; mode.
- Caractéristiques de dispersion : écart moyen ; variance ; écart type.

* Organisation de données statistiques.
* Lecture de graphiques statistiques et son interprétation.
* Interprétation des caractéristiques de position et de dispersion.
* Distinguer les différentes caractéristiques de position
* Distinguer les différentes caractéristiques de dispersion.

Ensemble des nombres entiers naturels
Notions d'arithmétique

1

Capacités attendues

Utilisation de la parité et de la décomposition en produit de facteurs premiers dans la résolution de certains problèmes simples sur les nombres entiers naturels

Contenu

• Activités préparatoires

- Nombres pairs et nombres impairs
- Multiples d'un nombre entier naturel
- Plus petit multiple commun de deux nombres
- Diviseurs d'un nombre entier naturel
- Nombres premiers
- Plus grand diviseur commun de deux nombres

• Définitions et règles

- Nombres pairs et nombres impairs
- Opération sur les nombres pairs et impairs
- Multiples d'un nombre entier naturel
- Opérations sur les multiples
- Diviseurs d'un nombre entier naturel
- Opération sur les diviseurs
- Nombres premiers
- Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers
- Diviseurs communs de deux nombres
- Plus grand diviseur commun de deux nombres
- Multiples communs de deux nombres
- Plus petit multiple commun de deux nombres

• Points essentiels

• Exercices résolus

• Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 Nombres pairs et nombres impairs

1) Parmi les nombres suivants, déterminer les multiples du nombre 2 :

8	15	16	33 – 17	138 + 5

2) **Tout nombre entier naturel multiple de 2 est un nombre pair.**

Tout nombre qui n'est pas pair est un nombre impair.

Déterminer, parmi les nombre suivants, ceux qui sont pairs et ceux qui sont impairs :

$2^2 + 1$	$2n + 8$	$4n^2 + 1$	$1 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$

où n est un nombre entier naturel.

3) a- Montrer que **le produit de deux entiers naturels consécutifs est un nombre pair**.

b- En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + 7n + 13$ est impair.

ACTIVITE 2 Multiples d'un nombre entier naturel

A 1) Parmi les nombres suivants, reconnaître les multiples du nombre 3 :

78	34 x 6	104	102 + 39	34 – 21

2) Si m et n sont deux nombres entiers naturels vérifiant la relation m = 7n, que peut-on en déduire ?

3) Si x, y et z sont des nombres entiers naturels vérifiant la relation x . y = z, que peut-on en déduire ?

B Un fleuriste dispose d'un certain nombre de roses :

74 roses blanches, 111 roses jaunes et 185 roses rouges.

Le fleuriste veut former des bouquets contenant tous le même nombre de chaque sorte de roses:

1) Combien de bouquets peut-on former ?

2) Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

ACTIVITE 3 Plus petit multiple commun de deux nombres

A 1) Ecrire les cinq premiers multiples du nombre 6.

2) Ecrire les cinq premiers multiples du nombre 8.

3) **On remarque que le nombre 24 est un multiple de 6 et 8.**

On dit que 24 est un multiple commun des deux nombres 6 et 8.

> y est multiple de x
> si y = kx
> où k est un nombre entier naturel

a- Citer un autre multiple commun des deux nombres 6 et 8.

b- Peut-on déterminer tous les multiples communs des deux nombres 6 et 8 ?

4) **Le nombre 24 est le plus petit multiple non nul des nombres 6 et 8.**

Le nombre 24 est appelé le plus petit multiple commun des deux nombres 6 et 8.

on écrit $6 \vee 8 = 24$ ou $M(6, 8) = 24$

Déterminer le plus petit multiple commun des deux nombres dans chacun des cas suivants :

15 et 30	5 et 7	12 et 9

B Dans une salle de festivités, le nombre de chaises est compris entre 400 et 500.

Si on place les chaises par rangées de 20, il reste 10 chaises.

Si on les place par rangée de 15, il reste 10 chaises aussi.

1) Quel est le nombre de chaises dans la salle ?

2) Si on range les chaises de telle sorte que le nombre de chaises par rangées soit compris entre 12 et 20, quel est alors le nombre de rangées ?

ACTIVITE 4 Diviseurs d'un nombre entier naturel

A 1) **Le nombre 15 est un multiple de 5. on dit aussi** :

* **5 est un diviseur du nombre 15.**
* **5 divise le nombre 15.**
* **15 est divisible par 5.**

> x est diviseur de y
> si y = kx
> où k est un nombre entier naturel

Citer quelques diviseurs des nombres suivants :

18	21	13	28	10	6 × 102	2(a + 2)	(a étant un entier naturel)

2) Si m et n sont deux nombres entiers naturels vérifiant m = 5n, que peut-on en déduire ?

3) Si x, y et z sont des nombres entiers naturels vérifiant la relation z = xy, que peut-on en déduire ?

4) Si a divise 6 et 6 divise a, que peut dire de a et 6 ?

B Un établissement scolaire a organisé une excursion à Rabat le jour x du mois y de l'année (1900 + z).

Ont participé à ce voyage 90 élèves en compagnie de b enseignants à bord de a bus.

Sachant que le nombre d'enseignants dépasse le nombre de conducteurs par 1 et que 90 + $x$yzab = 34800, trouver la date de l'excursion, le nombre de bus et le nombre d'enseignants.

1 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 5 Nombres premiers

A 1) Trouver les diviseurs de chacun des nombres suivants :

2	3	5	7	11	13	37

2) **On remarque que tout nombre, parmi les nombres précédents, admet deux diviseurs exactement.**
Tout nombre, parmi ces nombres, est appelé nombre premier.
Ecrire tous les nombres premier plus petits que 5.
3) Les nombres 1 et 0 sont-ils premiers ? Pourquoi ?
4) Le nombre 187 est-il premier ? Pourquoi ?

Il y a une infinité de nombres premiers

B Soient p et q deux nombres premiers tels que : $p < q$ et $3 < q$. On pose $n = p + q$
1) Montrer que n n'est premier.
2) Déterminer le plus grand diviseur de n, qui est différent de n.
3) Montrer que tout diviseur du nombre n (autre que n) est plus petit que q.
4) p est-il un diviseur de n ?

ACTIVITE 6 Plus grand diviseur commun de deux nombres

A 1) Déterminer tous les diviseurs du nombre 12.
2) Déterminer tous les diviseurs du nombre 18.
3) On remarque que 2 est un diviseur des deux nombres 12 et 18. On dit que 2 est un diviseur commun des nombres 12 et 18.
Citer un autre diviseur commun des deux nombres 12 et 18.
Quel est le plus grand parmi les diviseurs communs des deux nombres 12 et 18.
4) **Le nombre 6 est le plus grand diviseur commun des deux nombres 12 et 18.**
Le nombre 6 est appelé le plus grand diviseur commun des nombres 12 et 18.
On écrit $12 \wedge 18 = 6$, $D(12, 18) = 6$ ou $\Delta(12, 18) = 6$
5) Déterminer le plus grand diviseur des deux nombres dans chacun des cas suivants :

8 et 20	44 et 55	13 et 44	6 et 45

B Un ouvrier dispose de deux barres de fer, la longueur de la 1ère barre est 252cm ; la longueur de la 2ème barre est 396cm.
Il veut les diviser en morceaux de même longueur de telle sorte que la longueur de chaque morceau soit comprise entre 10cm et 20cm.
1) Quel est la plus grande longueur possible de chaque morceau ?
Quel est le nombre de morceaux ?
2) Quel est la plus petite longueur possible de chaque morceau ?
Quel est alors le nombre de morceaux ?

1 DEFINITIONS ET REGLES

1 Nombres pairs et nombres impairs

Définition · Tout nombre entier naturel multiple de 2 est appelé nombre **pair**.
- Tout nombre entier naturel qui n'est pair est dit **impair**.
- Le nombres pairs sont les nombres qui s'écrivent sou la forme 2k où k est un nombre entier naturel.
- Les nombres impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme 2k + 1 où k est un nombre entier naturel, ou sous la forme 2k – 1 où k un nombre entier naturel non nul.

Exemples et applications

- 2004 est un nombre pair.
- 2005 est un nombre impair.
- soit a un nombre entier naturel non nul et différent de 1.
  - On pose $A = 2a - 3$ et $B = 4a + 2$
    On a : $A = 2a - 2 - 1 = 2(a - 1) - 1$. En posant $k = a - 1$,
    alors $A = 2k - 1$ où k est un nombre entier naturel non nul. Donc A est impair.
  - On a : $B = 4a + 2 = 2(2a + 1)$. En posant $k' = 2a + 1$,
    on a : $B = 2k'$ où k' est un entier naturel.
    Donc B est pair.
- Soit n un nombre entier naturel. Etudier la parité des deux nombres A et B tels que : $A = n(n + 1)$; $B = n^2 + 3n + 4$

2 Opérations sur les nombres pairs et impairs

Propriétés soient a et b deux nombres entiers naturels tels que $a \geq b$.
- Si a et b sont pairs, alors a + b et a – b sont pairs.
- Si a et b sont impairs, alors a + b et a – b sont pairs.
- Si l'un des deux nombres a et b est pair et l'autre impair, alors a + b et a – b sont impairs.
- Si l'un des deux nombres a et b et pair, alors ab est pair (quelle que soit la parité de l'autre).
- Si a et b sont impairs, alors ab est impair.

Exemples et applications

- Soit n un nombre entier naturel. On pose $A = n(n + 1) + 2(n^2 + 1) + 1$.
  $n(n + 1)$ est le produit de deux nombres entiers consécutifs dont l'un est pair ; donc $n(n + 1)$ est pair. Par ailleurs, $2(n^2 + 1) + 1$ est un nombre impair.
  Il s'ensuit que $n(n + 1) + 2(n^2 + 1) + 1$ est un nombre impair c'est-à-dire A est impair.
- Montrer que si (a est pair et a + b est impair), alors b est impair.

Notes

- Pour qu'un nombre entier naturel soit pair, il suffit que son chiffre d'unités soit 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Pour qu'un nombre entier soit impair, il suffit que son chiffre des unités soit 1, 3, 5, 7, ou 9.
- Etudier la parité d'un nombre entier naturel c'est savoir et préciser si ce nombre est pair ou impair.

Remarques

- a et b sont consécutifs signifie que :
  b = a + 1 ou a = b + 1
- Si a et b sont deux entiers consécutifs, alors :
  ab est pair,
  a + b et a – b son impairs (en supposant que a est plus grand que b);

1 DEFINITIONS ET REGLES

3 Multiples d'un nombre entier naturel

Définition On dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier naturel b si m est le produit de b par un entier naturel n.

Exemples et applications

- 82 est un multiple de 41 car $82 = 41 \times 2$.
  33 est un multiple de 11 car $33 = 3 \times 11$.
  33 est aussi un multiple de 3.
- Montrer que 12×15 est un multiple de 30.

Propriété Si b est un multiple de a et c est un multiple de b, alors c est un multiple de a.

Exemples et applications

- Le nombre 12 est un multiple du nombre 4, et le nombre 24 est un multiple de 12 ; donc 24 est un multiple du nombre 4.
- Soient a et b deux entiers naturels.
  Montrer que si a est un multiple de b^2, alors a est un multiple de b.

4 Opérations sur les multiples

Propriétés Soient a, b et c des entiers naturels.

- Si b et c sont des multiples de a et $b \geq c$, alors $b + c$ et $b - c$ sont des multiples de a.
- Si b est un multiple de a, alors bc est un multiple de a.

Exemples et applications

- 15 est un multiple de 3, et 6 est un multiple de 3 ; donc 21 est un multiple de 3 (puisque $15 + 6 = 21$).
- Montrer que si b et c sont des multiples de a, alors $2c + 3b$ est un multiple de a.

5 Diviseurs d'un nombre entier naturel

Définition On dit que le nombre entier naturel a est un diviseur de b si b est un multiple de a c'est-à-dire si :
- il existe un entier naturel q tel que $b = aq$
Si a est un diviseur de b, on dit aussi que :
- a divise b.
- b est divisible par a.
- b est un multiple de a.

Autre formulation

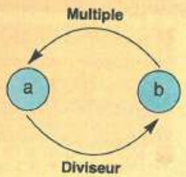
m est multiple de b signifie que $m = bn$ où n est un nombre entier naturel

Remarques

- Tout nombre entier naturel a est un multiple de lui-même et de 1
- 0 est multiple de tous les entiers naturels

Ecriture

a est un diviseur de b s'il existe un nombre entier naturel q tel que $b = aq$



1 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

- 12 est un diviseur de 36. 36 est un multiple de 12.
- Déterminer Tous les diviseurs du nombre 108 et calculer leur somme.

6 Opérations sur les diviseurs

Propriétés Soient a, b et c des nombres entiers naturels.

- Si a est un diviseur de b et de c, et $b \geq c$ alors que est un diviseur de $b + c$ et de $b - c$.
- Si a est un diviseur de b, alors a est un diviseur de bc.

7 Nombres premiers

Définition Un nombre entier naturel p est premier s'il admet **exactement deux diviseurs**.

Exemples et applications

- Le nombre 31 est premier parce qu'il admet exactement deux diviseurs qui sont 1 et 31.
  Le nombre 6 n'est pas premier parce qu'il a plus de deux diviseurs (1, 2, 3, 6 sont les diviseurs de 6).
- Soient x et y sont deux nombres premiers tels que $x + y$ est impair.
  Montrer que ($x = 2$ ou $y = 2$).

8 Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers

Introduction

60 est un nombre non premier.
On a : $60 = 10 \times 3 \times 2 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
Il y a des produits égaux à 60.
Le produit $2 \times 2 \times 3 \times 5$ a tous ses facteurs premiers
On dit que $2^2 \times 3 \times 5$ est la décomposition du nombre 60 en produit de facteurs premiers.

Propriété Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemples et applications

- L'écriture $2^2 \times 3 \times 5$ est la décomposition du nombre 60 en produit de facteurs premiers.
- Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 270 ; 180 ; 32.

Calcul littéral

a divise b signifie que $b = ka$.
a divise c signifie que $c = k'a$.
Donc :
$$\begin{cases} b + c = (k + k')a \\ b - c = (k - k')a \end{cases}$$
Ainsi a divise $b + c$ et $b - c$.

Remarques

- Le nombre 1 n'est pas premier parce qu'il admet un seul diviseur.
- p est premier si $p \neq 1$ et p admet deux diviseurs qui son 1 et p.

Méthode

Il y a une méthode pratique de décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Remarque

L'écriture : $120 = 2^3 \times 15$ n'est pas une décomposition de 120 en produit de facteurs premiers car 15 n'est pas premier.

1 DÉFINITIONS ET RÈGLES

9 Diviseurs communs de deux nombres

Définition On dit qu'un nombre entier naturel d est un diviseur commun des deux nombres a et b si d est un diviseur de chacun d'eux.

Exemples et applications

- – Les diviseurs de 12 sont **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 12.
  – Les diviseurs de 18 sont **1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18.
  – Les nombres 1, 2, 3, 6 sont les diviseurs communs des deux nombres 12 et 18.
- Déterminer les diviseurs communs des deux nombres 18 et 150.

10 Plus grand diviseur commun de deux nombres

Définition Le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers naturels a et b est le plus grand entier parmi les diviseurs communs des nombres a et b ; on le note généralement $a \wedge b$ ou $\Delta(a; b)$.

Exemples et applications

- – Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, **6**, 10, 15, 30.
  – Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, **6**, 12.
  – Le plus grand diviseur commun des deux nombres 30 et 12 est 6 ;
  donc : $30 \wedge 12 = 6$ $[\Delta(30; 12) = 6]$
- Déterminer $15 \wedge 75$; $13 \wedge 14$; $27 \wedge 36$.

11 Multiples communs de deux nombres

Définition Ont dit qu'un nombre entier naturel m est un multiple commun des deux nombres a et b si m est un multiple de chacun d'eux.

Exemples et applications

- 36 est un multiple commun de 6 et 4 (car $36 = 9 \times 4$ et $36 = 6 \times 6$).
- Déterminer les multiples communs des nombres 25 et 15, et qui sont inférieurs à 200.

12 Plus petit multiple commun de deux nombres

Définition Le plus petit multiple commun de deux nombres entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b ; on le note généralement $a \vee b$ ou M(a; b).

- • Les multiples non nuls de 4 sont 4, 8, **12**, 16, 20, ...
  • Les multiples non nuls de 6 sont 6, **12**, 18, 24, 30, ...
  • Le nombre 12 est le plus petit multiple non nul de 4 et 6 ; donc $6 \vee 4 = 12$.
- Déterminer $15 \vee 25$, $24 \vee 18$ et $5 \vee 7$.

Commentaire

d est un diviseur commun de a et b s'il existe deux nombres entiers naturels k et k' tels que :
$a = kd$ et $b = k'd$

Remarque

1 est un diviseur commun à deux entiers naturels quelconques.

Note terminologique

Le plus grand diviseur commun des nombres 11 et 4 est 1
On dit que 11 et 4 sont premiers entre eux.

Formulation littérale

m est un multiple commun des nombres a et b signifie que
$m = ka = k'b$
où k et k' sont des nombres entiers naturels

1 POINTS ESSENTIELS

1 Nombres pairs et nombres impairs

a est un nombre entier naturel.

a est un nombre pair	a s'écrit sous la forme	$a = 2k$ où k est un entier naturel
a est un nombre impair	a s'écrit sous la forme	$a = 2k + 1$ où k est un entier naturel

2 Multiples d'un nombre entier naturel

m est un nombre entier naturel.

m est multiple du nombre entier naturel b	signifie	$m = kb$ où k est un entier naturel

3 Diviseurs d'un nombre entier naturel

d est nombre entier naturel.

d est un diviseur du nombre b	signifie	$b = kd$ où k est un entier naturel

4 Nombres premiers

p est un nombre entier naturel.

p est premier	signifie	p a exactement deux diviseurs 1 et p

5 Plus grand diviseur commun de deux nombres

d, a et b sont des entiers naturels.

d est le plus grand diviseur commun de a et b	signifie	d divise a, d divise b d est le plus grand parmi les diviseurs de a et b

6 Plus petit multiple commun de deux nombres

m, a et b son des entiers naturels.

m est le plus petit multiple commun de a et b	signifie	m est un multiple de a et de b m est le plus petit multiple non nul de a et b

7 Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers

1 EXERCICES RESOLUS

1 Parité et imparité

Soient m et n deux nombres entiers naturels tels que m > n.

1) Montrer que m – n est m + n ont la même parité.

2) Déterminer les nombres entiers naturels x et y qui vérifient :

$$x^2 - y^2 = 12$$

Commentaire

- Noter que si la somme de deux nombres est un nombre pair, alors ces deux nombres sont de même parité ; et si leur somme est un nombre impair, alors ils sont de parités différentes.
- Remarquer que : (m + n) + (m – n) = 2m.

Solution

1) Supposons que m – n est pair.

Donc il existe un nombre entier naturel k tel que m – n = 2k

Or (m + n) + (m – n) = 2m ; par conséquent

m + n = 2m – (m – n) = 2m – 2k

c'est-à-dire m + n = 2(m – k)

Il s'ensuit que m + n est pair.

De la même façon, on établit que si m – n est impair, alors m – n est impair.

2) Déterminons x et y tels que : $x^2 - y^2 = 12$

$x^2 - y^2 = 12$ signifie $(x - y)(x + y) = 12$

Comme 1 × 12 = 2 × 6 = 3 × 4 = 12,

$x - y \leq x + y$ et $(x - y)$ et $(x + y)$ ont la même parité,

alors : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

2 Plus grand diviseur commun de deux nombres et décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Une place publique est rectangulaire de dimensions en mètres 240 et 320.

La commune décide de placer des poteaux électriques le long du périmètre de la place de telle sorte qu'un poteau soit posé dans chaque coin de la place et que les poteaux soient séparés par la même distance.

1) Quelle est la plus grande distance qui doit séparer deux poteaux sachant que la distance entre deux poteaux est un nombre entier naturel.

2) Quel est le nombre de poteaux nécessaires à l'éclairage de la place dans ce cas ?

3) Quelles sont les distances supérieurs à 15 mètres que peut laisser la commune entre deux poteaux successifs ? Calculer, dans chaque cas, le nombre de poteaux nécessaires à l'opération.

Commentaire

Noter que la distance entre deux poteaux est un diviseur commun des deux nombres 240 et 320.

Solution

1) La plus grande distance que l'on peut laisser entre deux poteaux consécutifs est le plus grand diviseur commun des nombres 240 et 320.

Or $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

et $320 = 2^6 \times 5$

par conséquent $320 \wedge 240 = 80$

d'où : la plus grande distance que l'on peut laisser entre deux poteaux consécutifs est 80m

2) Le périmètre de la place est [(240 + 320) × 2]m

c'est-à-dire 1120m.

Le nombre de poteaux nécessaires à l'éclairage, dans le cas où la distance entre deux poteaux consécutifs est 80m, vaut 1120 : 80, c'est-à-dire 14 poteaux.

3) Les diviseurs communs des nombres 240 et 320 sont :

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

Les distances supérieures à 15m que peut laisser la commune entre deux poteaux consécutifs sont :

16m, 20m, 30m, 40m ou 80m.

a) Si on laisse 16m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 16 = 70

b) Si on laisse 20m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 20 = 56

c) Si on laisse 40m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 40 = 28

d) Si on laisse 80m entre deux poteaux, on sait, d'après la question 2), que le nombre de poteaux nécessaires est : 14.

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Nombres pairs et impairs

1 1) Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs par les nombres suivants :

$77^3 + 33^3$; $15^{33} + 3^3$; $491 + 493$

$11^3 - 6^3$; $15^3 - 3^3$; 731×432

$88^3 + 53^3$; 1234567×200002

2 soit n un nombre entier naturel.

Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs parmi les nombres suivants :

$8n + 6$	$8n + 7$	$4n + 2$	$2n + 3$
$10n + 5$		$(2n + 1) - (2n - 1)$	
$(n + 2)(n + 3)$		$2n^2 + 4n + 5$	
$(2006)^2 n^2 + (2005)^2$		$(2n + 1)^2 - 4n - 1$	

3 x est un nombre entier pair, y est un nombre entier naturel.

1) Que peut-on dire de la parité de y dans chacun des deux cas suivants :

a) $x + y$ est pair ; b) $x + y$ est impair

2) Montrer que xy est pair, quel que soit le nombre entier y.

4 Soit n un nombre entier naturel.

Montrer que les nombres suivants sont des nombres impairs :

$A = n^2 + 13n + 17$

$B = n^3 - n + 1$

$C = (2n + 2)^2 - (2n + 1)^2$

5 Soit m un nombre entier naturel.

a) Montrer que si m est pair, alors m^2 est pair.

b) Montrer que si m est impair, alors m^2 est impair.

c) Si m^2 est pair, montrer que m est pair.

d) Si m^2 est impair, montrer que m est impair.

Multiples et diviseurs

6 1) Montrer que 231 es un multiple de 33.

2) Montrer que 231 es un multiple des nombres 7, 21 et 77.

7 Montrer que le nombre a est un multiple du nombre b dans chacun des cas suivants :

1) a = 3333 et b = 33.

2) a = 142128 et b = 7.

3) $a = 7^3 + 3^3$ et b = 10.

4) $a = 8^3 + 5^3$ et b = 13.

8 Soient x, y, et z des nombres entiers naturels tels que :

- x est multiple de y.
- y est un multiple de z.

Que peut-on dire de x^2 et z^2 ?

9 Soit A un nombre de deux chiffres : $A = \overline{xy}$

(A est le nombre dont le chiffre des dizaines est x et dont le chiffre des unités est y)

Soit B le nombre dont le chiffre des unités est x et dont le chiffre des dizaines est y : $B = \overline{yx}$

Montrer que : A + B est divisible par 11.

10 a) Montrer que 120 × 28 est multiple de 5 × 24.

b) Montrer que 15 × 750 est un multiple de $25^2 \times 3$.

Plus petit multiple commun
Plus grand diviseur commun

11 Calculer le plus petit multiple commun des nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) a = 7 et b = 35.

2) a = 6 et b = 18.

3) a = 25 et b = 100.

4) a = 12 et b = 4.

12 Calculer $x \wedge y$ dans chacun des cas suivants :

1) $x = 5$ et y = 2.

2) $x = 8$ et y = 5.

3) $x = 3$ et y = 4.

4) $x = 13$ et y = 10.

13 Calculer le plus grand diviseur commun des nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) $a = 7$ et $b = 21$
2) $a = 6$ et $b = 30$
3) $a = 2$ et $b = 12$
4) $a = 20$ et $b = 80$

14 1) Calculer $x \vee y$ et $x \wedge y$ dans chacun des cas suivants :

a) $x = 13$ et $y = 17$
b) $x = 3$ et $y = 4$
c) $x = 5$ et $y = 15$
d) $x = 25$ et $y = 50$

2) Comparer $(x \vee y)(x \wedge y)$ et xy dans chaque cas précédent.

15 1) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres x et y dans chacun des cas suivants :

a) $x = 540$ et $y = 336$
b) $x = 252$ et $y = 315$
c) $x = 14$ et $y = 26$

2) Déterminer Tous les diviseurs communs des deux nombres 540 et 336, puis des deux nombres 252 et 315.

16 1) Décomposer les deux nombres 1386 et 4620 en produit de facteur premiers.
2) En déduire le plus petit multiple commun des deux nombres 1386 et 4620.

17 1) Décomposer les deux nombres 2520 et 3150 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire le plus grand diviseur commun des deux nombres 2520 et 3150.

Nombres premiers

18 a) Le nombre 1 n'est pas premier. Pourquoi ?
b) Le nombre 0 est-il premier ? Pourquoi ?

19 a) Combien existe-t-il de nombres pairs et premiers ?
b) Combien existe-t-il de nombres multiples de 7 et premiers ?

20 Déterminer tous les nombres entiers naturels premiers et plus petits que 20.

21 a) Est-ce-que tout nombre impair est premier ? Pourquoi ?
a) Est-ce-que tout nombre premier est impair ? Pourquoi ?

Exercices de renforcement des apprentissages

Nombres pairs et impairs

22 soit x un nombre entier naturel.

1) Développer $(x+1)^2 - x^2$.
2) En déduire que tout nombre impair est la différence de deux carrés consécutifs.
3) Ecrire 17 et 2005 comme différence de deux carrés consécutifs.
4) Ecrire $n^2 + n + 7$ comme différence de deux carrés consécutifs, après avoir vérifié que $n^2 + n + 7$ est un nombre impair.

23 Soit n un entier naturel.

On pose : $A = (-1)^n + (-1)^{n+2} + 2$

Calculer A selon la parité de n.

24 a, b et c sont des nombres entiers naturels.

On pose : $E = (-1)^a + (-1)^b + (-1)^c + 3$.

Dans quel cas a-t-on :

1) $E = 0$? ; 2) $E = 1$?
3) $E = 2$? ; 4) $E = 3$?
5) $E = 4$? ; 6) $E = 5$? ; 7) $E = 6$?

25 Soit n un nombre entier naturel.

On pose : $F = n(n+1) + (n+1)(n+2) + (n+2)n$.

1) Montrer que si n est pair, alors F est pair.
2) Montrer que si n est impair, alors F est impair.

Multiples et diviseurs

26 Le nombre entier naturel N de trois chiffres, dont le chiffre des unités est z, dont le chiffre des dizaines est y et dont le chiffre des centaines est x, sera désigné par : $N = \overline{xyz}$

On a alors : $N = \overline{xyz} = z + 10y + 100x$

1) Montrer que si $\overline{xyz} > \overline{zyx}$, alors $\overline{xyz} - \overline{zyx}$ est un multiples de 99.
2) Montrer qui si $x + y + z = 9$, alors $\overline{xyz}$ est divisible par 9.
3) Montrer que si $y = x + z$, alors $\overline{xyz}$ est divisible par 11.

27 Mettre le chiffre convenable à la place du point pour obtenir un nombre divisible par 2 et par 9 simultanément dans chacun des cas suivants :

13•2 ; 54•• ; 6•1•

On donnera toutes les solutions possibles.

28 Mettre les chiffres convenables à la place des points pour avoir des nombres divisibles par 2 et 3 et 5 :

4•5•	6•6•	22••	5•27•

29 1) Encadrer les nombres suivants par deux multiples consécutifs du nombre 9 :

30 ; 123 ; 7 ; 49.

2) Encadrer les nombres suivants par deux multiples consécutifs de 7 :

27 ; 53 ; 102 ; 146.

30 Déterminer le nombre entier naturel n dans chacun des cas suivants :

a) $8n < 90 < 8(n+1)$.
b) $5n < 32 < 5(n+1)$.

31 Déterminer cinq multiples communs des deux nombres x et y dans chaque cas :

a) $x = 126$ et $y = 300$
b) $x = 186$ et $y = 124$
c) $x = 15$ et $y = 21$
d) $x = 27$ et $y = 18$

Plus petit multiple commun
Plus grand diviseur commun

32 1) Calculer le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun des nombres 225 et 270.
2) Diviser chacun des deux nombres 225 et 270 par 9 ; puis calculer le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des quotients obtenus des deux divisions.

Que remarque-t-on ?

33 1) Déterminer $d = 204 \wedge 170$
2) Diviser 204 et 170 par d.
3) Trouver le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun des quotients obtenus. Montrer que les quotients obtenus sont premiers entre eux.

34 On pose $a = 8 \times 9 \times 5$ et $b = 100$

1) Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$
2) a) Calculer $a^2 \wedge b^2$ et $a^2 \vee b^2$
b) Calculer $(a \wedge b)^2$ et $(a \vee b)^2$
3) Que remarque-t-on ?

35 1) Déterminer le plus petit multiple commun des nombres 9 et 15.
2) En déduire le plus petit nombre entier naturel non nul dont le reste de la division par 45 est égal à 7.

36 On considère deux nombres entiers naturels a et b tels que :

$ab = 2880$ et $a \wedge b = 24$

1) Déterminer $a \vee b$.
2) Quels sont les facteurs premiers communs aux deux décompositions, en produit de facteurs premiers, de a et b ?
3) En déduire a et b.

37 a et b sont deux nombres entiers naturels tels que :

$a \wedge b = 18$

1) Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.
2) Quels sont les facteurs premiers communs à a et b.
3) Sachant que $ab = 972$, déterminer $a \vee b$.
En déduire a et b.

38 On peut répartir les employés d'une société sur de grands bureaux de 24 employés ou sur des bureaux de 28 employés, ou sur des bureaux de 36 employés.

Déterminer le nombre d'employés de cette société sachant qu'il est compris entre 1500 et 2000.

39 Un phare, au bord de la mer, envoie un signal lumineux rouge toutes les 10 secondes et un signal lumineux vert toutes les 14 secondes.

Sachant que les deux signaux (rouge et vert) sont émis simultanément à sept heures du soir, répondre aux questions suivantes :

1) Après combien, de temps, les deux signaux seront envoyés de nouveau simultanément ?
2) Combien de fois les deux signaux seront émis simultanément entre 7h du soir et 8h 30mn du soir ?

Nombres premiers

40 Soit x un nombre entier naturel premier différent de 2.
Montrer que $x + 1$ n'est pas premier.

41 a) Citer deux nombres entiers naturels premiers différents de 2 puis calculer leur somme.
b) Cette somme est-elle un nombre premier ?
c) Soient x et y deux nombres entiers naturels premiers tels que $x \neq 2$ et $y \neq 2$.
monter que $x + y$ n'est pas premier.

42 Notons que :

$$5 = 4 \times 1 + 1$$
$$13 = 4 \times 3 + 1$$
$$17 = 4 \times 4 + 1$$

Chercher tous les nombres entiers naturels premiers plus petits que 100 et qui vérifiant la propriété précédente.

43 Déterminer tous les nombres premiers p inférieurs à 100 et qui sont tels que : p – 1 est un multiple de 6.

Exercices de synthèse

Nombres pairs et impairs

44 1) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul p, le nombre 2^p est pair.
2) Montrer que si x est un nombre entier naturel tel que $2^x = 1$, alors $x = 0$.

45 Soient x et y deux nombres entiers naturels tels que :
$x \geq 2$ et $2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844$.
1) Monter que :
$2^{x-2}(1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$
2) Montrer que $16844 - 7^{2y+1}$ est un nombre impair.
3) En déduire que $x = 2$ puis déterminer la valeur de y.

46 Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que a est pair et b impair.
Montrer qu'il n'existe pas de nombre entier relatif x tel que :
$ax + b = 0$

47 Soient a, b et c des nombres entiers naturels impairs.
1) Montrer qu'il n'existe pas de nombre entier relatif x tel que : $ax^2 + bx + c = 0$
2) Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel y tel que : $ay^2 + by + c = 0$

Multiples et diviseurs

48 1) Déterminer les diviseurs du nombre 28.
2) Montrer que la somme des inverses des diviseurs de 28, est un nombre entier naturel.

49 1) Déterminer tous les diviseurs de 15.
2) En déduire tous les nombres entiers naturels x et y qui vérifient : $(x + 3)(y + 2) = 15$
3) Déterminer tous les nombres entiers naturels x et y tels que : $xy + 3x + y = 12$

50 Déterminer deux nombres entiers naturels non nuls x et y tels que :

$$\frac{x}{y} = \frac{44}{121} \quad \text{et} \quad y - x = 357$$

51 Déterminer un nombre entier naturel n de trois chiffres tel que 3n se termine par 491.

52 Soient m et p deux nombres entiers naturels tels que $m \geq p$.
Montrer que :
a) $(m + p)^3 - p^3$ est un multiple de p.
b) $(m + p)^3 + (m - p)^3$ est un multiple de 2m.

Répartition d'élèves

53 Le nombre d'élèves dans une école est un nombre entier naturel compris entre 500 et 600.
Si on répartit les élèves en groupes de 20 élèves, il reste 7 élèves. De même, si on répartit les élèves en groupes de 36 élèves, il reste chaque fois 7 élèves.
Quel est le nombre d'élèves de l'établissement ?

De la réalité environnante

53 On veut procéder au pavage d'une salle rectangulaire de dimensions 3,6m et 4m de telle sorte que les rangées de carreaux soient parallèles aux côtés de la salle.

Sur le marché, il y a trois catégories de carreaux.
1ère catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 25cm de côté.
2ème catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 30cm de côté.
3ème catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 40cm de côté.
Quelle catégorie faut-il choisir pour que le nombre de rangées de carreaux soit un nombre entier naturel.

55 Deux règles graduées sont placées côte à côte (de telle sorte que les graduations soit l'une à côté de l'autre).
- La première règle mesure 144cm de longueur et est partagée en 48 segments de même longueur ;
- La deuxième règle mesure 160cm de longueur et est partagée en 32 segments de même longueur.

Déterminer, pour chaque règle, les graduations qui vont coïncider avec celles de l'autre règle et les numéros correspondants.

56 On veut planter des arbres sur le périmètre d'un jardin triangulaire de telle sorte que :
- Un arbre est planté à chaque sommet du triangle.
- La distance séparant deux arbres consécutifs est constante.

1) Quelle est la plus grande distance qui doit séparer deux arbres voisins sachant que les dimensions du jardin sont 42m, 70m, 98m ?
2) Quel est le nombre d'arbres que l'on peut alors planter autour du jardin ?

Avec l'environnement

57 Le long de la route à l'école, il y a quatre arbres : 430m sépare le premier et le second ; 645m sépare le second et le troisième et 516m est la distance entre le troisième et le quatrième.
Les responsables de l'environnement décident de planter d'autres arbres le long de la route de telle sorte que les arbres "voisins" soient séparés par la même distance.
1) Quelle est la distance qu'il faut laisser entre deux arbres consécutifs ?
2) Quel est le nombre de nouveaux arbres que l'on doit planter ?

Nombres premiers

58 Noter que :

$$5 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = 2^2 + 3^2$$
$$29 = 2^2 + 5^2$$

Chercher les nombres entiers naturels premiers inférieurs à 100 et qui vérifient la propriété précédente.

59 Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants :
a) 105 ; 119 ; 117 ; 113 ; 111 ; 107.
b) 201 ; 157 ; 193 ; 321 ; 247 ; 221.

60 Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres premiers :
137 ; 2223 ; 11111 ; 2003 ; 15631.

Problèmes

Notre entourage

61 On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain rectangulaire, de dimensions 90m et 72m, de telle sorte que la plantation respecte les conditions suivantes :
- Un arbre est planté à chaque coin (sommet) du terrain.
- La distance séparant deux arbres consécutifs est constante et égale à un nombre entier naturel valant au moins 2m.

a) Trouver la distance séparant deux arbres voisins.
b) Déterminer le nombre d'arbres nécessaires à l'opération.

Nombres de l'histoire

62 a) **Les nombres d'Euler** sont les nombre qui s'écrivent sous la forme $\boxed{E_n = n^2 - n + 41}$ où n est un nombre entier naturel.
Montrer que E_{40} est premier et que E_{41} n'est pas premier.
b) **Les nombres de Mersenne** sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $\boxed{M_n = 2^n - 1}$ où n est un nombre entier naturel.
Montrer que M_5 est premier et M_6 non premier.
c) **Les nombres de Fermat** sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $\boxed{F_n = 2^{2^n} + 1}$ où n est un entier naturel.
Montrer que F_4 est premier et que F_6 est divisible par 641.

Ensembles
IN ; Z ; ID ; Q ; IR

2

Capacités attendues

* Discernement des relations entre nombres et distinction des différents ensembles de nombres.
* Détermination de l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée.

Contenu

- Activités préparatoires
  - Deux nombres irrationnels
  - Opérations dans l'ensemble de nombres réels
  - Identités remarquables
  - Développement et factorisation
  - Puissances du nombre 10
  - Ecriture scientifique
- Définitions et règles
  - Différents types de nombres
  - Opérations dans IR et propriétés
  - Puissances du nombre 10
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

2 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Deux nombres irrationnels

A Supposons que $\sqrt{2}$ s'écrit sous forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux nombres entiers naturels (non nuls) et $\frac{p}{q}$ irréductible c'est-à-dire p et q sont premiers entre eux.

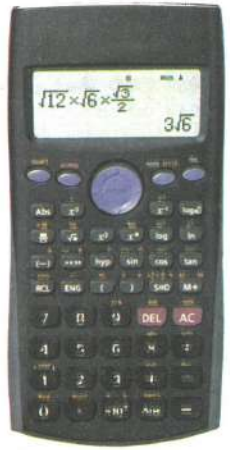
a) Vérifier que : $p^2 = 2q^2$

b) Montrer que p^2 est pair. En déduire la parité de p.

c) Montrer que q^2 est pair. En déduire la parité de q.

d) Les nombres p et q sont-ils premiers entre eux ?

e) Que peut-on en déduire ?



B a) Calculer l'expression A où :

$$A=\frac{9,801}{\sqrt{8}\left(1,103+\frac{24\times 27,493}{396^4}\right)}$$

L'expression A donne une écriture approchée du nombre π.

b) Calculer π en utilisant la calculatrice puis comparer A et π

ACTIVITE 2 Opérations dans l'ensemble des nombres réels

A Calculer puis simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

$$B=\left(-2^{-1}+5\right)^{-1}\times\left(\frac{2}{5}-1\right)^{-2}$$

$$C=2\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{10}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$D=\frac{\sqrt{4,9\times 10^3}}{\sqrt{3\times 10^2}\times\sqrt{12\times 106}}$$

B 1) Calculer $A=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{-1}$

2) On considère les deux expressions : $B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

a) Montrer que B et C sont deux nombres entiers naturels.

b) Vérifier que $A\sqrt{6}-\sqrt{10B}=18$

ACTIVITE 3 Identités remarquables

A 1) Construire un segment de longueur $\sqrt{5}$

2) On pose $a=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)$ et $b=3-\sqrt{6}$

a) Calculer a^2 et b^2.

b) Montrer que a^2+b^2 est un nombre entier naturel.

3) On considère un triangle ABC rectangle en A tel que BC = a et AC = b.
Calculer AB.

B Sans trop de calculs, montrer que :

- $2^{64}-1=255\,(2^8+1)\,(2^{16}+1)\,(2^{32}+1)$
- $(333333)^2+(444444)^2=(555555)^2$
- $(499999)^2+999999=25\times10^{10}$
- $(999999)^2+(2000)^2=(1000001)^2$

ACTIVITE 4 Développement et factorisation

A Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $(x+1)(x+2)=x(x+3)+2$

2) On pose $a=(x+1)(x+2)$

a) Montrer que : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(a-1)^2$

b) En déduire que : $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+3\right)+1=9\left(2+\sqrt{5}\right)^2$

B a, b et c sont des nombres réels.

1) Montrer que :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

2) a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle tels que $a^3+b^3+c^3=3abc$
Quelle est la nature du triangle ABC ?

ACTIVITE 5 Puissances du nombre 10

Ecrire les nombres suivants sous la forme $a.10^n$ où n est nombre entier relatif et a un nombre rationnel.

$A=0,05\times0,0006$	$B=(0,05)^2\times(0,02)^2\times10^{-7}$
$C=10^{-8}\times(0,006)^{-4}$	$D=(0,00004)^{11}\times\frac{1}{5}$

ACTIVITE 6 Ecriture scientifique

Selon les statistiques de 1996, l'aire des terres désertiques est estimée à $35264\times10^3km^2$.

Chaque année, les terres agricoles désertifiées sont estimées à 5,5 millions d'hectares.

Si la désertification continue sur ce rythme, quelle sera l'aire des terres désertiques après dix ans ? Donner le résultat sous forme d'écriture scientifique.

1 Différents types de nombres

1 Les nombres entiers naturels forment un ensemble que l'on note **IN**.

On écrit : IN = { 0, 1, 2, 3, 4, ..., 1924, ..., 3000, ...}

→ Les nombres entiers naturels sont les éléments de l'ensemble IN.

Exemples et applications

- 16 est un élément de l'ensemble IN. On peut exprimer cette phrase en disant que "16 appartient à IN". On écrit $16 \in$ IN.
- -16 n'est pas un élément de IN c'est-à-dire "-16 n'appartient pas à IN". On écrit $-16 \notin$ IN.

2 Les nombres entiers relatifs forment un ensemble que l'on note $\mathbb{Z}$.

On écrit : $\mathbb{Z} = \{ ...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

→ Les nombres entiers relatifs sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
→ Si $n \in$ IN, alors $-n \in \mathbb{Z}$.
→ Tout élément de IN est un élément de $\mathbb{Z}$.
→ On dit que IN est une partie de $\mathbb{Z}$ ou que IN est inclus dans $\mathbb{Z}$.
→ On écrit : IN $\subset \mathbb{Z}$.

Exemples et applications

- Parmi les nombres suivants, déterminer les éléments qui appartient à IN :

  $1,5 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad \sqrt{9}$
- -16 est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-16 \in \mathbb{Z}$.
- 16,3 n'est pas un élément de $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $16,3 \notin \mathbb{Z}$.

3 Les nombres décimaux forment un ensemble que l'on note **ID**.

On écrit : ID $= \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \text{IN} \right\}$

→ Les nombres décimaux sont les éléments de l'ensemble ID.

Exemples et applications

- Parmi les nombres suivants, déterminer les éléments décimaux : $\frac{1}{3}$; 3 ; $\frac{7}{0,5}$; $-0,002$.
- 12,5 appartient à ID puisque $12,5 = \frac{125}{10}$.
- Si a est un nombre entier relatif, alors a s'écrit sous la forme $a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0}$; donc a est un nombre décimal.

  Ainsi tout élément de $\mathbb{Z}$ est un élément de ID. D'ou : $\mathbb{Z} \subset$ ID.
- $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal c'est-à-dire $\frac{1}{3} \notin$ ID.

4 Les nombres rationnels forment un ensemble que l'on note **Q**.

On écrit : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \ ; \ b \neq 0 \right\}$

→ Les nombres rationnels sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Elément d'un ensemble

• La proposition «a est un élément de l'ensemble IN» signifie que «a est un nombre entier naturel».

Le symbole ∈

• Le symbole ∈ se lit «appartient à» ou «élément de»

• La notation $a \in$ IN signifie que a est un nombre entier naturel.

• La notation $n \notin$ IN signifie que b n'est pas un nombre entier naturel.

Le symbole ⊂

• Le symbole ⊂ se lit «inclus» ou «partie de».

• Le symbole ⊄ se lit «n'est pas inclus»

Nombre irrationnel

$\sqrt{2}$ est un nombre qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Il existe d'autres nombres irrationnels ; par exemple $\sqrt{3}$; π ; ...

Exemples

- $\frac{1}{3}$ et $\frac{-2}{7}$ sont des nombres rationnels c'es-à-dire $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{-2}{7} \in \mathbb{Q}$.
- Tout nombre décimal s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^p}$ (où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in$ IN).

  et appartient donc à $\mathbb{Q}$ (en prenant $b = 10^p$). Donc ID $\subset \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5 Les nombres réels forment un ensemble que l'on note **IR**.

IR est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels c'est-à-dire des nombres qui permettent de mesurer les longueurs et les opposés de ces nombres

→ Le nombres réels sont les éléments de l'ensemble IR.

Exemples

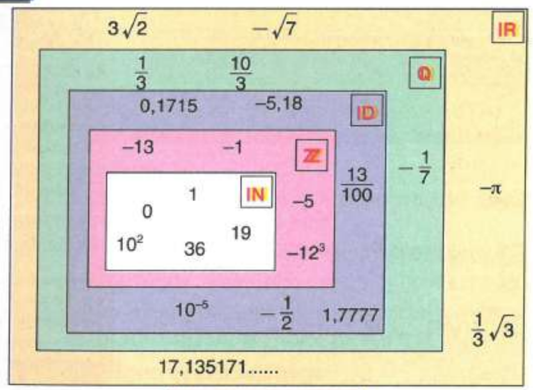
- $\sqrt{2}$ est un élément de IR c'est-à-dire $\sqrt{2} \in$ IR.

  π est un élément de IR et π n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire π est irrationnel.

  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ est un élément de IR.

  Tout élément de $\mathbb{Q}$ est un élément de IR c'est-à-dire $\mathbb{Q} \subset$ IR

Conclusion



IN $\subset \mathbb{Z} \subset$ ID $\subset \mathbb{Q} \subset$ IR

2 Opérations dans IR et propriétés

1 **Règle fondamentale de développement et de factorisation.**

Soient a, b et c des nombres réels. On a :

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

Nombre réel

a nombre réel

a rationnel ou a irrationnel

Récapitulation

IN $\subset \mathbb{Z} \subset$ ID $\subset \mathbb{Q} \subset$ IR

Remarque

Les nombres irrationnels n'ont pas d'écriture uniformisée (comme les nombres décimaux ou rationnels)
Ces nombres sont connus seulement par leurs propriétés.

Autre appellation

Cette règle est appelée distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemples

Développement

- $3(2x + 5y) = 3 \times 2x + 3 \times 5y$
  $= 6x + 15y$
- $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x - 4y\right) = -\sqrt{2} \times \sqrt{3}\,x + \sqrt{2} \times 4y$
  $= -\sqrt{6}\,x + 4\sqrt{2}\,y$

Factorisation

- $13x + 26 = 13 \times x + 13 \times 2$
  $= 13 \times (x + 2)$
- $4(x - 2) + (x - 3)(x - 2) = (x - 2)[4 + (x - 3)] = (x - 2)(x + 1)$

Conséquences

Pour tous a, b, c et d de IR, on a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

Quels que soient les réels a et b, on a :

carré d'une somme	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
carré d'une différence	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
différence de deux carrés	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Exemples

Développement

- $(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a) \times 3 + 3^2$
  $= 4a^2 + 12a + 9$
- $(7a - 3b)^2 = (7a)^2 - 2(7a)(3b) + (3b)^2$
  $= 49a^2 - 42ab + 9b^2$
- $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$
  $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 3 - 2 = 1$

Factorisation

- $81x^2 - 49 = (9x)^2 - 7^2$
  $= (9x - 7)(9x + 7)$
- $x^2 + 2x - y^2 + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2$
  $= (x + 1)^2 - y^2$
  $= (x + 1 - y)(x + 1 + y)$

Il y a d'autres identités que l'on peut déduire de la règle fondamentale.

Remarque

Développement
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
Factorisation

Cette règle nous permet le développement et la factorisation.

Propriétés

- **Pour tous a et b de IR :** $a + b = b + a$ et $ab = ba$
  On dit que + et × sont commutatives dans IR.
- **Pour tous a, b et c de IR :** $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(ab)c = a(bc)$.
  On dit que + et × sont associatives.

Sommes algébriques

Lors du calcul d'une somme algébrique, on peut enlever les parenthèses précédées du signe – à condition de changer les signes des termes intérieurs à ces parenthèses.

Commentaire important

On utilise les identités remarquables :
- **pour développer et factoriser.**
- **pour faire un calcul mental ou réfléchi.**

Par exemple : $19^2 = (20 - 1)^2$

Quels que soient les réels a et b, on a :

cube d'une somme	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
cube d'une différence	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
différence de deux cubes	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
somme de deux cubes	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemples et applications

- $8x^3 - 27 = (2x)^3 - (3)^3$
  $= (2x - 3)((2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2)$
  $= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
- $\left(x+\sqrt{2}\right)^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{2} + 3x\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3$
  $= x^3 + 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$
- Factoriser l'expression $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

3 Puissances du nombre 10

Définition Soit n un nombre entier naturel. On a :

$10^n = 1\underbrace{000..0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,000...0}_{n \text{ zéros}}1$

(Exemple : $10^4 = 10000$ et $10^{-4} = 0,0001$)

Ecriture scientifique

Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \le a < 10$ et p un entier relatif.

Exemples :
- L'écriture scientifique du nombre 0,00028 est $2,8 \times 10^{-4}$
- L'écriture scientifique du nombre 11,0001 est $1,10001 \times 10^1$

Remarque : Si le nombre est négatif, alors son écriture scientifique est :
$-a \times 10^p$ où $a \in ID$ et $1 \le a < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$

Ecriture scientifique et calculatrice

La quasi-totalité des calculatrices utilise l'écriture scientifique lorsqu'elles affichent des nombres décimaux (à condition que l'exposant soit compris entre –99 et 99).

- Le nombre 208,12 dont l'écriture scientifique est $2,0812 \times 10^2$ est affiché par la calculatrice :
  – soit sous la forme $\boxed{2,0812 \quad ^{02}}$ – soit sous la forme $\boxed{2,0812 \times 10^2}$
- Le nombre 0,0079 qui s'écrit $7,9 \times 10^{-3}$ sous forme scientifique est affiché par la calculatrice :
  – soit sous la forme $\boxed{7,9 \quad ^{-03}}$ – soit sous la forme $\boxed{7,9 \times 10^{-3}}$

Conséquence

On peut déduire le développement de $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$ en remarquant que :
$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$
$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$

Domaine d'utilisation des puissances de 10

- **Les puissances de 10 sont utilisés dans l'écriture des nombres décimaux dont les valeurs sont soit très grandes (astronomiques) ou très petites (microscopiques).**

Exemples :
- **La distance entre le soleil et la planète mars est $2,28 \times 10^8$km au lieu de 228000000**
- **Le temps qu'il faut à un ordinateur pour calculer une somme est de l'ordre de $4,8 \times 10^{-9}$s au lieu de 0,000 000 0048s.**

Ordre de grandeur

- **Le nombre a peut s'écrire $a = e + d$ où $e \in IN$, $1 \le e < 10$ et $d \in ID$ vérifie $0 \le d \le 1$**
- **Le nombre $e.10^p$ est appelé ordre de grandeur de $a.10^p$**
- **L'ordre de grandeur permet de prévoir le nombre de chiffres du résultat et de donner ainsi une approximation préalable de ce résultat.**

2 POINTS ESSENTIELS

Différents types de nombres

IN	$\mathbb{Z}$	ID	$\mathbb{Q}$	IR
Nombres entiers naturels	Nombres entiers relatifs	Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres réels
$2 \in \mathbb{N}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$	$-2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$	$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\pi \in \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Identités remarquables

Pour tous réels a et b, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ecriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où $a \in \mathbb{D}$, $1 \le a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$

2 EXERCICES RESOLUS

1 Identités remarquables

Soient x et y deux élément de IR.

1) Montrer que si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$

2) Trouver tous les nombres réels a et b qui vérifient :

$$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$$

Commentaire

- Remarquer que pour tous réels x et y :
  - → $x^2 \ge 0$
  - → Si ($x \ge y$ et $y \ge x$), alors $x = y$
- Dans certaines situations de calcul, on doit penser à transformer l'écriture des expressions en question avant de procéder aux opérations algébriques (factorisation, identités remarquables,...) permettant de simplifier les calculs.

Solution

1) On suppose que $x^2 + y^2 = 0$. Donc $x^2 = -y^2$

Or $x^2 \ge 0$, par conséquent $-y^2 \ge 0$; donc $y^2 \le 0$.

Ainsi ($y^2 \le 0$ et $y^2 \ge 0$) ; donc $y^2 = 0$; d'où $y = 0$

Il s'ensuit que $x^2 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$.

Finalement : Si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$

2) Déterminons tous les réels a et b tels que :

$$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$$

$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$ signifie

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2a + 1 = 0$$

(changement d'écriture et décomposition de l'expression)

Donc : $(a-b)^2 + (a+1)^2 = 0$.

D'après la question précédente, en prenant $x = a - b$ et $y = a + 1$, on en déduit $a - b = a + 1 = 0$

D'où : $a = b = -1$

Il est aisé de vérifier qu'en prenant $a = -1$ et $b = -1$, la relation proposée est satisfaite.

2 Simplification d'écriture

On considère les nombres A et B tels que :

$$A = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$$

1) Montrer que AB = 1

2) On pose $x = A + B$ et $y = A - B$

a- Calculer x^2 et y^2.

b- En déduire des écritures simplifiées de x et y.

3) Déterminer une écriture simplifiée de chacun des nombres A et B.

Commentaire

Dans certaines situations, pour simplifier des expressions, surtout celles comportant des racines carrées, on utilise le passage au carré.

Ainsi si a et b sont deux réels de même signe tels que $a^2 = b^2$, alors $a = b$.

(Notons que $a^2 = b^2$ n'entraîne pas nécessairement que $a = b$).

Solution

1) Montrons que AB = 1

On a : $AB = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}} \times \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$

$$= \sqrt{\left(19 + 6\sqrt{10}\right)\left(19 - 6\sqrt{10}\right)}$$
$$= \sqrt{(19)^2 - (6\sqrt{10})^2}$$
$$= \sqrt{361 - 360} = \sqrt{1} = 1$$

Donc : AB = 1

2) a- Calculons x^2 et y^2

On a : $x^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$x^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 2 + 19 - 6\sqrt{10}$

Donc : $\boxed{x^2 = 40}$

On a : $y^2 = (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$y^2 = 19 + 6\sqrt{10} - 2 + 19 - 6\sqrt{10}$

Donc : $\boxed{y^2 = 36}$

b- Simplification de x et y

On a : $x^2 = 40$ et $x > 0$; donc $x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

On a : $y^2 = 36$ et $y > 0$; donc $y = 6$

3) Simplification de A et B.

On a $\begin{cases} x = 2\sqrt{10} \\ y = 6 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} A + B = 2\sqrt{10} & (1) \\ A - B = 6 & (2) \end{cases}$

- En additionnant les égalités (1) et (2) membre à membre, on obtient : $2A = 6 + 2\sqrt{10}$ d'où : $A = 3 + \sqrt{10}$
- Par ailleurs : $B = A - 6$. Donc : $B = -3 + \sqrt{10}$

Remarque : On peut simplifier A et B en notant que :

$$\begin{cases} 19 + 6\sqrt{10} = 9 + 2 \times 3\sqrt{10} + 10 = \left(3 + \sqrt{10}\right)^2 \\ 19 - 6\sqrt{10} = 9 - 2 \times 3\sqrt{10} + 10 = \left(-3 + \sqrt{10}\right)^2 \end{cases}$$

Exercices d'application

Nature des nombres

1 Recopier puis compléter en utilisant l'un des symboles $\in$ ou $\notin$.

1) $-12 \dots \mathbb{N}$; $-12 \dots \mathbb{Z}$; $-12 \dots \mathbb{Q}$
2) $37{,}9 \dots \mathbb{N}$; $37{,}9 \dots \mathbb{Z}$; $37{,}9 \dots \mathbb{Q}$
3) $\frac{95}{19} \dots \mathbb{N}$; $\frac{95}{19} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{95}{19} \dots \mathbb{Q}$
4) $\frac{7}{11} \dots \mathbb{N}$; $\frac{7}{11} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{7}{11} \dots \mathbb{Q}$

2 **Vrai ou faux !**

1) $-3 \in \mathbb{N}$; $-3 \in \mathbb{Z}$; $-3 \in \mathbb{Q}$; $-3 \in \mathbb{R}$
2) $7 \in \mathbb{N}$; $7 \in \mathbb{Z}$; $7 \in \mathbb{Q}$; $7 \in \mathbb{R}$
3) $-1{,}4 \in \mathbb{N}$; $-1{,}4 \in \mathbb{Z}$; $-1{,}4 \in \mathbb{Q}$; $-1{,}4 \in \mathbb{R}$
4) $0 \in \mathbb{N}$; $0 \in \mathbb{Z}$; $0 \in \mathbb{Q}$; $0 \in \mathbb{R}$

3 Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres décimaux :

$-0{,}0093$; $\frac{37}{49}$; 3 ; $3{,}14$; $\frac{19}{665}$; $\sqrt{47{,}61}$

4 Pour les nombres suivants, déterminer le "plus petit" ensemble de nombres auquel ils appartiennent (Est-ce $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$?)

1) $3{,}77$; $\frac{32}{12}$; $-\frac{155}{5}$; $\frac{-\sqrt{49}}{8}$
2) $\frac{-28\pi}{-4\pi}$; $\frac{\pi+2}{\pi+4}$; $\frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{39}}$; $\frac{-7{,}15}{5}$
3) $-4\sqrt{5}+20$; 10^{-7} ; -10^{7} ; $(5\sqrt{3}-2)^{2}$
4) -29 ; $1{,}37$; $\sqrt{13}$; 3π
5) $-\frac{29}{5}$; $\frac{3{,}14\,1593}{\pi}$; $\frac{969}{57}$; $\frac{\sqrt{1156}}{2}$
6) $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{343}}$; $-4{,}7 \times 10^{3}$; $\frac{1{,}111\,11111}{9}$

3 **Equation particulière**
Déterminer tous les nombres entiers naturels x et y tels que :

$$\frac{x}{2}-\frac{3}{y}=1$$

Opérations dans IR

6 Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

1) $A=\frac{5}{3}-\frac{5}{6}-0{,}75-\frac{1}{3}\left(3-\frac{3}{4}\right)$

2) $B=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\left(7-\frac{57}{19}\right)$

3) $C=\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

4) $D=\left(\dfrac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right):\left(\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$

pour n = 2, puis pour n = 3, puis pour n = 4.

5) $E=\frac{12{,}95}{60{,}84}-19+\frac{60{,}84}{12{,}95}+\frac{4\,072\,900}{19}$

7 Calculer la valeur numérique de x dans chacun des cas suivants :

1) $\frac{x}{3}=\frac{6}{7}$; 2) $\frac{4{,}5}{x}=\frac{-5}{3{,}4}$

3) $\frac{7}{4{,}2}=\frac{x}{34}$; 4) $\frac{9{,}3}{0{,}3}=\frac{7{,}5}{x}$

5) $\frac{a}{3{,}5}=\frac{x}{a^2}$; 6) $\frac{\sqrt{9{,}5}}{b}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{19}}}$

où a et b sont deux nombres réels non nuls.

8 Déterminer x dans chaque cas :

1) $\frac{x}{7}=\frac{119}{49}$; 2) $\frac{371}{2809}=\frac{399}{x}$; 3) $\frac{169}{x}=\frac{x}{196}$

9 Soient x et y deux nombres entiers naturels premiers entre eux tels que : $\frac{1001}{5577}+\frac{285}{665}=\frac{x}{y}$

Calculer $x+y$

10 a, b, c sont des réels tels que $abc \neq 0$
Si $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, calculer c en fonction de a et b

11 Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que :
$(a-b)(3a-2b)=2ab$
1) Montrer que $a \neq b$ et $a \neq -b$
2) Calculer $\frac{a+b}{a-b}$

12 Calculer le nombre réel α sachant que :

$$2=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\alpha}$$

13 Calculer x sachant que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+x=2$$

14 Déterminer n de $\mathbb{N}^*$ dans chaque cas :

1) $7-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}\right)=\frac{n}{64}$

2) $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{5-\frac{1}{6}}}}=\dfrac{10(2n-3)}{43n}$

15 Soient x, y et z des nombres réels non nuls tels que :

$$(13x+y)(13x+z)=169x(x+1)+yz$$

Calculer $y+z$

16 Soient x et y deux nombres réels non nuls tels que :

$$x+y \neq 0 \quad \text{et} \quad x-y \neq 0$$

Simplifier l'expression :

$$E=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}-\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

17 Soient x et y deux réels tels que :

$$x+y \neq 0 \quad \text{et} \quad x+y+1 \neq 0$$

Simplifier l'expression suivante :

$$F=\left(1+\frac{1}{x+y}\right)\left(1-\frac{1}{x+y+1}\right)$$

18 Soit x un nombre réel différent de 1 et de 2.

Simplifier l'écriture de l'expression :

$$G=\frac{1}{x-1}-\frac{1-\frac{1}{x-2}}{1+\frac{1}{x-2}}$$

19 Soient x et y deux nombres réels non nuls et distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}=\dfrac{y}{x}$

b) Calculer la valeur du nombre H tel que :

$$H=\frac{-1+\frac{1}{1+\sqrt{5}}}{1+\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$$

20 Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$(x+1)(y-1)+1 \neq 0$$

On pose : $a=\frac{x+2}{xy-x+y}$ et $b=\frac{(x+1)y}{xy-x+y}$

Monter que : $(x+1)(a-b+1)=a+b-1$

21 soient x et y deux nombres réels non nuls tels que :

$$x \neq y \quad \text{et} \quad 2005(x+y)=1$$

1) Montrer que : $\frac{1}{xy}=2005\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

2) Calculer la valeur de l'expression I suivante :

$$I=\frac{y}{y-x}-\frac{y-x}{y}-\frac{x}{y-x}-\frac{y-x}{x}+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+2$$

Puissances

22 Simplifier les écritures suivantes :

$A=\dfrac{8^{93}\times 3^{-51}}{9^{25}\times 2^{280}}$; $B=\left(\dfrac{5^7\times 2^{-5}}{8\times 625}\right):\left(\dfrac{10^3\times 5^2}{56}\right)$

$C=\dfrac{(3^7\times 2^{-6}\times 9^{-1})^2}{(9^{-2}\times 3^2\times 2^{-1})^3}$; $D=\left(\dfrac{5^8}{10^2\times 2}\right)\left(\dfrac{2^3\times 5^{-3}}{4\times 25}\right)^2$

23 Soient x, y et z des nombres réels non nuls.
Simplifier les expressions suivantes et donner le résultat sous forme de produit ou de quotient de puissances à exposants positifs :

1) $X=\dfrac{(x^2y)^{-3}\times z^2}{xy^{-3}}$; 2) $Y=\dfrac{-x^2\times zy^{-1}}{xy}$

3) $Z=\dfrac{(-x)^2\times 2y}{2y^{-1}}$; 4) $T=\dfrac{(x^2y)^{-3}z^5x^4}{x(yz^2)^2y^{-1}}$

5) $W=\dfrac{(2y)^5\times 7x^{-2}}{(xy)^5}$; 6) $U=\dfrac{(-x)^5yz^{-2}}{y^3(-z)^{-3}x^2}$

Ecriture scientifique

24 Ecrire les nombres suivants sous forme d'écriture scientifique :

$a=3600\times 20\,000$; $b=5\,000\times 0{,}000\,05$

$c=13\times 10^{-7}\times 0{,}04$; $d=\dfrac{720\times 10^5}{0{,}000\,002}$

En physique

25 Ecrire les constantes universelles sous forme d'écriture scientifique :

$c = 299\,792\,458$; $e = 1602{,}1892 \times 10^{-22}$ $F = 96\,484{,}56$

$g = 980{,}665 \times 10^{-2}$; $h = 0{,}662\,6176$

$u = 166{,}0565 \times 10^{-29}$; $N_A = 60\,220{,}45 \times 10^{19}$

Identités remarquables

26 Factoriser ce qui suit :

1) $A = 9x^2 - 4$; 2) $B = 64x^3 - 27$; 3) $C = 27x^4 + 64x$

4) $G = 36 - 16x^2$; 5) $D = (3x+2)^2 - 36(x+1)^2$

6) $E = (-2x+1)^2 - (4-8x)(x+3) + (3-12x^2)$

27 Développer et réduire ce qui suit :

1) $(2x+3)^2$; 2) $(7x-3y)^2$

3) $(x+y)^2-(x-y)^2$; 4) $(2x+3y)^3$

5) $(a+b)^3-(a-b)^3$; 6) $(a+b-c)^3$

28 x et y sont deux réels tels que : $x^2-y^2=-1$

Calculer $(x+y)\left[(x+y)^{-1}+\dfrac{1}{(x-y)^{-1}}\right]$

29 x et y sont deux nombres réels non nuls tels que $x^2 \neq y^2$

Simplifier les écritures :

1) $A=\dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}$; 2) $B=\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$

3) $C=\dfrac{x+y+\dfrac{2y^2}{x-y}}{\dfrac{x+y}{2xy}-\dfrac{1}{x+y}}$; 4) $D=\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{xy-y^2}{xy-x^2}$

Exercices de renforcement des apprentissages

30 x, y et z sont trois nombres distincts deux à deux.

Montrer que :

$$\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-z)(y-x)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$$

31 x, y et z sont des nombres réels. On pose : $p=\dfrac{x+y+z}{2}$

Montrer que : $p^2+(p-x)^2+(p-y)^2+(p-z)^2=x^2+y^2+z^2$

32 a) Développer $(x+y+z)^2$

b) On suppose que x, y et z sont des nombres réels non nuls.

Montrer que :

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ signifie que $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

33 Calculer :

$$A=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)$$

$$B=\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{3}{3}\right)\dots\left(2-\frac{100}{3}\right)$$

34 a, b et c sont des réels positifs tels que :

$0<a<b<c$ et $2b=a+c$

Montrer que : $\dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

35 Soient x et y de IR. On désigne par $x \star y$ le plus grand des deux nombres x et y.

(Exemples : $2 \star 3 = 3$; $(-1) \star 0 = 0$; $5 \star 5 = 5$)

Montrer que : $x \star (y \star z) = (x \star y) \star (x \star z)$

36 Si l'on pose $x \operatorname{T} y = \dfrac{xy}{x+y}$, calculer alors

$(x \operatorname{T} x) \operatorname{T} x$ et $(x \operatorname{T} x) \operatorname{T} (x \operatorname{T} x)$

37 Ecrire les nombres suivants sous la forme $3^m \times 17^n$ où m et n sont deux nombres entiers relatifs.

1) $x=\left(\dfrac{17}{27}\right)^7$; 2) $y=\dfrac{3^9}{(153)^4}$

3) $z=27^{-3}\times(17^{-3})^2$; 4) $u=\dfrac{51^4}{3^5}$; 5) $t=\left(\dfrac{17}{9}\right)^{-4}$

38 Calculer les nombres suivants :

$a=2^{2005}\times(0,5)^{2007}$; $b=40^{197}\times(1,25)^{98}\times10^{-99}$

$c=12^{2n}\times(1,5)^n\times6^{-3n+1}$ $(n \in \mathrm{IN})$

39 Quel est le nombre de chiffres du nombre entier

$N=4^{32}\times5^{71}$?

40 Quel est le nombre de chiffres du nombre $P=10^{2005}-2005$?

41 Déterminer tous les nombres entiers naturels non nuls x tels que : $(x^x)^x=x^{(x^x)}$

42 Simplifier les écritures suivantes où a, b et c sont des nombres strictement positifs.

1) $x=\sqrt{ab^2c^2}$; 2) $y=\sqrt{a^{-2}b^2}$

3) $z=\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c^2}}$; 4) $t=\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$; 5) $u=\sqrt{\dfrac{a^{-3}b^5}{ab^{-1}}}$

43 Montrer que :

1) $\sqrt{7,2}=\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{845}+\sqrt{5}=\sqrt{980}$

3) $\sqrt{10,125}=2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{1}{2}\sqrt{18,05}=\sqrt{5}-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$

44 On sait que si a est un réel différent de 0, de 1 et de –1 et **si $a^x=1$, alors $x=0$**

1) Montrer que si a est un réel différent de 0, de 1 et de –1, et si m et n sont deux nombres entiers relatifs tels que : $a^m=a^n$, alors $m=n$

2) Déterminer le nombre entier relatif x dans chacun des cas suivants :

a) $2^{x+2}=\dfrac{1}{32}$

b) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x=3^{-2x}\times9$

c) $3^{x-1}+3^{x+1}=810$

d) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x+1}=(7^{x+1})^{x-1}$

e) $5^{x+2}=625\times5^{3x+1}$

45 Calculer $A=\dfrac{x^{-4}y^3(x^4y^{-3})x^{-6}y^6}{x^2y^{-6}(x^{-6}y^6)x^4y^9}$

pour $x=10^{-6}$ et $y=-10^{-4}$

46 Simplifier A et B et calculer leurs valeurs numériques pour $x=100$ et $y=-0,1$:

$$A=\frac{x^{-2}y^{-3}(xy^2)^3+x^3y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{\left(1+\dfrac{x}{y}\right)+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\times\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}$$

47 Déterminer les deux nombres entiers relatifs x et y tels que :

$$10^{2xy}\times\frac{1}{100\,000}=\left(\frac{1}{10^2}\right)^{-5}\times10^3$$

Calculatrice

48 On considère le nombre : $A=\dfrac{6,8\times10^{-8}+0,000\,000\,85}{49,3\times10^{-6}-34\times10^{-7}}$

a) Sans utiliser la calculatrice, écrire le numérateur et le dénominateur du nombre A sous forme d'écriture scientifique puis écrire A sous forme scientifique.

b) Calculer A en utilisant la calculatrice.

Vitesse de la lumière

49 Sachant que la vitesse de la lumière est c = 300 000km/s, qu'une année-lumière est la distance que parcourt la lumière (dans le vide) pendant une année julienne de 365 jours et que la galaxie la plus lointaine de la terre se trouve à 13,1 milliards d'années-lumière, calculer cette distance (en km) en utilisant l'écriture scientifique.

50 Soit n un élément de IN.

On pose : $E=\dfrac{(8^{n+3}+8^{n+2})^2}{(4^{n+2}-4^n)^3}$

Calculer E et vérifier qu'il est indépendant du nombre n.

51 Soit a un nombre réel non nul.

Quel est le nombre minimal de multiplications que l'on peut effectuer pour calculer a^7 ; a^9 ; a^{11} ; a^{13} ; a^{17} ?

52 a, b et c sont des nombres réels. Factoriser les expressions suivantes :

$E=(ab-13a)(ab+13a)-(5a+65)(3b-39)$

$F=ab+7a+bc+7c$

$G=abc+3bc-3ac-9c$

$H=a^2b-ab^2+bc^2-ac^2+a^2c-abc+b^2c-abc$

$K=a^5+b^5-ab^4-a^4b$

53 On considère a et b tels que :

$a=\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ et $b=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

1) Calculer $(3+\sqrt{5})^2$ et $(3-\sqrt{5})^2$

puis simplifier a et b.

2) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel t tel que :

$(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sqrt{7-3\sqrt{5}}=t\sqrt{2}$

54

a) $\left(\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1$

b) $36^3=(27+3\sqrt{5})^3+(27-3\sqrt{5})^3$

c) $4^3=\left(\dfrac{\sqrt{85}+1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{\sqrt{85}-1}{2}\right)^3$

55 x est un nombre réel non nul.

On pose $X=x+\dfrac{1}{x}$ et $Y=x-\dfrac{1}{x}$

a) Calculer $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ en fonction de X

b) Calculer $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ en fonction de Y

56 On pose $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $c=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

Montrer que : $a^4+1=10a^2$; $b^4+1=10b^2$; $c=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+c}}$

57 x est un nombre réel différent de 1 et de –1.

Simplifier A et B où :

$$A=\left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2 \; ; \; B=\left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2$$

58 x est y sont deux nombres non nuls tels que $x+y \neq 0$

a) Montrer que $(x+y)^2 \neq x^2+y^2$ et $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \neq \dfrac{1}{x+y}$

b) Montrer que si $x>0$ et $y>0$, alors $\sqrt{x}+\sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$

59 Soient x et y deux nombres réels tels que :
$$x + y = 2 \text{ et } x^2 + y^2 = 8$$
Calculer $x^4 + y^4$; $x^3 + y^3$ et $x^6 + y^6$

60 a est un nombre réel strictement positif et différent de1.
Pour tout n de $\mathbb{Z}$, on pose : $X = a^n + a^{-n}$ et $Y = a^n - a^{-n}$
Calculer $X^2 - Y^2$ en fonction de a et n.

61 x, y et z sont des nombres réels. On pose :
$A = x^2 - yz$; $B = y^2 - zx$; $C = z^2 - xy$
Montrer que : $xA + yB + zC = (x + y + z)(A + B + C)$

62 Montrer que pour tous x, y, a et b de IR, on a :
$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

63 a) Développer $(x + y + z)(xy + yz + zx)$
b) Développer $(x + y + z)^2$ et $(x + y + z)^3$
c) On suppose que : $x + y + z = 0$ et $xyz = 1$
Calculer $x^3 + y^3 + z^3$

64 a) Montrer que :
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$
b) Calculer : $\dfrac{a^2 - bc}{1 + \dfrac{b + c}{a}} + \dfrac{b^2 - ca}{1 + \dfrac{c + a}{b}} + \dfrac{c^2 - ab}{1 + \dfrac{a + b}{c}}$

Exercices de synthèse

65 On pose :
$$A = (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2$$
$$B = (x - y)^2(x - z)^2 + (y - z)^2(y - x)^2 + (z - x)^2(z - y)^2$$
$$C = \frac{(x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4}{2}$$
Montrer que : A = B = C

66 a, b, c et d sont des nombres réels tels que
$$a + b + c + d = 0$$
Montrer qu'il existe des nombres x, y et z, que l'on déterminera, tels que :
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = x(a + b) = y(c + d) = 3z$$

67 a) Montrer que : $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
b) En utilisant cette égalité, calculer :
$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} \quad \text{et} \quad B = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{32}{243}$$
c) Montrer que $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
d) Calculer $A + \dfrac{1}{64}$ et $B + \dfrac{64}{729}$

68 Montrer que :
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{9999^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10000^2}\right) = 0,50005$$

69 Quel est le plus petit nombre entier naturel de 12 chiffres de somme égale à 80 ?

70 Calculer : $(1 + 3)(1 + 3^2)(1 + 3^4)(1 + 3^8)(1 + 3^{16})(1 + 3^{32})$

71 Montrer que :
$$x + x(1 + x) + x(1 + x)^2 + \dots + x(1 + x)^{99} = (1 + x)^{100} - 1$$

72 n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que : $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)\dots\dots(2^{2^n} + 1) = 4^{2^n} - 1$

73 On considère deux triangles ADE et BCD tels que :
$AD = 1 + 3\sqrt{2}$; $AE = 2\sqrt{2}$; $DE = 3 + \sqrt{2}$
$BC = 4 - 2\sqrt{2}$; $BD = 2\sqrt{2} - 1$; $CD = 5 - 2\sqrt{2}$
a) Montrer que ADE et BCD sont deux triangles rectangles.
b) Montrer que : $\cos \widehat{ADE} = \cos \widehat{BDC}$
c) Construire un dessin où D, B et E sont alignés et C est un point de (AD).

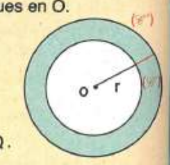
74 Soient x et y deux nombres entiers relatifs tels que :
$$x^2 + 2y + 6 = x(y + 6)$$
a) Montrer que : $(2x - (y + 6))^2 = (y + 2)^2 + 8$
b) Calculer les valeurs de x et y.

75 Déterminer le nombre entier naturel x tel que :
$$4^x + 3 \times 2^x = 88$$

Problèmes

Vers la géométrie

76 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles concentriques en O.
Le rayon de $\mathscr{C}$ est r, le rayon de $\mathscr{C}'$ est r + 1.
a) A est l'aire de la partie colorée.
Calculer A en fonction de r.
b) Peut-on avoir A = 3 ?
c) Montrer que si $r \in \mathbb{N}^*$, alors $A \notin \mathbb{Q}$.



77 Montrer que pour tout réel x différent de $-1 - \sqrt{2}$, on a :
$$\sqrt{\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2} - 1)x + 1}{x + 1 + \sqrt{2}}} \in \mathbb{N}$$

Réflexion plus approfondie

78 Déterminer un nombre entier naturel n composé de deux chiffres tel que : $\sqrt{n + \sqrt{n + 7}} \in \mathbb{N}$

Preuve

79 x et z sont deux entiers naturels tels que :
$$2^{3x + z - 3} - 11 \times 2^{3x - 5} + 2^{z + 2} = 2000$$
a) Montrer que :
$$(2^{3x - 5} + 1)(2^{z + 2} - 11) = 3^2 \times 13 \times 17$$
b) En déduire les valeurs de x et z.

Défi à relever

80 Déterminer n de IN tel que :
$$\sqrt{1 + 5^n + 6^n + 11^n} \in \mathbb{N}$$

Géométrie et arithmétique

81 Soit x un nombre entier naturel non nul.
On considère deux points A et B du plan tels que AB = $4x$.
Soit O le milieu de [AB].
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon x.
$\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont les deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon x.
($\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont tangents à $\mathscr{C}$).
La droite (AB) coupe $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_B$ respectivement en E et F, F et F', F' et E' tels que $A \in [EF]$, $O \in [FF']$ et $B \in [E'F']$.
Soit (Δ) une droite passant par E, tangente au cercle $\mathscr{C}_B$ en un point M et coupant $\mathscr{C}$ en deux points R et S avec ES > ER.
Soit H le projeté orthogonal du point O sur (Δ).
On pose : OH = α et RS = β.
1) a) En utilisant le théorème de Thalès, calculer α en fonction de x.
b) α est-il un nombre rationnel ? décimal ?
c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles α est un entier naturel ? un naturel premier ?
2) a) Calculer HS et β en fonction de x.
b) β Est-il un nombre rationnel ?
c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles β est un entier naturel ? un naturel premier ?

Réflexion plus approfondie

82 Factoriser les deux expressions :
$A = x^8 + x + 1$; $B = x^{10} + x^5 + 1$

83 On pose : $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x} = 18$ où $x > 0$.
Déterminer la valeur numérique de $\sqrt{x + 9} - \sqrt{x}$
(sans chercher la valeur de x).

84 Déterminer les nombres entiers naturels a, b et c tels que :
$$a^6 = (b + 8)^3 \quad \text{et} \quad c^{12} + (b - 8)^3 = 0$$

Ordre dans l'ensemble IR

3

Capacités attendues

* Maitrise des différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utilisation de la plus pertinente d'entre elles selon la situation étudiée.
* Représentation des différentes relations relatives à l'ordre sur une droite numérique.
* Connaissance et détermination de l'approximation d'un nombre (ou d'une expression) à une précision donnée.
* Effectuer des majorations et des minorations d'expressions algébriques.
* Utilisation de la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.

Contenu

• Activités préparatoires

- Ordre dans l'ensemble IR
- Opposé d'un nombre et signe d'un nombre
- Distance et valeur absolue
- Intervalles
- Intersection et réunion d'intervalles
- Encadrement et valeurs approchées
- Approximation
- Calculatrice
- Limites de la calculatrice et encadrement

• Définitions et règles

- Ordre dans l'ensemble IR
- Ordre et opérations
- Encadrement et opérations
- Encadrement de l'inverse et du quotient
- Approximations
- Approximations décimales

• Points essentiels

• Exercices résolus

• Exercices et problèmes

3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Ordre dans l'ensemble IR

A 1) Comparer $x=2\sqrt{5}$ et $y=5\sqrt{2}$

2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$.

On pose : $A=\dfrac{a+a^2}{1+a+a^2}$ et $B=\dfrac{b+b^2}{1+b+b^2}$

$E=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $F=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$

a) Comparer A et B.

b) Montrer que : $E<0$ et $F<0$.

c) Montrer que : $0<\dfrac{E}{F}<1$

d) Comparer E et F.

B Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

On pose : $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

1) Vérifier que : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$

Déterminer alors $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ et $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ en fonction de a.

2) Montrer que : $a^2+b^2+c^2\geq 6$

3) Montrer que : $a\geq 2$ et $c\geq 2$.

4) En déduire que : $a+b+c\geq 6$ et $abc\geq 8$.

5) A t-on $a^2+b^2+c^2\geq 12$?

ACTIVITE 2 Ordre dans l'ensemble IR

1) Déterminer l'opposé de chacun des nombres réels suivants :

$-4{,}7$	9	$\dfrac{-3}{4}$	0	$7-x$	$-x\sqrt{2}$	$2y+81$	$\dfrac{17}{8}+x$	$-x$	$x-y$

2) Soit x un nombre réel. Etudier le signe de $-x$.

3) Calculer a – b et b – a en précisant leurs signes dans chacun des cas suivants :

a) $a=17{,}8$ et $b=3{,}5$; b) $a=\dfrac{22}{7}$ et $b=-3{,}75$; c) $a=-\dfrac{7}{2}$ et $b=\dfrac{-14}{5}$

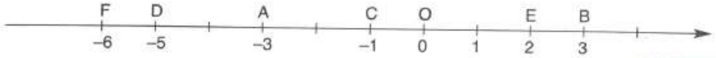
ACTIVITE 3 Distance et valeur absolue

Soit (Δ) une droite graduée d'origine O. **On peut déterminer la position d'un point M de la droite (Δ) au moyen d'un nombre réel x.**

x est l'abscisse du point M . On écrit M(x). Le point M est représenté sur (Δ) comme suit :

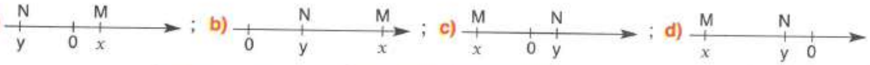
Selon l'emplacement du point M relativement à l'origine O

On considère les points A, B, C, D, E et F représentés sur (Δ) ci-dessous :



1) Déterminer les distances AB, AC, AD, AE, AF.
2) Soient M et N deux points de (Δ) d'abscisses respectives x et y.
Déterminer la distance entre les deux points M et N dans chacun des cas suivants :

AB = (abscisse de B) – (Abscisse de A)
Plus grand des deux abscisses — Plus petit des deux abscisses
$AB = x_B - x_A$ $(x_B > x_A)$



3) En déduire que : OM = x si x est positif et OM = $-x$ si x est négatif

Le nombre OM est appelé la valeur absolue du nombre réel x et est noté $|x|$ c'est-à-dire $OM = |x|$.

4) Calculer $|-2|$; $\left|\frac{5}{3}\right|$; $|3-\pi|$; $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

5) Montrer que : $MN = |y - x|$

Par convention, la distance entre M et N est communément appelée distance entre x et y

ACTIVITE 4 Intervalles

1) Déterminons les nombres réels x qui vérifient $|x-7| \leqslant 2$.
La relation $|x-7| \leq 2$ signifie que $[x \geq 7 \text{ et } x-7 \leq 2]$ ou $[x \leq 7 \text{ et } 7-x \leq 2]$
c'est-à-dire ($7 \leq x \leq 9$ ou $5 \leq x \leq 7$) ou encore $5 \leq x \leq 9$.
L'ensemble des nombres réels x qui vérifient $5 \leq x \leq 9$ est appelé **intervalle fermé** (d'origine 5 et d'extrémité 9) ; on le note **[5 ; 9]**.
Que signifie $x \in [-2 ; 3]$?

$|x-7| \leqslant 2$
Signifie que la distance entre x et 7 est inférieure ou égale à 2

2) Les nombres réels x tels que $|x-7| < 2$ sont les nombres vérifiant $5 < x < 9$ et formant un ensemble appelé **intervalle ouvert** (d'origine 5 et d'extrémité 9) ; on le note **]5 ; 9[**.
Que signifie $x \in \left]-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right[$?

3) L'ensemble des nombres réels que vérifient $x \geq a$ se note **[a ; +∞[**.
Cet intervalle se lit "a plus l'infini".
L'ensemble des nombres réels x qui vérifient $x \leq a$ se note **]–∞ ; a]** et se lit "moins l'infini a".

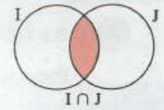
Remarque
Les symboles +∞ et –∞ ne sont pas des éléments de IR

Autre notation	Autre notation
$IR^+ = [0 ; +\infty[$ $IR^{*+} =]0 ; +\infty[$ $IR =]-\infty ; +\infty[$	$IR^- =]-\infty ; 0]$ $IR^{*-} =]-\infty ; 0[$

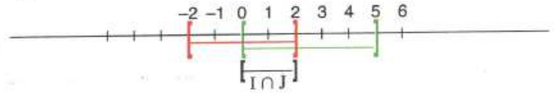
La droite numérique est toute droite rapportée à un repère

ACTIVITE 5 Intersection et réunion d'intervalles

A **Intersection** On considère les deux intervalles I = [–2 ; 2] et J = [0 ; 5].



Quels sont les éléments communs aux deux ensembles I et J.
Pour faciliter la recherche des éléments communs, on utilise la droite numérique et on représente chacun des deux intervalles I et J ?



· Le symbole ∩ se lit "intersection" ou "inter"
· $x \in I \cap J$ signifie que ($x \in I$ et $x \in J$)

A partir de cette représentation, il s'avère que les éléments communs aux deux ensembles I et J constituent l'intervalle K = [0 ; 2]
On dit que l'intervalle K est **l'intersection des deux intervalles** I et J ; on le note K = **I ∩ J**.

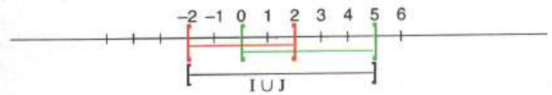
L'ensemble vide
S'il n'existe aucun nombre commun à I et J, on dit que l'ensemble I ∩ J est vide et on écrit I ∩ J = ∅

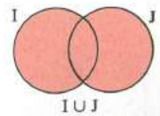
Applications : Déterminer I ∩ J dans chacun des cas suivants :

1) I = [0 ; 5] et J =]–2 ; 3[
2) I = [–10 ; 0] et J = [–3 ; +∞[
3) I = [–2 ; 3] et J =]–∞ ; 0]

Réunion On considère les deux intervalles I = [–2 ; 2] et J = [0 ; 5]

Quels sont les éléments qui appartiennent à I ou à J ?
Pour faciliter la recherche des éléments qui appartiennent à I ou à J, on utilise la droite numérique et on représente chacun des deux intervalles I et J.





A partir de cette représentation, il s'avère que les éléments qui appartiennent à l'ensemble I où à l'ensemble J constituent l'intervalle L = [–2 ; 5].
On dit que l'ensemble L est **la réunion (ou l'union) des deux intervalles** I et J ; on le note L = **I ∪ J**.

· Le symbole ∪ se lit "union"
· $x \in I \cup J$ signifie que ($x \in I$ ou $x \in J$)

B 1) Déterminer les deux réels c et r qui vérifient :
($x \in]-\infty ; -6] \cup [4 ; +\infty[$ équivaut à $|x-c| \geqslant r$
2) Soit x un nombre réel tel que $|x-2| \leqslant 0,001$
a) Donner un encadrement de $x^2 - 2x$
b) En déduire que $|x^2-2x| \leqslant 0,002001$
3) Soit x un élément de IR tel que $|x-3| < 1$
Déterminer deux réels k et k' tels que :
a) $|x^2-9| \leqslant k|x-3|$
b) $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| \leqslant k'|x-3|$

4) Soient a, b deux réels et c un réel positif.
a) Montrer que :
si $|a| \leqslant c$ et $|b| \leqslant c$
alors $|a+b| + |a-b| \leqslant 2c$
b) Montrer que :
si $|a+b| + |a-b| \leqslant 2c$
alors $|a| \leqslant c$ et $|b| \leqslant c$

3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 6 Encadrement et valeurs approchées

A 1) Sur l'écran de la calculatrice, on lit $\boxed{12{,}7388889}$

Parmi les valeurs suivantes, déterminer la valeur approché de ce nombre à 0,01 près.

$\boxed{12{,}7}$ $\boxed{12{,}74}$ $\boxed{12{,}738}$

2) a) Vérifier que $1<\sqrt{2}<2$. La différence 2 – 1 est appelée **amplitude de cet encadrement**.

b) Calculer $(1{,}4)^2$ et $(1{,}5)^2$; en déduire un encadrement de $\sqrt{2}$, quel est son amplitude ?

c) Calculer $(1{,}40)^2$ et $(1{,}41)^2$; en déduire autre encadrement de $\sqrt{2}$, quel est son amplitude ?

3) **Parmi les encadrements d'un même nombre, le plus fin est celui qui a la plus petite amplitude.**

a) Parmi les encadrements précédents de $\sqrt{2}$, quel est le plus fin ?

b) Montrer que 1,41 est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à 0,01 près.

c) Montrer que : $\left|\sqrt{2}-1{,}41\right|<0{,}01$

B Soient p et q deux nombres réels positifs tels que : (R) : $p^2-2q^2=1$

1) Montrer que : $\dfrac{p}{q}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{q}+\sqrt{2}\right)q^2}$

2) En déduire que : $0<\dfrac{p}{q}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2q^2}$

3) On pose : $x=p^2+2q^2$ et $y=2pq$

a) Montrer que x et y vérifient la relation (R) c'est-à-dire $x^2-2y^2=1$.

b) En remarquant que les réels p = 3 et q = 2 vérifient la relation (R), et en utilisant la question 3) a) précédente déterminer un couple $(\alpha\,;\,\beta)$ qui vérifie la relation (R) tels que $\beta>10^5$

c) En déduire une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

ACTIVITE 7 Approximation

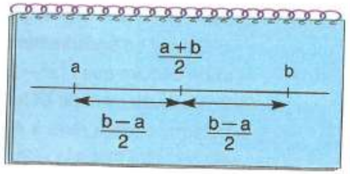
Soient a, b, x et y des nombres réels tels que :

$$a\le x\le b \quad \text{et} \quad a\le y\le b$$

1) Montrer que : $x-y\le b-a$ et $y-x\le b-a$

2) En déduire que : $|x-y|\leqslant b-a$

3) Montrer que : $\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\leqslant\dfrac{b-a}{2}$



On dit que $\dfrac{a+b}{2}$ est une approximation du nombre x à $\dfrac{b-a}{2}$ près (ou à la précision $\dfrac{b-a}{2}$ près).

3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 8 Calculatrice

En utilisant une calculatrice, on trouve : $\boxed{\sqrt{3}=1{,}732050808}$ et $\boxed{\dfrac{2}{3}=0{,}666666666}$

1) Calculer $(1{,}732050808)^2$ et $3\times0{,}666666666$

2) Que peut-on en déduire ?

La calculatrice ne donne pas toujours le résultat exact d'une opération, mais elle donne une valeur approchée (par défaut ou par excès) de cette opération

ACTIVITE 9 Limites de la calculatrice et encadrement

A On pose : $A=\dfrac{1}{\sqrt{10^{16}+1}-10^8}$

1) Calculer A en utilisant une calculatrice.

2) Qu'affiche l'écran de la calculatrice ? Pourquoi ?

3) Montrer que $A=\sqrt{10^{16}+1}+10^8$

4) En déduire que $2\times10^8<A<2\times10^8+\dfrac{1}{2\times10^8}$

B On pose : $x=6406\times1396459$

$y=85555\times104561$

1) Sans effectuer de calcul, montrer que $x\neq y$.

2) En utilisant une calculatrice, comparer

$$a=\frac{6406}{85555} \quad \text{et} \quad b=\frac{104561}{1396459}$$

3) Que peut-on en déduire ?

1 Ordre dans l'ensemble IR

Définition Soient a et b deux nombres réels.
On dit que a est inférieur ou égal à b, et on écrit $a \le b$, si $a - b \le 0$ (ou encore si $b - a$ est positif).

Exemples et applications

- Comparons les deux nombres x et y où $x = \frac{22}{7}$ et $y = \frac{335}{107}$

  On a : $y - x = \frac{335}{107} - \frac{22}{7} = \frac{2345 - 2354}{749} = -\frac{9}{749} < 0$; donc : $y < x$.

- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs distincts.

  Comparons $\frac{4}{a+b}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

  On a : $\frac{4}{a+b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{4ab - (a+b)^2}{ab(a+b)} = -\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab(a+b)}$

  $\frac{4}{a+b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} < 0$ (car $a - b \neq 0$) ;

  donc : $\frac{4}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

- Soit n un nombre entier naturel non nul. Comparer $\frac{2n}{2n+1}$ et $\frac{2n-1}{2n}$
- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.
  1) Comparer $2\sqrt{ab}$ et a + b.
  2) En déduire que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ et $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$

2 Ordre et opérations

• Ordre et addition :

Propriétés Soient a,b, c et d des nombres réels.
- Si $a \le b$, alors $a + c \le b + c$
- Si ($a \le b$ et $c \le d$), alors $a + c \le b + d$

Exemples et applications

- Soient x et y deux nombres réels tels que $x \le 3$ et $y \le -7$.
  Alors : $x + y \le 3 + (-7)$ c'est-à-dire $x + y \le -4$.
- Soit x un nombre réel tel que $x + 2 \le 6$; donc $(x + 2) + (-2) \le 6 + (-2)$ c'est-à-dire $x \le 4$.
- Soient a et b deux nombres tels que $a \leqslant \frac{5}{7}$ et $b \leqslant \frac{16}{7}$
  Montrer que $a + b \le \pi$.

Notation

- L'écriture $a < b$ signifie que : $a \le b$ et $a \ne b$
  et on dit que :
  a est strictement inférieur à b
- Si $a \le b$, alors b est supérieur ou égal à a et on écrit $b \ge a$.

Remarques

- Si $a \le b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$
- Si $a \ge 0$ et $b \ge 0$, alors $a + b \ge 0$
- Si [($a \ge 0$ et $b \ge 0$) et $a + b = 0$], alors ($a = 0$ et $b = 0$)
- Si ($a \le b$ et $b \le c$), alors $a \le c$, On écrit $a \le b \le c$.

• Ordre et multiplication :

Propriétés Soient a,b, c et d des nombres réels.

• Si ($a \le b$ et $c \ge 0$)	,	alors	$ac \le bc$.
• Si ($a \le b$ et $c \le 0$)	,	alors	$ac \ge bc$.
• Si ($ac \le bc$ et $c > 0$)	,	alors	$a \le b$.
• Si ($ac \le bc$ et $c < 0$)	,	alors	$a \ge b$
• Si ($0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$)	,	alors	$ac \le bd$.

Exemples et applications

- Soit $x \leqslant \frac{3}{5}$. Alors $2 \times x \leqslant 2 \times \frac{3}{5}$ (car $2 > 0$) c'est-à-dire $2x \leqslant \frac{6}{5}$.
- Soit $x < \frac{3}{2}$. Alors $(-2) \times x > (-2) \times \frac{3}{2}$ (car $-2 < 0$) ; donc : $-2x > -3$.
- Soit $3x < 5$. Alors $\left(\frac{1}{3}\right)(3x) < \left(\frac{1}{3}\right) \times 5$ (car $\frac{1}{3} > 0$) c'est-à-dire $x < \frac{5}{3}$.
- Soit $0 \le x \le 1{,}5$ et $0 \le y \le 2$. Alors $xy \le 2 \times 1{,}5$ c'est-à-dire $xy \le 3$.
- Soit $0 \le 2x \le 3$ et $0 \le 5y \le 75$. Montrer que $xy \le 22{,}5$.

• Ordre et inverse :

Propriétés Soient a et b deux nombres réels.
- $0 < a \le b$ signifie que $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$
- $a \le b < 0$ signifie que $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$

Exemples et applications

- Soit $0 < x \le 5$. Donc : $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x}$.
- soit $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$. Donc : $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{3}{2}$.
- soit x un nombre réel tel que : $0 < \frac{1}{2x+1} < \frac{3}{2}$
  Montrer que $-\frac{1}{6} < x$.

• Valeur absolue et propriétés :

Définition Sur un axe normé, x est l'abscisse d'un point M
La valeur absolue de x est la distance entre l'origine du repère et le point M ; on la note $|x|$.
En d'autres termes : $OM = |x|$ (où O est l'origine du repère).

Remarques

- Si ($a \ge 0$ et $b \ge 0$), alors $ab \ge 0$.
- Si ($a \le 0$ et $b \le 0$), alors $ab \ge 0$.
- $a^2 \ge 0$ quel que soit le nombre réel a.
- Si ($a \le 0$ et $b \ge 0$), alors $ab \le 0$.

Importance des signes

a, b, c et d étant des nombres réels tels que $bd > 0$, on a : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ signifie que $ad < bc$.

3 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

- $|-8|=8$ et $|-7|=-(-7)=7$
- $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$
- On a $|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$
- Déterminer $|x|$, $|y|$, $|x+y|$, $|x-y|$, $|xy|$ et $\left|\frac{x}{y}\right|$

  Sachant que : $x=\sqrt{3}-1$ et $y=\frac{1}{1-\sqrt{5}}$

• Distance entre deux nombres réels :

Définition Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B sur un axe normé (droite graduée), alors la distance entre a et b est la distance AB et on a : $AB=|b-a|$

Exemples et applications

- Soient 5 et –3 les abscisses de deux points A et B sur un axe normé.

  La distance entre 5 et –3 est $|5-(-3)|=|8|=8$
- Soient 1 et x les abscisses de deux points N et M sur un axe normé.

  La distance entre 1 et x est $|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ 1-x & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$
- Soient 3, 1 et x les abscisses respectives de trois points A, B et M sur un axe normé. Calculer MA + MB en fonction de x.

• Propriétés de la valeur absolue :

Propriétés Soient x et y deux nombres réels. On a :

(1) $|x-y|=|y-x|$

(2) $|xy|=|x||y|$

(3) si $y\neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

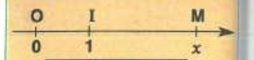
(4) $|x+y|\leq|x|+|y|$

(5) $|x-y|\geq|x|-|y|$

(6) $|x|=|y|$ signifie que ($x=y$ ou $x=-y$).

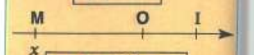
Exemples

- $|x|=5$ signifie que (x = 5 ou x = –5).
- $|x|=-5$ est impossibles car $|x|\geq 0$ et –5 < 0.
- $|x-2|=3$ signifie que (x – 2 = 3 ou x – 2 = –3) c'est-à-dire (x = 5 ou x = –1).



$\boxed{x\geq 0 : OM = x}$

$\boxed{|x|=x}$



$\boxed{x\leq 0 : OM = -x}$

$\boxed{|x|=-x}$

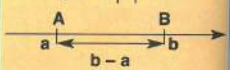
Remarques

- $|x|=\begin{cases} x & ; x\geq 0 \\ -x & ; x\leq 0 \end{cases}$
- $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$.
- $-|x|\leq x\leq|x|$
- Pour tout x de IR :

$|x|\geq 0$

$|x|=|-x|$

$\sqrt{x^2}=|x|$



(1) $|8-6|=|6-8|=2$

(2) $\begin{cases} |-7\times 3|=|-21|=21 \\ |-7|\times|3|=7\times 3=21 \end{cases}$

On a : $|-7\times 3|=|-7|\times|3|$

(3) $\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{3}{5}=\frac{|-3|}{|5|}$

On a : $\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{|-3|}{|5|}$

ملاحظات

- $|x-y|\leq|x|+|y|$
- $|x|^2=x^2=|x^2|$
- $|x|-|y|\leq|x+y|\leq|x|+|y|$

$\begin{cases} |x|=r \\ r\geq 0 \end{cases}$ signifie que (x = r ou x = –r)

3 DEFINITIONS ET REGLES

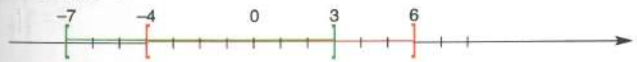
• Intervalles :

Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b.

Ensemble des nombres réels qui vérifient	Représentation sur une droite numérique	Notation	Intervalle
a ≤ x ≤ b	a [——] b	[a, b]	Intervalle fermé [a ; b]
a < x < b	a] —— [b	]a, b[	Intervalle ouvert]a ; b[
a ≤ x < b	a [—— [b	[a, b[	Intervalle semi-ouvert à droite [a ; b[
a < x ≤ b	a] ——] b	]a, b]	Intervalle semi-ouvert à gauche]a ; b]
x ≤ a	——] a	]–∞, a]	Intervalle]–∞ ; a] (fermé en a)
x < a	—— [a	]–∞, a[	Intervalle]–∞ ; a[(ouvert en a)
b ≤ x	b [——	[b, +∞[	Intervalle [b ; +∞[(fermé en b)
b < x	b] ——	]b, +∞[	Intervalle]b ; +∞[(ouvert en b)

Exemples et applications

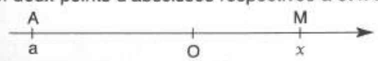
- La représentation des deux intervalles [–4 ; 6] et [–7 ; 3] sur une droite numérique est la suivante :



- Représenter chacun des deux intervalles I = [2 ; +∞[et J =]–5 ; 7] sur une droite numérique.

• Intervalles et valeur absolue :

Soient A et M deux points d'abscisses respectives a et x sur un axe normé :



r est un nombre réel strictement positif.

L'inégalité $|x+y|\leq|x|+|y|$ est appelée inégalité triangulaire.

Al Khwarizmi, mathématicien (788 – 850)
Il a contribué au développement de l'algèbre. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages dont le plus célèbre est intitulé "Aljabr wa' lmuqabala"
(كتاب الجبر والمقابلة)

3 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

- $|-8|=8$ et $|-7|=-(-7)=7$
- $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$
- On a $|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x\leq 2\end{cases}$
- Déterminer $|x|$, $|y|$, $|x+y|$, $|x-y|$, $|xy|$ et $\left|\dfrac{x}{y}\right|$

  Sachant que : $x=\sqrt{3}-1$ et $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{5}}$

• Distance entre deux nombres réels :

Définition Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B sur un axe normé (droite graduée), alors la distance entre a et b est la distance AB et on a : $AB=|b-a|$

Exemples et applications

- Soient 5 et –3 les abscisses de deux points A et B sur un axe normé.
  La distance entre 5 et –3 est $|5-(-3)|=|8|=8$
- Soient 1 et x les abscisses de deux points N et M sur un axe normé.
  La distance entre 1 et x est $|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ 1-x & \text{si } x\leq 1\end{cases}$
- Soient 3, 1 et x les abscisses respectives de trois points A, B et M sur un axe normé. Calculer MA + MB en fonction de x.

• Propriétés de la valeur absolue :

Propriétés Soient x et y deux nombres réels. On a :

(1) $|x-y|=|y-x|$

(2) $|xy|=|x||y|$

(3) si $y\neq 0$, alors $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

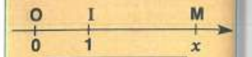
(4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(5) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

(6) $|x|=|y|$ signifie que ($x=y$ ou $x=-y$).

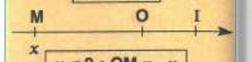
Exemples

- $|x|=5$ signifie que ($x=5$ ou $x=-5$).
- $|x|=-5$ est impossibles car $|x|\geqslant 0$ et $-5<0$.
- $|x-2|=3$ signifie que ($x-2=3$ ou $x-2=-3$) c'est-à-dire ($x=5$ ou $x=-1$).



$\boxed{x\geq 0 : OM = x}$

$\boxed{|x|=x}$



$\boxed{x\leq 0 : OM = -x}$

$\boxed{|x|=-x}$

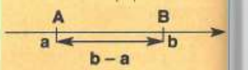
Remarques

- $|x|=\begin{cases} x & ; x\geqslant 0 \\ -x & ; x\leqslant 0\end{cases}$
- $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$.
- $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$
- Pour tout x de IR :

  $|x|\geqslant 0$

  $|x|=|-x|$

  $\sqrt{x^2}=|x|$



(1) $|8-6|=|6-8|=2$

(2) $\begin{cases}|-7\times 3|=|-21|=21 \\ |-7|\times|3|=7\times 3=21\end{cases}$

On a : $|-7\times 3|=|-7|\times|3|$

(3) $\left|\dfrac{-3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}=\dfrac{|-3|}{|5|}$

On a : $\left|\dfrac{-3}{5}\right|=\dfrac{|-3|}{|5|}$

ملاحظات

- $|x-y|\leqslant|x|+|y|$
- $|x|^2=x^2=|x^2|$
- $|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$

$\begin{cases}|x|=r \\ r\geqslant 0\end{cases}$ signifie que ($x=r$ ou $x=-r$)

3 DEFINITIONS ET REGLES

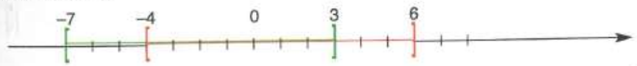
• Intervalles :

Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b.

Ensemble des nombres réels qui vérifient	Représentation sur une droite numérique	Notation	Intervalle
a ≤ x ≤ b	a b	[a, b]	Intervalle fermé [a ; b]
a < x < b	a b	]a, b[	Intervalle ouvert]a ; b[
a ≤ x < b	a b	[a, b[	Intervalle semi-ouvert à droite [a ; b[
a < x ≤ b	a b	]a, b]	Intervalle semi-ouvert à gauche]a ; b]
x ≤ a	a	]–∞, a]	Intervalle]–∞ ; a] (fermé en a)
x < a	a	]–∞, a[	Intervalle]–∞ ; a[(ouvert en a)
b ≤ x	b	[b, +∞[	Intervalle [b ; +∞[(fermé en b)
b < x	b	]b, +∞[	Intervalle]b ; +∞[(ouvert en b)

Exemples et applications

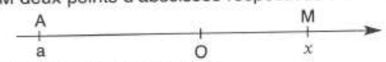
- La représentation des deux intervalles [–4 ; 6] et [–7 ; 3] sur une droite numérique est la suivante :



- Représenter chacun des deux intervalles I = [2 ; +∞[et J =]–5 ; 7] sur une droite numérique.

• Intervalles et valeur absolue :

Soient A et M deux points d'abscisses respectives a et x sur un axe normé :



r est un nombre réel strictement positif.

L'inégalité

$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

est appelée inégalité triangulaire.

Al Khwarizmi, mathématicien (788 – 850)
Il a contribué au développement de l'algèbre.
Il est l'auteur de plusieurs ouvrages dont le plus célèbre est intitulé "Aljabr wa' lmuqabala"

(كتاب الجبر والمقابلة)

Ecriture en utilisant la valeur absolue	Notation avec des intervalles	Représentation sur une droite numérique
$\lvert x\rvert \leq r$	$x \in [-r, r]$	$-r$ [0] r
$\lvert x\rvert \geq r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	$-r$] 0 [r
$\lvert x-a\rvert \leq r$	$x \in [a-r, a+r]$	$a-r$ [a] $a+r$
$\lvert x-a\rvert \geq r$	$x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$	$a-r$] a [$a+r$
$\lvert x\rvert < r$	$x \in]-r, r[$	$-r$] 0 [r
$\lvert x\rvert > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	$-r$ [0] r
$\lvert x-a\rvert < r$	$x \in]a-r, a+r[$	$a-r$] a [$a+r$
$\lvert x-a\rvert > r$	$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	$a-r$ [a] $a+r$

Exemples

- $\lvert x\rvert \leq 4$ signifie que $x \in [-4\,;\,4]$.
- $\lvert x\rvert \geq \frac{5}{2}$ signifie que $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$
- $\lvert x-1\rvert < 3$ signifie que $x \in]-2\,;\,4[$
- $\lvert x-2\rvert > 7$ signifie que $x \in]-\infty\,;\,-5[\cup]9\,;\,+\infty[$

- **Encadrement :**

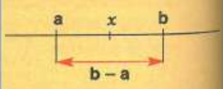
Définition Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Toute double inégalité (parmi les doubles inégalités suivantes) $a < x < b$;
$a < x \leq b$; $a \leq x \leq b$; $a \leq x \leq b$ est appelée encadrement, de x, d'amplitude $b - a$.

Exemples et applications

- $3,14 < \pi < 3,15$ est un encadrement de π d'amplitude $3,15 - 3,14 = 0,01$
- $1 < \frac{5}{4} < 2$ est un encadrement du nombre $\frac{5}{4}$ d'amplitude $2 - 1 = 1$
- Déterminer un encadrement de $\sqrt{6}$ d'amplitude 1.
- Déterminer un encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude 2 et un autre encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude 0,02.

Remarques

- Il n'existe aucun réel x vérifiant $\lvert x\rvert \leq -2$
- En revanche :
Pour tout réel x, on a :
$\lvert x\rvert > -2$



3 Encadrement et opérations

1) Encadrement de la somme de deux nombres :

Propriétés Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ sont des encadrements des deux nombres réels x et y, alors :

$$\begin{cases} a + c \leq x + y \leq b + d \\ a - d \leq x - y \leq b - c \end{cases}$$
sont des encadrements des réels $x + y$ et $x - y$.

Exemples et applications

- On a : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$
Donc : $3,142 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 3,153$ est un encadrement de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
d'amplitude $3,153 - 3,142 = 0,011$.
- On a : $1,732 - 1,42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1,733 - 1,41$
c'est-à-dire : $0,312 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,323$ est un encadrement de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d'amplitude de 0,011.
- Sachant que : $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$, donner un encadrement de chacun des deux nombres $\sqrt{13} + 5$ et $5 - \sqrt{13}$ en précisant son amplitude.

2) Encadrement du produit de deux nombres :

Propriétés Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ sont deux encadrements de x et y,
alors $ac \leq xy \leq bd$ est un encadrement de xy.

Exemples

- Soit $17,3 \leq x \leq 17,4$ et $21,9 \leq y \leq 22$; alors $378,87 \leq xy \leq 382,8$
- Soit $-17,4 \leq a \leq -14,3$ et $-22 \leq b \leq -21,9$.
On a : $17,3 \leq -a \leq 17,4$ et $21,9 \leq -b \leq 22$. Alors $378,87 \leq ab \leq 382,8$
- Soit $-4 \leq s \leq -2$ et $1 \leq t \leq 3$. On a : $2 \leq -s \leq 4$ et $1 \leq t \leq 3$.
Donc $2 \leq (-s)t \leq 12$. d'Où $-12 \leq st \leq -2$.
- Soit $-4 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 3$.
Notons que le nombre x peut-être positif ou négatif.
  - Si x est négatif c'est-à-dire $-4 \leq x \leq 0$, alors $0 \leq -x \leq 4$;
  donc $0 \times 1 \leq -xy \leq 4 \times 3$ ou encore $0 \leq -xy \leq 12$; d'où $-12 \leq xy \leq 0$
  - Si x est positif c'est-à-dire $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \times 1 \leq xy \leq 2 \times 3$
  c'est-à-dire $0 \leq xy \leq 6$.
  - En considérant les deux cas, on peut dire que :
  $-12 \leq xy \leq 6$ est un encadrement du nombre xy.

Rappel

Connaissant des encadrements des deux nombres x et y, on peut déterminer un encadrement de chacun des deux réels $x + y$ et $x - y$.

Remarques

- $10^{-2} + 10^{-3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$
$= \frac{11}{1000}$
- L'amplitude de l'encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est la somme des amplitudes des encadrements des deux nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Rappel

Connaissant des encadrements des deux réels x et y, on peut déterminer un encadrement de xy.

4 Encadrement de l'inverse et du quotient

Propriétés Soient a, b, c et d des nombres réels strictement positifs.
Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ sont deux encadrements des deux nombres réels x et y, alors :
$\frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{c}$ et $\frac{a}{d} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{c}$ sont deux encadrements des réels $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$.

Exemples et applications

- Soit $2 \le x \le 4$ et $1 \le y \le 3$.
  Alors : $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant 1$ (encadrement de $\frac{1}{y}$) et $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 4$ (encadrement de $\frac{x}{y}$)
- Soit $-4 \le a \le -2$ et $1 \le b \le 3$. Donc $2 \le -a \le 4$ et $1 \le b \le 3$
  Il s'ensuit $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant 1$ et $\frac{2}{3} \leqslant -\frac{a}{b} \leqslant 4$ c'est-à-dire $-4 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant -\frac{2}{3}$. (encadrement de $\frac{a}{b}$).

Donner un encadrement de $\frac{x}{y}$ sachant que : $3{,}95 \le x \le 4{,}01$ et $-2 \le y \le -1{,}2$

Soit $-1 \le a \le 3$ et $-4 \le b \le -2$. Donner un encadrement de chacun des deux nombres : $\frac{a}{b}$ et $\frac{2a+3b}{3a-2b}$.

Remarque

Si $a \le x \le b$, alors $-b \le -x \le -a$

5 Approximations

1) Approximation par défaut et par excès :

Définition Soit $a \le x \le b$ ($a < x < b$; $a < x \le b$ ou $a \le x < b$) un encadrement du nombre x d'amplitude $b - a$.
- Le nombre a est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par défaut.
- Le nombre b est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par excès.

Convention

On dit "à b – a près" ou "à la précision b – a près"

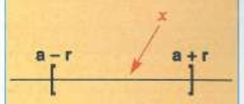
Exemples et applications

- Soit $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
  Donc : 3,14 est une approximation du nombre π à 0,01 près par défaut
  3,15 est une approximation du nombre π à 0,01 près par excès.
- On sait que $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$
  Donc : 1,4143 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} par excès.
  1,4142 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près par défaut.

- Donner une approximation de $\frac{5}{4}$ à 10^{-1} près par excès.
- Donner une approximation de $\frac{1}{25}$ à 10^{-2} près par défaut.

2) Valeur approchée

Définition Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
Tout nombre réel a qui vérifie l'une ou l'autre des deux inégalités $|x - a| < r$ ou $|x - a| \leqslant r$ est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r près).



Exemples et applications

On a : $\left|\sqrt{5} - 2{,}235\right| \leqslant 0{,}005$ (on peut vérifier ce résultat en utilisant une calculatrice).
Donc 2,235 est une valeur approchée du nombre $\sqrt{5}$ à la précision 0,005 près ou 0,005 près.

Déterminer une valeur approchée de $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} près.

Note

Soit $a \le x \le b$ un encadrement du nombre x.

- **a est une approximation de x à b – a près par défaut.**
- **b est une approximation de x à b – a près par excès.**
- **$\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.**

6 Approximations décimales

Définition Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \le x < (N+1) \times 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$
- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par défaut.
- Le nombre $(N + 1) \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par excès.

Exemples et applications

On a : $0{,}62 < \frac{5}{8} < 0{,}63$ c'est-à-dire $62 \times 10^{-2} < \frac{5}{8} < 63 \times 10^{-2}$

ou encore $62 \times 10^{-2} < \frac{5}{8} < (62+1) \times 10^{-2}$

Donc : 62×10^{-2} (c'est-à-dire 0,62 est l'approximation décimale du nombre $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par défaut.
$63 \times 10^{-3} = 0{,}63$ est l'approximation décimale de $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par excès.

- Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.
- Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excès.

On pose : $a = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$

Sachant que $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ et $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$

Donner les approximations décimales à 10^{-2} près par défaut et par excès du nombre t.

Ordre dans IR

Soient a et b deux nombres réels :
$a \leq b$ signifie $a - b \leq 0$

Soient a, b, c et d des nombres réels.

Ordre et addition	Ordre et multiplication	Ordre et inverse
• Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ • Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$, alors $a + c \leq b + d$	• Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \geqslant 0 \end{cases}$, alors $ac \leq bc$ • Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant 0 \end{cases}$, alors $ac \geq bc$ • Si $\begin{cases} ac \leqslant bc \\ c > 0 \end{cases}$, alors $a \leq b$ • Si $\begin{cases} ac \leqslant bc \\ c < 0 \end{cases}$, alors $a \geq b$	• Si $0 < a < b$ signifie $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$ • Si $a \leq b < 0$ signifie $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$

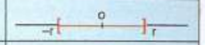
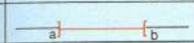
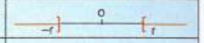
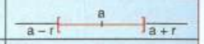
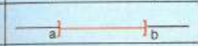
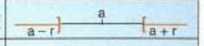
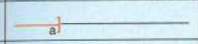
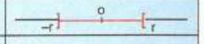
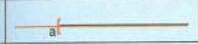
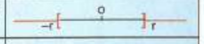
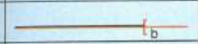
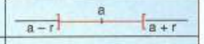
Valeur absolue

Valeur absolue d'un nombre réel	Distance entre deux nombres réels	Propriétés de la valeur absolue
• Sur un axe normé, x est l'abscisse d'un point M. La valeur absolue du réel x est la distance entre l'origine O du repère et le point M ; on la note $\lvert x \rvert$ c'est-à-dire $\lvert x \rvert = OM$. • $\lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B d'un axe normé, la distance en a et b est la distance AB et vaut $AB = \lvert b - a \rvert$ (ou encore $AB = \lvert a - b \rvert$)	Soient x et y deux nombres réels. • $\lvert x - y \rvert = \lvert y - x \rvert$ • $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ et $\lvert -x \rvert = \lvert x \rvert$ • $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert$ • Si $y \neq 0$, alors $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$ • $\lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ et $\lvert x - y \rvert \geqslant \lvert x \rvert - \lvert y \rvert$ • $\lvert x \rvert = \lvert y \rvert$ signifie que : ($x = y$ ou $x = -y$)

3 POINTS ESSENTIELS

Intervalles de IR

Soient a et b deux nombres réels.

Ensemble des réels vérifiant	Représentation sur une droite numérique	Notation	Intervalle	Ecriture utilisant la valeur absolue	Ecriture utilisant les intervalles	Représentation sur une droite numérique
$a \leq x \leq b$		[a, b]	Intervalle fermé [a ; b]	$\lvert x \rvert \leqslant r$	$x \in [-r, r]$	
$a < x < b$		]a, b[	Intervalle ouvert [a ; b]	$\lvert x \rvert \geqslant r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	
$a \leq x < b$		[a, b[	Intervalle semi-ouvert à droite [a ; b[	$\lvert x - a \rvert \leqslant r$	$x \in [a - r, a + r]$	
$a < x \leq b$		]a, b]	Intervalle semi-ouvert à gauche]a ; b]	$\lvert x - a \rvert \geq r$	$x \in]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$	
$x \leq a$		]-∞, a]	Intervalle]-∞ ; a] (fermé en a)	$\lvert x \rvert < r$	$x \in]-r, r[$	
$x < a$		]-∞, a[	Intervalle]-∞ ; a[(ouvert en a)	$\lvert x \rvert > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	
$b \leq x$		[b, +∞[	Intervalle [b ; +∞[(fermé en b)	$\lvert x - a \rvert < r$	$x \in]a - r, a + r[$	
$b < x$		]b, +∞[	Intervalle]b ; +∞[(ouvert en b)	$\lvert x - a \rvert > r$	$x \in]-\infty, a - r[\cup]a + r, +\infty[$	

Encadrement

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$
Toute double inégalité parmi les relations
$a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$; $a < x \leq b$; $a < x < b$
est appelée encadrement du nombre x d'amplitude $b - a$

Encadrement de la somme et de la différence de deux nombres	Encadrement du produit de deux nombres	Encadrement de l'inverse et du quotient de deux nombres
• Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $\begin{cases} a + c \leqslant x + y \leqslant b + d \\ a - d \leqslant x - y \leqslant b - c \end{cases}$	• Si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant y \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $ac \leq xy \leq bd$	• Si $\begin{cases} 0 < a \leqslant x \leq b \\ 0 < c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $\begin{cases} \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{c} \\ \frac{a}{d} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{c} \end{cases}$

Approximations

Approximations par défaut et par excès	Valeur approchée
Soit $a \leq x \leq b$ ($a \leq x < b$; $a < x \leq b$ ou $a < x < b$) un encadrement de x d'amplitude $b - a$ • Le nombre a est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par défaut. • Le nombre b est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par excès.	Soient x un nombre réel et r un réel strictement positif. Tout nombre réel a qui vérifie l'une ou l'autre des deux relations $\lvert x - a \rvert < r$ ou $\lvert x - a \rvert \leqslant r$, est appelé valeur approchée de x à r près (ou à la précision r près).

Approximations décimales

Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N + 1) \times 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$
• Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par défaut.
• Le nombre $(N + 1) \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par excès.

1 Comparaison de deux encadrements

Soient x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

On pose $A(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) Donner un encadrement du nombre $A(x)$.

2) a) Déterminer les deux réels a et b tels que : $A(x)=a+\frac{b}{x+2}$

b) Déterminer un autre encadrement du nombre $A(x)$.

3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$.

Solution

1) Encadrement de $A(x)$

On a : $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$

Donc : $-1\le 2x\le 2$ et $\frac{3}{2}\leqslant x+2<3$

$2\le 2x+3\le 5$ et $\frac{3}{2}\leqslant x+2\leqslant 3$

$2\le 2x+3\le 5$ et $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x+2}\leqslant\frac{2}{3}$

Il s'ensuit : $2\times\frac{1}{3}\leqslant\frac{2x+3}{x+2}\leqslant 5\times\frac{2}{3}$

c'est-à-dire : $\frac{2}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{10}{3}$

2) a) Détermination de a et b pour que $A(x)=a+\frac{b}{x+2}$

$A(x)=a+\frac{b}{x+2}$ signifie que : $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}$

c'est-à-dire $2x+3=ax+2a+b$

Par identification des coefficients, on obtient

$2=a$ et $3=2a+b$

$2=a$ et $b=-1$

Ainsi : $A(x)=2-\frac{1}{x+2}$

b) Autre encadrement de $A(x)$

On a : $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$; donc $\frac{3}{2}\leqslant x+2\leqslant 3$

Il en découle : $-\frac{2}{3}\leqslant-\frac{1}{x+2}\leqslant-\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{4}{3}\leqslant 2-\frac{1}{x+2}\leqslant\frac{5}{3}$

c'est-à-dire $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$

3) Comparaison des deux encadrements précédents de $A(x)$.

- On a : $\frac{2}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{10}{3}$

Cet encadrement a pour amplitude $\frac{10}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

- On a : $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$ qui est un encadrement d'amplitude $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

- Comme $\frac{1}{3}<\frac{8}{3}$, alors le plus fin des deux encadrements est celui de la 2ème question c'est-à-dire $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$.

2 Encadrement et valeur absolue

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$x\geqslant\frac{1}{2}$; $y\le 1$ et $x-y=3$

1) Calculer la valeur du nombre B définie par $B=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2) Vérifier que : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

3) Calculer la valeur du nombre C défini par $C=|x+y-5|+|x+y+2|$

Solution

1) On a : $B=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

Donc : $B=|2x-1|+|2y-2|$

$B=|2x-1|+|2(y-1)|$

c'est-à-dire : $B=|2x-1|+2|y-1|$

- Or $x\geqslant\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $2x-1\ge 0$, et $|2x-1|=2x-1$
- Par ailleurs $y\le 1$ c'est-à-dire $y-1\le 0$, par suite $|y-1|=-(y-1)$
- On en déduit $B=2x-1-2(y-1)$ $B=2(x-y)+1$

Comme $x-y=3$, alors $B=2\times 3+1$; donc $B=7$.

2) Vérifions que $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

- On a : $x-y=3$; donc : $x=y+3$

On a : $y\le 1$; donc $y+3\le 4$ c'est-à-dire $x\le 4$

Par hypothèse $x\geqslant\frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$

- On a : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $x=y+3$. Donc : $\frac{1}{2}\leqslant 3+y\leqslant 4$

On en tire $\frac{1}{2}-3\leqslant y\leqslant 4-3$ c'est-à-dire $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

3) Calculons la valeur de $C=|x+y-5|+|x+y+2|$

Etudions d'abord le signe de chacun des deux réels $x+y+2$ et $x+y-5$

On a : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

Donc : $-2\le x+y\le 5$

D'où : $0\le x+y+2\le 7$ et $-7\le x+y-5\le 0$

Il vient aussitôt $\begin{cases}|x+y-5|=-(x+y-5)\\ |x+y+2|=x+y+2\end{cases}$

On en tire : $C=-(x+y-5)+x+y+2$

$C=-x-y+5+x+y+2$

D'où : $C=7$.

3 Approximation

1) a) Vérifier que pour tout x de IR \ {1}

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$$

b) En déduire que si $|x|<\frac{1}{2}$, alors $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$

2) Déterminer alors une valeur approchée du nombre $\frac{1}{0,99}$ à la précision 2×10^{-4} près (On pourra poser $x=10^{-2}$).

N. B. IR \ {1} est l'ensemble des nombres réels différents de 1

Solution

1) a) soit x un nombre réel différent de 1.

On a : $(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x}$

$(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{1-x}$

D'où : $(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

b) Soit x un nombre réel tel que $|x|<\frac{1}{2}$

- On a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

ou encore $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\frac{x^2}{|1-x|}$ (1)

- On a $|x|<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{2}<-x<\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-x<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<1-x<\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}<\frac{1}{1-x}<2$

Donc $\frac{1}{|1-x|}<2$

Comme $x^2\ge 0$, alors $\frac{x^2}{|1-x|}\leqslant 2x^2$

En utilisant la relation (1), on déduit que $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$

(pourvu que $|x|<\frac{1}{2}$)

2) Déterminons une valeur approchée de $\frac{1}{99}$ à 2×10^{-4} près

D'après le résultat de la question 1) b), on a :

$\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$ pour tout réel x tel que $|x|<\frac{1}{2}$

En prenant $x=10^{-2}$ (Il est bien clair que $|10^{-2}|<\frac{1}{2}$)

On a : $\left|\frac{1}{1-10^{-2}}-(1+10^{-2})\right|\leqslant 2\times(10^{-2})^2$

c'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-0,01}-(1+0,01)\right|\leqslant 2\times 10^{-4}$

ou encore $\left|\frac{1}{0,99}-1,01\right|\leqslant 2\times 10^{-4}$

Ceci signifie que 1,01 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{0,99}$ à la précision 2×10^{-4} près.

4 Approximation décimale d'un nombre rationnel

1) Sachant que $1,414\leqslant\sqrt{2}<1,415$, déterminer les approximations décimales du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

2) Déterminer les approximations décimales du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

Solution

1) On a $1,414\leqslant\sqrt{2}<1,415$

c'est-à-dire $1414\times 10^{-3}\leqslant\sqrt{2}<(1414+1)\times 10^{-3}$

Donc 1,414 et 1,415 sont les approximations décimales respectives du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

2) **Déterminons les approximations décimales de $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.**

On a : $\frac{3}{7}\times 10^3=\frac{3000}{7}$

$\frac{3}{7}\times 10^3=428+\frac{4}{7}$

Or $0<\frac{4}{7}<1$; par suite $428<\frac{3}{7}\times 10^3<428+1$

c'est-à-dire $428\times 10^{-3}<\frac{3}{7}<(428+1)\times 10^{-3}$

Donc :

- 0,428 est l'approximation décimale du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut.
- 0,429 est l'approximation décimale du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par excès.

Exercices d'application

Comparaison et ordre

1 $x = 4{,}23 \times 10^{-2}$ et $y = 3{,}5 \times 10^{-3}$.

a) Déterminer les signes de $x + y$, xy et $\frac{x}{y}$.

b) Comparer x et y.

c) Comparer $-x$ et $-y$.

d) Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

2 Soit $x = -3{,}8 \times 10^2$ et $y = 1{,}17 \times 10^2$

a) Déterminer les signes de $x + y$, xy et $\frac{x}{y}$.

b) Comparer x et y.

c) Comparer $-x$ et $-y$.

d) Ranger les nombres $x + y$; $x - y$; $-x + y$.

e) Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

3 Soit $a = -5{,}24 \times 10^{-3}$ et $b = 0{,}00464$.

a) Comparer a et b.

b) Comparer a + b et a – b.

c) Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

d) Comparer a^2 et b^2.

4 On considère les deux nombres a et tel que :

$$a = -\frac{7}{13} \quad \text{et} \quad b = -\frac{4}{7}$$

a) Donner le signe de chacun des réels a + b ; ab ; $\frac{a}{b}$.

b) Comparer a et b.

c) Comparer a + b et –(a + b).

d) Comparer a + b et a + 2b.

e) Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

f) Comparer a^2 et b^2.

5 Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :

a) $x = \frac{496}{55}$ et $y = 9$.

b) $x = \frac{526}{187}$ et $y = \frac{23}{8}$.

6 Comparer les deux nombres a et b dans chaque cas :

a) $a = 4\sqrt{2}$ et $b = 5{,}65$

b) $a = \frac{1}{14\sqrt{5}}$ et $b = \frac{1}{31}$

c) $a = x\sqrt{x+1}$ et $b = (x+1)\sqrt{x}$

où x est un réels strictement positif.

7 On pose : $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$

a) Montrer que : $b - a = \frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

b) Comparer a et b.

8 Montrer que : $\frac{1}{50} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} < \frac{1}{25}$

(Noter que : $4 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{25}$)

9 On considère les deux nombres x et y tels que :

$$x = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$y = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$$

1) Montrer que : $x - y = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$

2) Comparer x et y

10 Comparer les deux nombres $a = 10\sqrt{51}$ et $b = 70 + \sqrt{2}$

Comparaison difficile par la calculatrice

11 On considère les nombres $x = 333\sqrt{51}$ et $y = 2378{,}095667$

a) En utilisant une calculatrice, calculer x.

Peut-on dire que x et y sont égaux ?

b) A l'aide de la calculatrice, calculer x^2 et y^2.

2) Montrer que x^2 est un nombre entier naturel et que y^2 n'est pas un entier naturel.

En déduire que $x \neq y$.

3) Calculer la valeur exacte du nombre y^2 en posant $y^2 = (2378 + 0{,}095667)^2$.

4) Comparer x et y.

12 Comparer x et y dans chaque cas :

a) $x = a^3$ et $y = (a+b)^3$ où $a \in IR$ et $b \in IR^+$

b) $x = a$ et $y = \frac{a+b}{2}$ où $a \leq b$

c) $x = \frac{1}{a+1}$ et $y = \frac{1}{a+2}$ où a est un réel positif.

13 Ranger par ordre croissant chacune des listes suivantes :

a) $\frac{23}{97}$; $\frac{97}{23}$; 1.

b) $\frac{35}{36}$; $\frac{50}{37}$; $\frac{33}{36}$; $\frac{49}{37}$.

c) $\frac{8}{5}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{48}{54}$.

14 Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 2$

a) Montrer que $(a + b)^2 = 2(1 + ab)$

b) Sachant que a et b sont strictement positifs, déduire de ce qui précède que $a + b > \sqrt{2}$.

15 a, b et c sont des nombres réels inférieurs ou égaux à 1.

a) Montrer que $abc \leq bc$, $abc \leq ca$ et $abc \leq ab$.

b) En déduire que $3abc \leq ab + bc + ca$.

16 Ranger par ordre croissant les nombres suivants :

$-\sqrt{21}$; $-3\sqrt{21}$; 0 ; $2\sqrt{21}$; $49\sqrt{3}$

17 Soient x et y deux nombres réels strictement positifs et distincts. Donner le signe du quotient :

$$\frac{x-y}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \qquad (x \neq y)$$

18 Montrer que : $\sqrt{2} - \frac{655\,857}{470\,832} < 10^{-1}$

Valeur absolue – Distance

19 Calculer la distance entre les deux nombres dans chaque cas :

a) 5,2 et 7 ; b) $-\frac{37}{18}$ et $\frac{11}{6}$

c) 0,3 et –0,33 ; d) –5,3 et –7.

20 Calculer les valeurs exactes des réels suivants :

a) $|\pi - 4|$; b) $|3 - \pi|$

c) $|-\pi\sqrt{2} - 1|$; d) $|2^{-3}|$

21 Parmi les nombres suivants, déterminer le plus proche du nombre 1 :

1,1 ; $\frac{17}{18}$; 0,99 ; $\frac{13}{12}$; $\frac{28}{27}$

22 Soient x et y deux nombres réels. On pose :

$B = |x| + |-2-y|$; $A = |x| - |-2-y|$

$C = |x| + x$; $D = |x(2+y)| - |x||y+2|$

$E = -2 - y + |2+y|$; $F = 2 + y - |y+2|$

CalculerA, B, C, D, E et F dans chaque cas suivant :

a) $x = -2$ et $y = 2$

b) $x = \sqrt{3}$ et $y = -2 + \sqrt{3}$

c) $x = \frac{7}{4}$ et $y = -2 - \frac{1}{6}$

23 Simplifier les expressions suivantes selon le signe de ce qui est "intérieur" à la valeur absolue.

a) $x + |x|$; b) $3x - 3|x|$

c) $\left|\frac{x}{3}\right| - \frac{x}{3}$; d) $\frac{|-7a|}{21} - \frac{a}{3}$

e) $\frac{|xy|}{6}$; f) $\frac{\sqrt{(y-1)^2}}{y-1}$ (où $y \neq 1$)

24 Sur une droite graduée, exprimer ce qui suit en utilisant des distances, puis résoudre géométriquement les équations suivantes :

a) $|x| = 1$; b) $|x - 2| = 1$; c) $|3 - x| = 2$

d) $|x + 2| = 3$; e) $|2x - 3| = 6$

25 Sur une droite graduée, donner une interprétation géométrique de chaque nombre suivant :

a) $|x + y|$; b) $2|x - y|$; c) $|x - 1| + |x + 1|$

d) $|x| + |x + 2|$; e) $2|x - 3| + 3|x + 1|$

26 Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a \geq -2 \;;\; b \leq -1 \;;\; a - b = 6$$

1) Calculer $A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$

2) Montrer que $a \leq 5$ et $-8 \leq b$.

3) Déterminer la valeur numérique de l'expression B telle que : $B = |a + b - 4| + |a + b + 10|$

Intervalles

27 Sur une droite graduée, représenter les nombres réels x qui vérifient l'inégalité proposée dans chacun des cas suivants :

a) $x \geq 2$; b) $x < \frac{1}{2}$

c) $x > 3{,}5$; d) $x \leq 10^{-2}$

e) $x < -0{,}1$; f) $x < 0$

28 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'intervalle auquel appartient le nombre réel a :

a) $a \geq 5$; b) $a \leq -7$; c) $a > \frac{3}{5}$

d) $a \geq 0$; e) $a > \sqrt{2}$; f) $a < -1 - \sqrt{3}$

29 Ecrire l'intervalle ou la réunion d'intervalles auxquels appartient le réel x dans chacun des cas suivants :

a) $-5 \leq x \leq -3$; b) $x < 7$ ou $x > 10$

c) $x \geq 0$ et $x \leq 7{,}5$; d) $x = -2$ ou $x \geq 3$

e) $x \neq 0$ et $-2 < x < 1$; f) $x \leq 1$ et $x > -3$

30 Ecrire, sous forme d'intervalle ou d'une réunion d'intervalles, l'ensemble auquel appartient le réel t dans chaque cas :

a) $-1 < t < 7$; b) $3 \geq t > -2$

c) $t < -1$ et $t < 1$; d) $t > +1$ ou $t < -1$

31 Donner les inégalités qui déterminent l'appartenance d'un réel à chacun des intervalles suivants :

a) $[-3;2]$; b) $]-2;0]$; c) $]-\infty;3[$

d) $]\sqrt{2};+\infty[$; e) $]-\infty;-0,1[$; f) $\left[5;\frac{13}{2}\right[$

32 Représenter les ensembles suivants sur une droite graduée, et préciser ceux qui représentent des intervalles.

a) $[-8;2]\cap[-5;5]$; b) $\left[-\frac{3}{2};3\right[\cup[1;4[$

c) $[4;+\infty[\cap]-4;5[$; d) $]-\infty;-3[\cap]-6;+\infty[$

d) $[-2;5]\cup[8;+\infty[$; f) $[-1;+\infty[\cap[6;+\infty[$

g) $[6;+\infty[\cap[-3;19[\cap]-\infty;-1[$

Inégalités et encadrements

33 Déterminer un nombre rationnel r compris entre a et b dans chacun des cas suivants :

a) $a = 1,1$ et $b = 1,2$; b) $a = \pi$ et $b = \frac{22}{7}$

c) $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{3}$; c) $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$

e) $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{3}$; f) $a = 2-\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

34 On sait que : $-6 \leq x \leq 5$ et $-2 \leq y \leq 1$

Donner un encadrement de $x - y$.

35 a et b sont deux nombres réels tels que :

$2 \leq a \leq 4$ et $-3 \leq b \leq 3$

Donner un encadrement de b – a.

36 On sait que : $3 \leq x \leq 4$ et $2 \leq y \leq 5$

Trouver un encadrement de chacun des réels :

$x + y$; $x - y$; $2x - 3y$; $-4x + 3y - 5$

37 x et y sont deux nombres réels tels que :

$-3 \leq x \leq 2$ et $-7 \leq y \leq 1$

Trouver un encadrement de chacun des réels :

$x + 2y$; $-x - y$; $5x + 3y$; $-5x + 6y - 8$

38 On sait que : $\begin{cases} 1,01 \leq x \leq 1,02 \\ -4 \leq y \leq -3,8 \end{cases}$

a) Donner un encadrement de $-y$.

b) Encadrer xy.

39 On sait que : $-2,19 \leq x \leq -2,14$ et $-0,36 \leq y \leq -0,34$.

a) Donner un encadrement de chacun des réels $-x$ et $-y$.

b) Donner un encadrement de xy.

40 On sait que $3 \leq x \leq 3,5$ et $-0,4 \leq y \leq 0,2$

a) Donner un encadrement du réel xy dans chacun des deux cas suivants :

- $-0,4 \leq y \leq 0$
- $0 \leq y \leq 2$

b) Trouver alors un encadrement du réel xy.

41 On sait que : $4 \leq x \leq 8$ et $6 \leq y \leq 11$.

Donner un encadrement de chacun des deux réels $\frac{y}{x}$ et $\frac{x}{y}$.

42 Si x est un nombre réel tel que $-7 < x < 5$, déterminer l'intervalle ou la réunion d'intervalles auquel appartient x^2 et $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

43 On considère deux nombres réels a et b tels que :

$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $0 \leq b \leq 3$

a) Encadrer les deux réels 2a et $\frac{1}{2a}$.

b) Encadrer b – 2a et en déduire un encadrement de $(b - 2a)^2$.

44 Soient a et b deux réels vérifiant :

$0 \leq a \leq 2$ et $-4 \leq b \leq 1$

Montrer que : $-20 \leq 2a^2 + b^2 + 2a - 4b \leq 28$

45 On sait que : $-2 < a < 3$ et $-4 < b < 1$

Montrer que : $-5 \leq a^2 + b^2 - 2a + 4b < 13$

46 On sait que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose : $E = x^2 - y^2 + x + y$

a) Donner un encadrement du réel E.

b) Vérifier que : $E = (x + y)(x - y + 1)$

En déduire un autre encadrement de E.

c) En déduire que : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

47 On sait que : $-3 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 3$

Montrer que : $-33 \leq x^2 - 3y^2 - 5x \leq 24$

48 On donne : $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 2$

et on pose $E = 4a^2 + 4a - b^2 + 2b - 3$

a) Donner un encadrement de E.

b) Vérifier que : $E = (2a + 1)^2 - (b - 1)^2 - 3$

c) Donner un autre encadrement de E.

d) Comparer les amplitudes des deux encadrements précédents.

49 Soient x, y deux nombres réels tels que :

$2,20 < x < 2,21$ et $3,44 < y < 3,45$

Comparer les deux réels : $3y - x + 2$ et $3x - y + 7$

Approximations

50 Trouver un encadrement du nombre $\frac{1}{7}$ d'amplitude 0,1, et un autre encadrement d'amplitude 0,05.

51 Trouver un encadrement du nombre $\sqrt{2}$ d'amplitude 1, et un autre encadrement d'amplitude 0,1.

52 Trouver un encadrement du nombre $\sqrt{131}$ d'amplitude 1, et un autre encadrement d'amplitude 0,5.

53 Montrer, dans chaque cas, que A est une valeur approchée du nombre x à r près :

a) $x = \frac{7}{6}$; $A = 1,1666$; $r = 5 \times 10^{-4}$

b) $x = \frac{1}{3}$; $A = 0,4$; $r = 8 \times 10^{-2}$

54 On sait que : $0,1 < x < 0,3$.

a) Donner un encadrement de x^2 ?

b) En déduire que 0,05 est une valeur approchée de x^2 à 0,04 près.

55 a) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$

b) Développer $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

c) Soit $a = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$. Simplifier a.

d) Sachant que $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ et $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ donner des approximations de a à 0,5 près par défaut et par excès.

56 Donner une valeur approchée de $\frac{25}{7}$ à 10^{-10} près et une valeur approchée de $\frac{25}{35}$ à 10^{-10} près.

57 Déterminer l'encadrement correspondant à chacun des propositions suivantes :

a) 0,05 est une valeur approchée du réel x à 10^{-2} près.

b) –0,02 est une valeur approchée du réel t à 10^{-2} près par défaut.

58 Est-ce que $\frac{22}{7}$ est une valeur approchée du nombre π à 2×10^{-3} ?

59 x est un nombre réel tel que $\left|\sqrt{5} - 3x\right| < 10^{-3}$.

Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, trouver un encadrement du réel x, par deux nombres décimaux, et dont l'amplitude est 10^{-3}.

60 x est un nombre réel tel que $1,9 \leq x \leq 2,1$.

a) Donner un encadrement du réel $x - 2$

b) Montrer que $2x - 2$ est une valeur approchée du réel $x^2 - 2x + 2$ à 0,01 près.

61 On sait que : $8,54384 \leq t \leq 8,54388$

Donner des approximations par défaut et par excès des réels t et –t à 10^{-2}, 10^{-3} et 10^{-4} près.

Exercices de renforcement des apprentissages

62 Comparer les deux réels a et b dans chaque cas suivant :

1) $a = \frac{3577}{2468}$ et $b = \frac{3576}{2467}$

2) $a = 3\sqrt{5} - 47$ et $b = 3\sqrt{6} - 49$

3) $a = \sqrt{5} - 6$ et $b = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}}$

63 En utilisant la calculatrice, ranger par ordre croissant les nombres réels suivants :

π ; $\frac{25}{8}$; 3,14 ; 3,15 ; $\frac{22}{7}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{355}{13}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$

64 Sans utiliser la calculatrice, ranger par ordre croisant les réels suivants : $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{\pi+2}$

65 Ranger par ordre décroissant chacune des listes suivantes de nombres réels

1) $\frac{14}{75}$; $\frac{56}{305}$; $\frac{221}{1250}$; 0,185 ; $\frac{21}{121}$; $\frac{19}{100}$

2) $\frac{1111}{1250}$; $\frac{381}{500}$; $-0,796$; $-\frac{383}{500}$; $-\frac{7}{10}$

3) $\frac{61}{67}$; $\frac{708}{804}$; $\frac{177}{200}$; $\frac{355}{402}$; $\frac{119}{135}$

66 Soient x et y deux nombres réels tels que :

$x - y + 7 = 0$ et $-7 < x - 2y \leq -5$

a) Montrer que : $x < y - 4$

b) Montrer que : $-9 \leq x < -7$ et $-2 \leq y < 0$

67 x et y sont deux réels tels que : $x < y$

Montrer que pour tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$,

On a : $x < \alpha x + (1 - \alpha)y < y$

68 Soit a un nombre réel tel que : $a > -1$.
Ordonner les nombres x, y et z dans chacun des cas suivants :
1) $x = a+1$; $y = a+2$; $z = a+4$
2) $x = \frac{1}{a+1}$; $y = \frac{1}{a+2}$; $z = \frac{1}{a+4}$
3) $x = (a+1)^2$; $y = (a+2)^2$; $z = (a+4)^2$

69 Soit n un élément de IN*.
Comparer x et y dans chaque cas suivant :
1) $x = n^2 - 2n + 1$; $y = (n-1)^2 + 1$
2) $x = 1 - \frac{2}{n}$; $y = 1 + \frac{1}{2n}$
3) $x = 1 + \frac{1}{n}$; $y = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

70 Soit $x > 0$. On pose : $E = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ et $F = \frac{1}{x(x+3)}$
1) Comparer $\frac{1}{E}$ et $\frac{1}{F}$.
2) En déduire la comparaison des expression E et F (pour $x > 0$).

71 Soient x et y deux nombres réels strictement positifs et distincts.
Comparer E et F dans chaque cas suivant :
1) $E = \frac{1}{x(x+y)}$ et $F = \frac{4y}{(x+y)^3}$.
2) $E = xy + 4$ et $F = (x-2)(y-2)$.
3) $E = xy + 2005$ et $F = (x-401)(y-5)$.
4) $E = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ et $F = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$.

72 a, b et c sont des nombres réels positifs tels que :
$$4a^2 - 3b^2 + 3c^2 = 0$$
Déterminer le plus grand de ces nombres.

73 Que peut-on dire des réels x, y et z si
$$y + z \le 2x \ ; \ z + x \le 2y \ \text{et} \ x + y \le 2z \ ?$$

74 Ordonner les réels positifs x, y et z sachant que:
$$xy \le z^2 \ ; \ zx \le y^2 \ \text{et} \ yz \le x^2$$

75 a) Soit $x > 0$. Comparer $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{x-1}{x}$
b) En utilisant la question précédente, comparer a et b d'une part, puis c et d d'autre part où :
- $a = \frac{3\,726,534}{3\,726,535}$; $b = \frac{3\,726,535}{3\,726,536}$
- $c = \frac{1234\,567,89}{1234\,567,9}$; $d = \frac{1234\,567,9}{1234\,567,91}$

76 Soient x et y deux nombres strictement positifs.
Comparer $\frac{196\,y}{2005\,x + 49\,y}$ et $\frac{2005\,x + 49\,y}{2005\,x}$.

77 a) Soient x et y deux nombres réels tels que : $0 < x < y$.
Comparer $\frac{x}{y}$ et $\frac{x+2005}{y+2005}$.
b) Soit t un réel strictement positif.
Comparer $\frac{x}{y}$ et $\frac{x+t}{y+t}$.
c) Soit n un élément de IN.
Comparer $\frac{x}{y}$ et $\frac{(1+n)x}{nx+y}$.

78 a est l'aire d'un rectangle de dimensions 11 et 14.
b est l'aire d'un cercle de diamètre 14.
a) Comparer a et b en considérant les valeurs approchées respectives de π : 3,14 ; 3,15 et $\frac{22}{7}$.
b) En considérant la valeur exacte de π, quelle est la plus grande des deux aires ?

79 On pose $A = a^2 + a + 1$
1) Vérifier que $4A = (2a+1)^2 + 3$
Montrer que $A \ge \frac{3}{4}$
2) On suppose que : $-3 \le a \le 1$
Montrer que $\frac{3}{4} \le A \le 7$

80 Soient a, b et c des nombres réels tels que : $a \ne 1$ et $b \ne 2$.
On pose :
$$A = \frac{(a-4)(b-2)}{a-1} \ ; \ B = \frac{a-3b+5}{a-1} \ ; \ C = \frac{(a-1)^2 - 3(b-2)}{a-1}$$
Comparer A, B et C dans chacun des cas suivants :
a) $a = 2$ et $b \ne 3$; b) $a = 4$

81 Soit t un réel tel que : $t > 1$.
Montrer que : $\frac{3}{2} < \frac{1+2t}{1+t} < 2$

82 Soit x un réel tel que : $4 < x < 5$.
Montrer que : $\frac{4}{7} < \frac{x}{x+3} < \frac{5}{8}$.

83 On sait que : $0 < x < y$ et $t = \frac{x}{y}$.
Soient α et β deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que : $t < \frac{\alpha t + \beta}{\beta t + \alpha} < \frac{1}{t}$.

84 On sait que $n \in IN$, $n \ge 3$ et $x > 10^n$
Montrer que : $0 < \frac{1}{x-1} < \frac{1}{\underbrace{99...9}_{n \text{ fois}}}$.

85 Soit $n \in IN$ et $n \ge 2$.
Soit $x \in IR^*$ tel que : $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{n+1}{n+2}$
Déterminer un encadrement de x et vérifier que son amplitude est $\frac{1}{n(n+1)}$

86 Soit a un nombre réel tel que $2 \le a \le 3$.
Montrer que $2 \le \frac{a^3+2}{a^2+1} \le 3$.

87 Soient x et deux nombres réels tels que $0 < x < y$.
a) Montrer que : $x^2 < xy < y^2$.
b) Montrer que si $xy = 15$, alors $x < \sqrt{15} < y$.
c) Montrer que : $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3\,615}{931}$

88 Soit x un nombre réel tel que $x \ge 1$.
a) Montrer que : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$
b) On pose : $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10^4}}$
Montrer que $198 < A < 200$

89 Soit n un entier naturel tel que $n \ge 2$.
a) Simplifier l'expression suivante :
$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$
b) En déduire que : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

90 Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \ge \frac{1}{2}$$

91 Ecrire sous forme d'intervalle chaque fois que cela est possible :
a) $[-1;4] \cup [3;+\infty[$; b) $]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$
c) $]-\infty;2] \cap [3;+\infty[$; d) $[-1;4] \cap [3;+\infty[$

92 Soit a un nombre réel tel que $a > \frac{68}{15}$
On pose $x = \frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$ et $y = \frac{a(7+\sqrt{3})}{2}$
1) Comparer x et y.
2) On considère que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ $a = 5$
Montrer que :
- 21,8375 est une valeur approchée de y à 0,0125 près.
- $|x - 27,1| < 0,1$

93 a et b sont deux nombres réels tels que :
$$1 \le 3a + 2b \le 4 \quad \text{et} \quad |a-1| \le 1.$$
Donner un encadrement de chacun des nombres réels suivants : $a + b + 2$; $2a + 2b + 1$;
$(3a+2b)(2a+2b+1)$; $\frac{2a+2b+1}{3a+2b}$

94 a, b et c sont trois nombres réels tels que:
$b > 0$; $2b^2 = a^2 + c^2$; $1 < a < 2$ et $-2 < c < 2$
Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{2} < b < 2$

95 Encadrer x sachant que : $|x - 1,72| \le 0,01$

96 Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient la condition imposée dans chacun des cas suivants :
a) $|3x - 1| = 4$; b) $1 \le |x+2| \le 2$
c) $2 \le |x+3| \le 3$; d) $|7x - 5| \le \frac{7}{2}$
e) $\sqrt{7-x} < \sqrt{2x-2}$; f) $\sqrt{(7-x)^2} < \sqrt{(2x-2)^2}$

97 Soient x et y deux nombres réels tels que :
$$-1 < x < 1 \quad \text{et} \quad -1 < y < 1$$
Montrer que : $-1 < xy < 1$

98 Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$.
On pose : $A = \frac{2xy}{x+y}$ et $B = \frac{x+y}{2}$
Montrer que : $0 < B - A < y - x$

99 x et y sont deux nombres réels tels que :
$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad |2x + y| \le \frac{2}{3}$$
Montrer que : $\frac{y}{x} \in \left[-4 ; -\frac{1}{2}\right]$

100 Déterminer les nombres réels x, y et z tels que :
$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Exercices de synthèse

101 Pour tout nombre réel a de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on pose :
$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$$
1) Montrer que : $a(A+1)(A-1) = 1$.
2) Montrer que : $2 \le A + 1 \le 3$.
En déduire que : $1 + \frac{1}{3a} \le A \le 1 + \frac{1}{2a}$.
3) Montrer que 1,1 est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ à la précision $\frac{1}{30}$ près.

102 Soit x un nombre réel strictement positif.
1) a) Montrer que $1+\sqrt{1+x}>2$
b) En déduire que $0<\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}<\frac{1}{2}$
2) Montrer que : $1<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$
3) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1,04}$

103 Soient a et b deux nombres réels tels que : $0<a\leq b\leq 2a$
1) a) Montrer que $(a-b)(2a-b)\leq 0$
b) Développer $(a-b)(2a-b)$ et $(a\sqrt{2}-b)^2$
2) On pose : $A=\frac{2a^2+b^2}{3ab}$
Montrer que : $\frac{2\sqrt{2}}{3}\leq A\leq 1$
(Utiliser la première question)
3) Montrer que $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{6}$ est une valeur approchée du réel A à $\frac{(1-\sqrt{2})^2}{6}$ près.

104 On sait que $-1<x<0$ et $0<x^2+x+y^2<3$
1) Montrer que $|y|<2$
2) On suppose dans cette question que $0<y<1$
a) Factoriser $xy+y+x^2-1$
b) En déduire que $|xy+y+x^2|<1$

105 a, b et sont des longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse est c.
Comparer les deux réels dans chaque cas suivant :
1) $a+b$ et c
2) a^3+b^3 et c^3
3) a^5+b^5 et c^5

106 a est un nombre réel tel que $|a|<1$
On pose : $E=a^3+a^2-5a+3$
1) Montrer que : $-3<E<10$
2) Vérifier que : $E=(a+3)(a-1)^2$
3) En déduire que : $0<E<16$
4) Montrer que : $|E-5|<5$

107 a, b et α étant des réels positifs, comparer :
$x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $y=\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{b+\alpha}$

108 x, y et n sont des réels tels que :
$x\geq 0$; $y\leq 0$; ($n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 3$) et $x+y=2n+1$
On pose : $E=\sqrt{x^2+2nx+n^2}-|n+1-y|$
1) Vérifier que : $E=|x+n|-|n+1-y|$
2) En déduire que E est un nombre entier naturel pair.

109 On considère l'intervalle $I=\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$.
a) Montrer que pour tout x de I : $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{6}$.
b) Montrer que pour tout x de I : $\frac{-7}{9}<-x^2+x-1<-\frac{3}{4}$

110 Soit x un nombre réel tel que : $|x-1|<1$.
Montrer que : $|x^2+5x-6|\leq 8|x-1|$.

111 Soient x et y tels que $|x-1|<\frac{1}{2}$ et $|y+1|<\frac{1}{2}$.
Montrer que $\frac{1}{3}<\frac{2x}{x-y}<3$

112 Soit α tel que $12<\alpha<13$.
Montrer que $\left|\sqrt{\alpha}-\frac{\sqrt{12}+\sqrt{13}}{2}\right|<0,1$

113 Soit x un réel non nul. On pose : $E=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
1) Montrer que : $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.
2) a) Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1\geq 2$.
b) En déduire que : $\left|E-\frac{1}{x}\right|\leq\frac{1}{2}|x|$.
3) Déterminer une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{0,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} près.

114 Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que $\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{n}$

115 a, b et c sont des nombres réels tels que :
$0<a\leq 1$; $0<b\leq 1$ et $0<c\leq 1$
1) Montrer que : $(ab-1)(bc-1)(ca-1)\leq 0$
2) En déduire que $a+b+c+\frac{1}{abc}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc$

116 Parmi les rectangles qui ont la même aire, montrer que le carré est celui qui a le plus petit périmètre.

117 Parmi les rectangles qui ont le même périmètre, montrer que le carré est celui qui a la plus grande aire.

118 p, k et n sont des nombres entiers non nuls.
Montrer que :
a) $\frac{1}{p+k}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{k}{p+k}\right)$
b) $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$

119 x, y, z et t sont des nombres entiers naturels tels que :
$1<x<y<z<t$
Montrer que : $\frac{1}{xyzt}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\leq\frac{31}{24}$

120 x et y étant deux nombres réels strictement positifs, montrer que : $\frac{x+y}{x+y+1}<\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

Inégalités remarquables

121 soient x, y et z des nombres réels strictement positifs.
Montrer que :
1) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$.
2) $(1+x)(1+y)\geq 4\sqrt{xy}$.
3) $\frac{x+y}{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.
4) $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 6$.
5) $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$
6) Si $x+y=1$, alors :
a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$.
b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{25}{2}$.
7) $\frac{\sqrt{2}(x+y)}{1+x^2+y^2}\leq 1$.

122 Soient x et y deux réels tels que : $1\leq x^2-xy+y^2\leq 2$.
1) Montrer que : $\frac{2}{9}\leq x^4+y^4\leq 8$.
2) Montrer que pour tout entier $n\geq 3$, on a :
$x^{2^n}+y^{2^n}\geq\frac{2}{3^{2^n}}$.

123 Montrer que :
$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+\frac{3}{4}\geq a+b+c$

124 a, b, c et d sont des nombres distincts de IN supérieurs ou égaux à 2. Montrer que :
$\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\left(1-\frac{1}{d^2}\right)}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

125 x, y et z sont des nombres réels supérieurs ou égaux à -1 tels que : $x+y+z+t=2$
Montrer que : $x^3+y^3+z^3+t^3\geq\frac{1}{2}$

126 a, b et c étant des nombres réels strictement positifs, montrer que : $\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3$

127 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\ldots+\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\frac{n}{2}$

Problèmes

128 On suppose que la trajectoire d'un satellite est un cercle de centre, le centre de la terre et de rayon de longueur 6800km.
1) Donner la valeur exacte de la longueur p de la trajectoire du satellite.
2) Soit a une valeur approchée du nombre π fournie par une calculatrice qui affiche 8 chiffres.
Si $|\pi-a|<5\times 10^{-8}$, peut-on obtenir un encadrement de la longueur p au mètre près ? au cm près ?
3) Vérifier que si on prend $|\pi-a|<2\times 10^{-3}$ (par exemple a = 3,14), alors la longueur p de la trajectoire sera calculée à la précision de 25km.

129 Deux cyclistes partent d'une ville A vers une ville B. Le premier cycliste part à neuf heures à la vitesse de 25 kilomètres par heure ; le second cycliste part à neuf heures et vingt minutes à la vitesse de 29 kilomètres par heure. Quelle doit être la distance entre les deux villes pour que le second cycliste puisse dépasser le premier ?

130 Soit α un nombre réel strictement positif.
Soit x un élément de l'intervalle $[1\,;1+\alpha[$.
1) a) Vérifier que : $x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$
b) Montrer que $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left[1-\frac{1}{2}(x-1)\right]\right|\leq\frac{3}{8}\alpha^2$
En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 6×10^{-8} près.
2) a) Vérifier que :
$-3x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}+8=-(\sqrt{x}-1)(3x+9\sqrt{x}+8)$
b) Montrer que :
$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left[1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2\right]\right|\leq\frac{5}{16}\alpha^3$
En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-11} près.

Polynômes

4

Capacités attendues

* Maîtrise de la technique de la division euclidienne par $x - a$.
* Discernement de la divisibilité par $x - a$

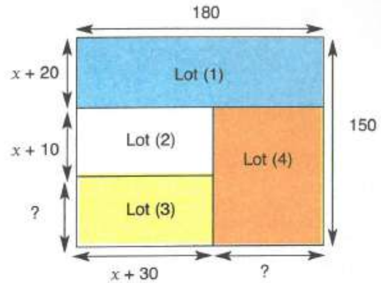
Contenu

4 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Introduction

On considère le plan suivant de quatre lots de terrain (l'unité étant le mètre)

1) Déterminer en fonction de x l'aire de chaque lot.
2) Si la largeur du lot (1) est 50m, quelles sont les aires des lots (3) et (4) ?



ACTIVITE 2 Polynômes

On considère l'expression $P(x)$ définie par : $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

$P(x)$ est appelée polynôme du troisième degré et on écrit d°P = 3 (ou degP = 3).

Les nombres 5 ; -3 ; -9 ; 2 sont appelés coefficients du polynôme $P(x)$.

5 est le **coefficient du terme** de degré 3.

-3 est le **coefficient du terme** de degré 2.

-9 est le **coefficient du terme** de degré 1.

2 est le **coefficient du terme** de degré 0.

> $a_i x^i$ est appelé terme de degré i

1) Déterminer le degré de chacun des polynômes suivants :

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + x^4 + 1$ $\qquad$ $F(x) = 5 - x$

$H(x) = x^5 + x^3 - \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$ $\qquad$ $R(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^4 + \sqrt{3}\,x$

2) On peut écrire $P(x)$ sous l'une des formes suivantes :

(I) $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ $\quad$ et $\quad$ (II) $P(x) = 2 - 9x - 3x^2 + 5x^3$

- Lorsqu'on écrit $P(x)$ sous la forme (I), on dit que l'on a ordonné le polynôme $P(x)$ selon les puissances décroissantes de la variable x.
- Lorsqu'on écrit $P(x)$ sous la forme (II), on dit que l'on a ordonné le polynôme $P(x)$ selon les puissances croissantes de la variable x.

Réduire et ordonner les polynômes suivants selon les puissances décroissantes de la variable x, puis selon les puissances croissantes de la variable x.

$G(x) = 3x^3 - 4x^5 + 2x^2 + 8x^3 - x - x^2 + 2$ $\qquad$ $K(x) = (x + 2)^2 - (x - 2)^2$

$L(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 1)(x + 3)$ $\qquad$ $M(x) = (1 + x)(x^2 - 3x + 1)$

ACTIVITE 3 Egalité de deux polynômes

On considère les deux polynômes G(x) et H(x) définis par :

$G(x) = (2x+3)(x^2-3x+2)$ et $H(x) = (x-1)(2x^2-x-6)$

1) Montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Calculer $G\left(-\frac{3}{2}\right)$, G(1) et G(2).

3) Vérifier que : $G(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)(x-2)$.

ACTIVITE 4 Somme et produit de deux polynômes

On considère les polynômes P(x) et Q(x) définis par :

$P(x) = 5x^2+4x-2$ et $Q(x) = -3\sqrt{5}\,x^3+2x^2-2x+1$

1) Calculer $P(x)+Q(x)$ et $P(x)-Q(x)$.
2) Calculer le produit $P(x) \times Q(x)$.
3) Déterminer $d°(P \times Q)$.
4) Comparer $d°(P \times Q)$ et $d°P + d°Q$.

ACTIVITE 5 Division euclidienne par x - a et racine d'un polynôme

On considère le polynôme P(x) définie par $P(x) = x^4+x^3+x^2-x-2$

1) Vérifier que $P(1) = 0$ et $P(-1) = 0$; on dit que **1 et –1 sont des racines du polynôme P(x)**.
   Calculer P(2). 2 est-il racine du polynôme P(x) ?
2) Vérifier que : $P(x)-P(2) = (x^4-2^4)+(x^3-2^3)+(x^2-2^2)-(x-2)$.
3) En déduire que $P(x) = (x-2)Q(x)+P(2)$.
   où Q(x) est un polynôme de degré $3 = d°P - 1$.
4) Ecrire P(x) sous la forme $P(x) = (x-1)H(x)+P(a)$
   (a est un nombre réel donné et H(x) un polynôme à déterminer).
5) En prenant a = 1, en déduire une factorisation du polynôme P(x).

a est une racine du polynôme P(x) signifie que P(a) = 0

ACTIVITE 6 Racines d'un polynôme et ses coefficients

A On considère les deux polynômes H(x) et K(x) définis par :

$H(x) = x^3-(a+b+c)x^2-x+(a+b+c)$

$K(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

1) H(x) admet deux racines évidentes. Les déterminer.
2) En déduire une factorisation de H(x).
3) Calculer K(a) et en déduire une factorisation de K(x).
4) Résoudre l'équation $H(x) = 0$ et l'équation $K(x) = 0$.

B Soit P(x) le polynôme défini par : $P(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

1) On suppose que P(x) admet trois racines a', b' et c'.

Montrer que : $\begin{cases} a'+b'+c' = -\alpha \\ a'b'+b'c'+c'a' = \beta \\ a'b'c' = -\gamma \end{cases}$

2) En déduire une factorisation du polynôme :

$$F(x) = x^3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)x^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)x-\sqrt{30}$$

ACTIVITE 7 Polynômes n'admettant pas de racines naturelles

Soit $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs.

On suppose que $|P(0)|$ et $|P(1)|$ sont impairs.

1) Montrer que $|d|$ est impair.
2) Montrer que $|a+b+c|$ est pair.
3) On suppose que P(x) admet une racine k appartenant à $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que k n'est pas pair.
   b) Montrer que $P(k)-P(1) = (k-1)(ak^2+(a+b)k+(a+b+c))$
   c) Montrer que k n'est pas impair (Remarquer que $P(k)-P(1) = -P(1)$)
4) Que peut-on en déduire ?

1 Polynômes

Définition On appelle polynôme toute expression P(x) qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un nombre entier naturel et a_0, a_1, ... et a_n sont des nombres réels.
Les nombres a_0, a_1, ... et a_n sont appelés **coefficients** du polynôme P(x).

- Si a_n n'est pas nul ($a_n \neq 0$), le nombre entier naturel n est appelé **degré** du polynôme P(x) et on le note : **d°P = n**.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le polynôme nul qui est sans degré.
- $a_i x^i$ est le terme de degré i et a_i est le coefficient du terme de degré i.

Exemples

- $P(x) = 4x^3 + 7x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ est un polynôme du troisième degré (d°P = 3)

$Q(x) = x^2 - x + 1$ est un polynôme du second degré (d°Q = 2)
$S(x) = 2x - 3$ est un polynôme du premier degré (d°S = 1)

Remarque

- Le polynôme ax + b (où a ≠ 0) est appelé polynôme du premier degré ; il est aussi dit binôme du premier degré.
- Le polynôme ax^2 +bx +c (où a ≠ 0) est appelé polynôme du second degré ; il est aussi appelé trinôme du second degré.

2 Egalité de deux polynômes

Propriété Pour que deux polynôme soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient le même degré et que les coefficients des termes de même degré soient deux à deux égaux.

Cette propriété signifie que tout polynôme a une forme réduite unique.

Exemples et applications

- On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x - 1$$
$$Q(x) = ax^4 + (a + b)x^3 + cx^2 + (2c + d)x - 1$$

P(x) et Q(x) sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -2 \\ c = 7 \\ 2c + d = 5 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 7 \\ d = -9 \end{cases}$$

- On considère les deux polynômes :

$$H(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3$$
$$G(x) = 3x^4 + (2a + 1)x^3 + (b - 3)x^2 + (2c + 3)x + 3$$

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que les deux polynômes H(x) et G(x) soient égaux.

3 Opérations sur les polynômes

A- Somme de deux polynômes

- On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6$$
$$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$$

On a : $P(x) + Q(x) = (5x^3 - 7x^2 + 8x + 6) + (2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9)$

$P(x) + Q(x) = 2x^4 + (5 - 2)x^3 + (-7 + 4)x^2 + (8 + 1)x + 6 - 9$

$P(x) + Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Donc P(x) + Q(x) est un polynôme et d°(P + Q) = 4

- Calculer la somme des deux polynômes et déterminer le degré de la somme, dans chacun des deux cas suivants :

(1) $\begin{cases} P(x) = 7x^6 - 6x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \\ Q(x) = 8x^7 - 6x^6 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} G(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 13x + 1 \\ H(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x^5 - 9x \end{cases}$

Remarques

En général :
d°(P + Q) d°P + d°Q
Exemple :
$P(x) = x^2 + x$
$Q(x) = -x^2 + 5$

B- Produit d'un nombre réel par un polynôme

Définition Soit le polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
et soit k un nombre réel.
Le produit du nombre réel k par le polynôme P(x) est le polynôme noté kP(x) défini par :

$$kP(x) = ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \dots + ka_1 x + ka_0$$

Omar Khayyam
عمر الخيام
(1050-1122)
Poète, mathématicien, astronome et philosophe.
Il a étudié les polynômes du troisième degré (cubiques) et leurs racines positives.

Exemple

- On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 4$$
$$Q(x) = x^4 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 4$$

On a : $3P(x) - 2Q(x) = 3(7x^3 - 5x^2 + 3x + 4) - 2\left(x^4 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 4\right)$

$3P(x) - 2Q(x) = (21x^3 - 15x^2 + 9x + 12) + (-2x^4 + 12x^3 - 3x^2 + 2x - 8)$

$3P(x) - 2Q(x) = -2x^4 + 33x^3 - 18x^2 + 11x + 4$

C- Produit de deux polynômes

On considère les deux polynômes : $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 - 3x + 4$

On a : $P(x) \times Q(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1)(2x^3 - 3x + 4)$

$P(x) \times Q(x) = 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 6x^4 + 9x^2 - 12x + 2x^3 - 3x + 4$

$P(x) \times Q(x) = 2x^6 + 2x^5 - 9x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 15x + 4$

Donc $P(x) \times Q(x)$ est un polynôme et $d°(P \times Q) = 6$

Propriété Le produit de deux polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme et $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$.

Calculer le produit des deux polynômes et déterminer le degré de ce produit, dans chacun des cas suivants :

(1) $P(x) = 3x^4 - 2x$ et $Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$

(2) $G(x) = x^3 - x^2 + x$ et $H(x) = 2x^2 - 3x + 5$

4 Division par $(x - \alpha)$

Propriété Soit $P(x)$ un polynôme de degré non nul n.

Soit α un nombre réel.

Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

- $Q(x)$ est appelé quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.
- $P(\alpha)$ est appelé reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.

Remarques

Le produit du polynôme nul par n'importe quel polynôme, est le polynôme nul.

Exemples et applications

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 2$

Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 3)\,Q(x) + P(3)$

- On a : $P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 3 - 2$

Donc : $P(x) - P(3) = 2(x^3 - 3^3) - 5(x^2 - 3^2) - 5(x - 3)$

$= 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 5(x - 3)(x + 3) - (x - 3)$

$= (x - 3)[2(x^2 + 3x + 9) - 5(x + 3) - 1]$

$= (x - 3)(2x^2 + 6x + 18 - 5x - 15 - 1)$

$P(x) - P(3) = (x - 3)(2x^2 + x + 2)$

Donc $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x + 2) + P(3)$

Il en découle que $Q(x) = 2x^2 + x + 2$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 3)$ et $P(3) = 4$ en est le reste.

Rappel

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

- On peut calculer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - 3)$ comme c'est le cas pour les nombres entiers naturels en adoptant la disposition suivante :

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 2x^3 - 5x^2 - x - 2 & x - 3 \\
\cline{3-3}
-(x-3)\times 2x^2 : & -2x^3 + 6x^2 & 2x^2 + x + 2 \leftarrow \text{quotient} \\
\cline{2-2}
 & x^2 - x - 2 & \\
-(x-3)\times x : & -x^2 + 3x & \\
\cline{2-2}
 & 2x - 2 & \\
-(x-3)\times 2 : & -2x + 6 & \\
\cline{2-2}
 & \text{reste} \longrightarrow 4 &
\end{array}
$$

Donc : $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x + 2) + 4$

$Q(x) = 2x^2 + x + 2$ et $P(3) = 4$

Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme : $T(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 52$ par $(x + 2)$

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 3x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 52 & x + 2 \\
\cline{3-3}
-(x+2)\times 3x^3 : & -3x^4 - 6x^3 & 3x^3 - 7x^2 + 14x - 26 \\
\cline{2-2}
 & -7x^3 + 0x^2 + 2x - 52 & \\
-(x+2)\times(-7x^2) : & 7x^3 + 14x^2 & \\
\cline{2-2}
 & 14x^2 + 2x - 52 & \\
-14x\,(x+2) : & -14x^2 - 28x & \\
\cline{2-2}
 & -26x - 52 & \\
+26\,(x+2) : & 26x + 52 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Donc : $T(x) = (x + 2)(3x^3 - 7x^2 + 14x - 26)$

Ce qui signifie que le quotient de la division de $T(x)$ par $(x + 2)$ est $3x^3 - 7x^2 + 14x - 26$ et le reste est nul.

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x - 11$ et $\alpha = -4$

(2) $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 4x + 3$ et $\alpha = 1$

(3) $P(x) = 4x^6 + 6x^5 - 2x^3 + 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fut le premier à démontrer (en 1799) que tout polynôme peut se décomposer en produit de polynômes du premier ou du second degré.

5 Racine d'un polynôme

Définition Soit $P(x)$ un polynôme et soit α un nombre réel.

On dit que α est une racine (ou un zéro) du polynôme $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$.

Exemples et applications

- On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 45$.
  - On a : $P(1) = 2 - 3 - 4 - 45 = -50$.

  Donc 1 n'est pas une racine de $P(x)$ (car $P(1) \neq 0$).
  - On a : $P(3) = 2 \times 3^4 - 3 \times 3^3 - 4 \times 3^2 - 45$.

    $P(3) = 162 - 81 - 36 - 45$.

    $P(3) = 0$.

  Donc 3 est une racine du polynôme $P(x)$.
- On considère le polynôme $F(x) = (2m - 1)x^3 + 5x^2 - (1 - m)\,x + 3$.

  Déterminer la valeur de m du nombre m pour laquelle 2 est une racine de $F(x)$.

Propriété Soit $P(x)$ un polynôme de degré n tel que $n \geq 1$

Soit α un nombre réel.

Le nombre α est une racine du polynôme si et seulement si l'on peut trouver un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que pour tout réel x : $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$

- On dit alors que $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$

Exemples et applications

- On considère le polynôme $P(x) = x^3 - (3+\sqrt{2})x^2 + (2+3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$

  On a : $P(2) = 8 - 12 - 4\sqrt{2} + 4 + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$

  Comme $P(2) = 0$, alors 2 est une racine du polynôme $P(x)$

  Donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$ c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - 2)Q(x) \text{ et } d^\circ Q = 2$$

On peut déterminer le polynôme $Q(x)$ au moyen des deux méthodes déjà vues aux paragraphes précédents.

Remarques

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Le nombre 1 est racine de $P(x)$ si et seulement si :
$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0$
(c'est-à-dire si la somme des coefficients est nulle)

En d'autres termes

Le nombre α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - (3+\sqrt{2})x^2 + (2+3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} & x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 & x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} \\
\cline{1-1}
\quad -(1+\sqrt{2})x^2 + (2+3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} & \\
\quad (1+\sqrt{2})x^2 - 2(1+\sqrt{2})x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} & \\
\qquad\qquad -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Donc $\boxed{P(x) = (x-2)\left(x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}\right)}$

Par suite $\boxed{Q(x) = x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}}$

- On considère le polynôme $G(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

  On a : $G(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - 6 \times 4 + 8$

  $G(4) = 64 - 48 - 24 + 8 = 0$

  $G(4) = 0$; donc 4 est une racine du polynôme $G(x)$.

  Déterminons le polynôme $H(x)$ tel que $G(x) = (x - 4)H(x)$.

  On peut déterminer le polynôme $H(x)$ en employant la méthode suivante :

  Comme $d^\circ G = 3$, alors $d^\circ H = d^\circ G - 1 = 2$

  Donc : $H(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels tels que

  $G(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$

  c'est-à-dire :

  $$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c$$

  ou encore :

  $a = 1$; $b - 4a = -3$; $c - 4b = -6$; $-4c = 8$

  $a = 1$; $b = 1$; $c = -2$

  Donc : $\boxed{G(x) = (x - 4)(x^2 + x - 2)}$.

  D'où : $\boxed{H(x) = x^2 + x - 2}$.

- Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ et déterminer le polynôme $Q(x)$ quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$ dans chacun des cas suivants :

  (1) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 36$; $\alpha = -2$.

  (2) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15$; $\alpha = 3$.

  (3) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Commentaire

Soit α une racine du polynôme $P(x)$.
Pour déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, on peut employer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :
- Première méthode : Utilisation de la disposition des calculs de la division euclidienne par $(x - \alpha)$. L'avantage de cette technique est de permettre de vérifier la validité du résultat en obtenant un reste nul.
- Deuxième méthode : Utilisation de l'égalité de deux polynômes qui se ramène à des systèmes simples à résoudre.

4 POINTS ESSENTIELS

Polynômes

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit x un nombre réel.

On considère l'expression $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$P(x)$ (ou P) est appelé **polynôme**.

Les nombres réels a_0 ; a_1 ; … ; a_n sont appelés **coefficients** du polynôme $P(x)$

- Si $a_n \neq 0$, alors le nombre entier naturel n est appelé **degré** du polynôme $P(x)$ et se note : **$n = d°P$**
- Si $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$, alors $P(x) = 0$ est le **polynôme nul**.
- Pour que deux polynômes P et Q soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient le même degré et que les coefficients des termes de même degré soient deux à deux égaux.

Opérations sur les polynômes

Soient $P(x)$, $Q(x)$ deux polynômes et k un nombre réel.

- Somme : $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$.
- Produit : $(P \times Q)(x) = P(x)Q(x)$.
- Produit par un nombre réel : $(kP)(x) = k \times P(x)$.
- Degré du produit : $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$.

Division par $(x - \alpha)$ – Racine d'un polynôme

- Soit $P(x)$ un polynôme de degré n où $n \in \mathbb{N}^*$.

  Soit α un nombre réel.

  Il existe un polynôme unique $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

  Le polynôme $Q(x)$ et le réel $P(\alpha)$ sont appelés respectivement **le quotient** et **le reste** de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.
- α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ si et seulement si : $P(\alpha) = 0$.

4 EXERCICES RESOLUS

1 Egalité de deux polynômes

On considère les deux polynômes

$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$

$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

Solution

On a :

$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$

$Q(x) = 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx + ax^2 + bx + c$

$Q(x) = 2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (2c - 3b + a)x^2 + (-3c + b)x + c$

Ainsi $P(x) = Q(x)$ si et seulement si :

$$2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (2c - 3b + a)x^2 + (-3c + b)x + c = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 2a = 12 \\ 2b - 3a = -36 \\ 2c - 3b + a = 47 \\ -3c + b = -30 \\ c = 7 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = 6 \\ b = -9 \\ c = 7 \end{cases}$$

2 Division euclidienne par $(x - \alpha)$ Racine d'un polynôme

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 20$.

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 4)Q(x)$

Solution

1) Montrons que $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$

On a : $P(4) = 4^3 - 8 \times 4^2 + 11 \times 4 + 20$

$P(4) = 64 - 128 + 44 + 20$

Donc $P(4) = 0$ c'est-à-dire que 4 est une racine de $P(x)$. D'où $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$.

2) Déterminons le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 4)Q(x)$.

Effectuons la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - 4)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 11x + 20 & x - 4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 4x^2} \qquad\qquad & x^2 - 4x - 5 \\ 0 - 4x^2 + 11x \qquad & \\ \underline{4x^2 - 16x} \qquad & \\ 0 - 5x + 20 & \\ \underline{5x - 20} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x) = (x - 4)(x^2 - 4x - 5)$

D'où : $Q(x) = x^2 - 4x - 5$

3 Méthode de Hörner

Commentaire : On considère le polynôme :

$P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

Soit $Q(x)$ le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ et R son reste.

La méthode de Hörner nous permet de connaître les coefficients de $Q(x)$ et R. Cette méthode se résume dans le tableau suivant :

Coefficients de $P(x)$	b_n	b_{n-1}	…………………	b_0
a ×		+ $b_n a$		
Coefficients de $Q(x)$ et le reste R	b_n	$b_{n-1} + b_n a$	…………………	R

1) En utilisant la méthode de Hörner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

   $P_1(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5$ par $(x - 5)$
2) En utilisant la méthode de Hörner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

   $P_2(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ par $(x + 1)$

Solution

1) Division euclidienne de $P_1(x)$ par $(x - 4)$ par la méthode de Hörner

Coefficients de $P_1(x)$	3	–8	0	–5
4		12	16	64
Coefficients de $Q_1(x)$ et reste R	3	4	16	$\boxed{59}$

reste R_1

Donc le quotient est $Q_1(x) = 3x^2 + 4x + 16$ et le reste est $R_1 = 59$

2) Division euclidienne de $P_2(x)$ par $(x + 1)$ par la méthode de Hörner

Coefficient de $P_2(x)$	1	3	–7	–27	–18
–1		–1	–2	9	18
Coefficients de $Q_2(x)$ et reste R	1	2	–9	–18	$\boxed{0}$

reste R_2

Donc le quotient est $Q_2(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ et le reste est $R_2 = 0$

Exercices d'application

Egalité de deux polynômes

1 Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x) = 4(1+x)^3 - \frac{3}{2}(1-x)^2 + (1-x+x^2)^2$

$Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + x - 2)(3x^2 + x - 3)$

$R(x) = x(1-2x^2)(x^3+2) - x^3(x^2+1)(1-x^2)$

$S(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)$

Exemple : La forme réduite et ordonnée du polynôme $A(x) = (x-2)(2x+3)^2 + 18$ est $A(x) = 4x^3 + 4x^2 - 15x$

2 Déterminer la forme réduite et le degré du polynôme $P(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = (x^2-4)^2 - (x^2+2x)^2$.

b) $P(x) = (x+1)^3(x-1)$.

c) $P(x) = (2-x)^3(x+2)$.

d) $P(x) = (x^3-1)^2(x^3+1)^2$.

e) $P(x) = (x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4)$.

3 Déterminer, sans développer complètement, le degré du polynôme $P(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = (3x^3)^4 - 9(x^3-4)(x^5+7)$

b) $P(x) = (2x^2+x+1)(x^5-2) - 2(1+x^7)$

c) $P(x) = (2-5x)^3(3+5x)^2(7-13x^2)$

d) $P(x) = (7x^5-5)^4$

Somme et produit de deux polynômes

4 Calculer la somme et la différence des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $\begin{cases} f(x) = x^7 - 6x^6 + 5x^4 + 4x^3 - x + 1. \\ g(x) = -x^7 + 9x^9 - 3x^3 + 8x^2 - 9. \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = (x^2-4)(x+2). \\ g(x) = x(2-3x)(x+2). \end{cases}$

5 On considère les deux polynômes :

$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Calculer ce qui suit :

a) $2f(x) - 3g(x)$.

b) $f(x) \times g(x)$.

c) $(f(x))^2$.

d) $(g(x))^2$.

6 Soit $P(x)$ un polynôme non nul de degré n.
Calculer, en fonction de n, le degré de chacun des polynômes suivants :

a) $(P(x))^2$; b) $(x^2+4)P(x)$; c) $(P(x))^3$

Coefficients d'un polynôme

7 Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x :

$$ax^2 + (3-2b)x + b = c + 5$$

8 Déterminer les nombres réels a et b tels que $P(x) = (x-a)^2 + b$ dans chaque cas suivant :

a) $P(x) = x^2 - 7x - 8$; c) $P(x) = x^2 + 33x + 90$

b) $P(x) = x^2 - 3x + 9$; d) $P(x) = x^2 - 50x + 1625$

Avec les factorisations

9 On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$

a) Déterminer le nombre réel a sachant que :

$$P(x) = (x^2 - 3x + a)^2 - x^2$$

b) Traduire $P(x)$ en produit de deux polynômes du second degré.

10 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

Déterminer les deux réels a et b sachant que :

$$P(x) = (ax+b)(x+1)(x+3)$$

11 Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que pour tout réel t, on ait :

$$\alpha(t+2)^2 + \beta(t+2) + \gamma = 2t^2 + 9t + 10$$

12 On considère les deux polynômes :

$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$

et $Q(x) = (6x^2 - 9x + 7)(ax^2 + bx + c)$

Déterminer les réels a, b et c sachant que les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux.

13 Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la relation proposée soient réalisée dans chaque cas suivant :

a) $(x-1)(ax^2+bx+c) = -2x^3 - 3x^2 + 5x$

b) $(x-2)^2(ax^2+bx+c) = 3x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 24x + 24$

c) $(x^2-1)(ax^3+bx^2+cx) = x^5 + x^3 - 2x$

d) $(2x+1)^2(ax^2+bx+c) = 4x^4 + 4x^3 - 35x^2 - 36x - 9$

Calcul de P(a), a donné

14 On considère le polynôme :

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$

Calculer : $P(0)$; $P(1)$; $P\left(\frac{1}{2}\right)$; $P(\sqrt{2})$; $P(-2)$

Racine d'un polynôme

15 On considère le polynôme :

$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 74$

Soit : $a = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$

1) Calculer a^2, a^3 et a^4. En déduire $P(a)$.

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$$

16 Montrer que le polynôme :

$$P(x) = -x(3x-2) + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

est divisible par $x + \frac{1}{3}$ et par $x - \frac{2}{3}$

17 Les nombres proposés sont-ils racines du polynôme $f(x)$ dans chaque cas suivant ?

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 21$; $a = 3$

b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$; $\begin{cases} a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ b = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$

c) $f(x) = 5x^4 - x^3 - 5x^2 + x$; $a = \frac{1}{5}$

d) $f(x) = x^7 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$; $a = 1$ et $b = -1$

18 On considère le polynôme $P(x) = x^6 - 4\sqrt{2}\,x$

1) Montre que $\sqrt{2}$ est une racine de $P(x)$.

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tels que :

$$P(x) = (x - \sqrt{2})\,Q(x)$$

[Remarquer que $P(x) = x^6 - (\sqrt{2})^6 - 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$].

19 Déterminer le nombre réel α de telle sorte que le polynôme $P(x)$ admette x_0 comme racine dans chacun des deux cas suivants :

1) $\begin{cases} P(x) = \alpha x^2 + 6x - 4 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} P(x) = 2x^4 + \alpha x^3 - x + 1 \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

20 Déterminer les racines du polynôme

$P(x) = x(x+1)(x+2) - a(a+1)(a+2)$

où a est un nombre réel donné.

Division par $(x - a)$

21 Déterminer le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $x - a$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ par $x + 1$

b) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ par $x - 2$

c) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 5$ par $x + \frac{3}{2}$

22 Déterminer le quotient et le reste dans la division de $E(x)$ par $F(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $E(x) = 5x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1$ et $F(x) = x - 2$

b) $E(x) = 4x^3 + 5x^2 - x + 7$ et $F(x) = x + 1$

c) $E(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ et $F(x) = x - 1$

d) $E(x) = 4x^5 - 5x^3 + 2x + 1$ et $F(x) = 2x + 3$

23 On considère le polynôme :

$P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15$.

1) Montrer que le nombre 3 est racine de $P(x)$.

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x-3)Q(x)$$

24 On considère le polynôme $A(x) = x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6$

1) Montrer que $4A(x) = (2x - 3\sqrt{3})^2 - 3$

2) Factoriser $A(x)$.

3) Soit le polynôme
$B(x) = x^3 - (3\sqrt{3} + 1)x^2 + 3(2 + \sqrt{3})x - 6$

a) Montrer que $B(x)$ est divisible par $(x-1)$.

b) Déterminer le polynôme $C(x)$ tel que :

$$B(x) = (x-1)C(x)$$

puis factoriser $B(x)$.

25 On considère les deux polynômes :

$A(x) = x^2(x^2 - 2x + 3) + (x-1)^2 + 1$

$F(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

a) Montrer que $F(x)$ est divisible par $(x-1)$.

b) Vérifier que $F(x) = (x-1)A(x)$.

26 On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 15x - 4$

1) a) Montrer que 4 est une racine de $P(x)$.

b) En effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-4)$, montrer que : $P(x) = (x-4)(x^2+4x+1)$

2) a) Montrer que : $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$.

b) Déterminer les deux nombres réels tels que :

$$P(x) + 2(x-4) = (x-4)(x+a)(x+b)$$

27 On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$.

1) a) Calculer P(1).

b) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x - 1)$

2) a) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que : $(ax + b)(x - b) = 3x^2 - 4x - 4$.

b) Résoudre dans IR l'équation : $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

c) En déduire dans IR les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercices de renforcement des apprentissages

28 On considère le polynôme :

$$P(x) = m(m+1)x^4 + (m+1)x^3 + (m^2 - 4)x + 4$$

où m est un nombre réel.

Déterminer, suivant les valeurs de m, le degré du polynôme $P(x)$.

29 Déterminer, selon les valeurs de m, le degré du polynôme $P(x) = (mx^5 - 1)(x^3 + (2 - m)x^5 - 7)$.

30 1) Montrer que, pour tout nombre réel t, on a :

$$t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$$

2) Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3$.

a) Vérifier que : $P(x) = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3$.

b) Factoriser $P(x)$ en produit de deux polynômes du second degré.

c) Montrer qu'il existe un nombre réel α que l'on déterminera tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)^2 ((x - \alpha)^2 + 2)$$

31 Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (ax^2 + bx + c)^2$$

32 Soit a un nombre réel. On considère les polynômes :

$f(x) = x^2 - ax + 1$

$g(x) = x^4 - (a^3 - 2a)x + a^2 - 1$

Déterminer le polynôme $h(x)$ tel que $g(x) = f(x)\,h(x)$.

33 1) On considère le polynôme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 1)$ si et seulement si : $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$.

2) Parmi les polynômes suivants, déterminer ceux qui sont divisibles par $(x - 1)$:

a) $P_1(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 6x - 3$

b) $P_2(x) = -x^6 + x^4 + x^3 + 7x^2 - 8$

c) $P_3(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

34 Dans chacun des cas suivants, le nombre a est-il racine du polynôme $P(x)$? Si oui, factoriser $P(x)$.

1) $P(x) = -x^4 + 16$; $a = -2$.

2) $P(x) = x^3 + 27$; $a = -3$.

3) $P(x) = -\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$; $a = -1$.

4) $P(x) = 6x^3 - x^2 - x + 6$; $a = -1$.

5) $P(x) = 3x^3 - 24$; $a = 2$.

6) $P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 7x - 3)$; $a = \frac{1}{2}$.

7) $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8$; $a = 2$ ou $a = -2$

8) $P(x) = x^3 - 19x + 30$; $a = 2$ ou $a = 3$.

35 On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 3x + b$

où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer a et b sachant que 2 et $\frac{1}{2}$ son deux racines de $P(x)$.

36 Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x - 2)$ et par $(x + 3)$:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b.$$

37 Soient a, b et c des nombres réels.

On considère les deux polynômes :

$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$

$Q(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$.

Déterminer a, b et c sachant qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $P(x) = Q(x)R(x)$.

38 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12$.

1) Calculer $P(2\sqrt{3})$ et en déduire que $P(x)$ et divisible par $\left(x - 2\sqrt{3}\right)$.

2) Effectuer la division du polynôme $P(x)$ par $\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

3) Factoriser $P(x)$ en produit de polynôme du premier degré.

39 On considère le polynôme $P(x)$ tel que :

$P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

1) a) Vérifier que -1 est une racine de $P(x)$.

b) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x + 1)$.

c) En déduire que : $P(x) = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6)$.

2) a) Montrer que $x^2 + 5x + 6 = (x^2 - 9) + 5(x + 3)$.

b) Factoriser $x^2 + 5x + 6$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

40 Soit $P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$P(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5)$.

2) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$.

3) Déduire de ce qui précède une factorisation de $P(x)$ en produit de polynômes du premier degré.

41 1) Montrer que $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

2) Soit $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

Déterminer un polynôme $S(x)$ tel que $P(x) = (S(x))^2$.

42 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- $f(x)$ et $g(x)$ sont de degré 3.
- Le degré de $f(x) + g(x)$ est 0.

(c'est-à-dire que $f(x) + g(x) = k$ où k est une constante réelle fixe).

43 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- Le degré de $f(x)$ est 4.
- Le degré de $g(x)$ est 4.
- Le degré de $f(x) + g(x)$ est 1.

44 Montrer qu'il existe un polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que :

$$P(1) = 3,\ P(-1) = 4 \text{ et } P(2) = 3$$

45 1) Montrer que $4(t^2 - t - 72) = (2t - 1)^2 - 289$

2) On considère les deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

$f(x) = (8x + 7)^2 (8x + 6)(x + 1) - 9$

$g(x) = \alpha(8x + 7)^4 + \beta(8x + 7)^2 + \gamma$

où α, β et γ sont des réels donnés

a) Déterminer α, β et γ tels que $f(x) = g(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - t - 72 = 0$.

c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

46 Montrer que le polynôme :

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

47 On considère le polynôme :

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + 12x + 4$$

Déterminer a, b et c tels que :

$$P(x) = (x^2 + bx + c)^2$$

48 Déterminer le nombre réel α pour que le nombre 3 soit racine du polynôme $x^3 - 6x^2 + (2 + 3\alpha)x - 2\alpha$ puis factoriser le polynôme obtenu.

49 Déterminer tous les polynômes $P(x)$ tels que :

- le degré de $P(x)$ est 3.
- $P(1) = P(2) = P(3) = 0$

50 Déterminer deux polynômes $R(x)$ et $S(x)$ de degré 3, divisibles par $(x - 1)$ tels que :

$$R(0) = 0 \quad \text{et} \quad S(3) = 0$$

51 Montrer que le nombre a est une racine du polynôme $x^3 - (3 + a)x^2 + (2 + 3a)x - 2a$ puis factoriser ce polynôme.

52 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- Le degré de $f(x)g(x)$ est 5.
- $f(0) + g(0) = 0$
- $f(0) \neq 0$ et $g(0) \neq 0$

53 Soit $P(x)$ un polynôme de degré 3 tel que :

$$P(2) = 4 ;\ P(3) = 9 ;\ P(4) = 16 ;\ P(1) = 7.$$

On pose $Q(x) = P(x) - x^2$

1) Montrer qu'il existe un nombre constant k tel que :

$$Q(x) = k(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

2) Calculer Q(1) et en déduire la valeur de k.

3) Déterminer $P(x)$.

54 On considère le polynôme :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

1) Montrer que les nombres -1 et 2 sont deux racines du polynôme $P(x)$.

2) Factoriser $P(x)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

4) a) Vérifier que, pour tout nombre réel non nul x, on a :

$$\frac{6x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} + 6$$

b) En déduire, dans $\mathbb{R}^*$, les solutions de l'équation :

$$6x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

55 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1) Montrer que le nombre -3 est une racine du polynôme $P(x)$.
2) Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que :
$$P(x) = \alpha(x+3)^3 + \beta(x+3)^2 + \gamma(x+3)$$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2(x+3)^2 - 11(x+3) + 14 = 0$$
[Remarquer que -1 est une solution de cette dernière équation].
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

56 On considère le polynôme :
$$P(x) = x^3 + (1-\sqrt{2})x^2 - (6+\sqrt{2})x + 6\sqrt{2}$$

1) a) Montrer que $\sqrt{2}$ est une racine de $P(x)$.
b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = (x - \sqrt{2})\,Q(x)$$
c) Montrer que 2 est une racine de $Q(x)$.
2) Factoriser le polynôme $P(x)$.

Exercices de synthèse

57 On considère les deux polynômes :
$$P(x) = 4x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad R(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

1) a) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x+1)$.
b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ qui vérifie :
$$P(x) = (x+1)Q(x)$$
2) Montrer que : $R(x) = (x-1)(2x+1)^2$
3) Résoudre dans IR les deux équations :
a) $P(x) = 0$; b) $R(x) = 0$.
4) Résoudre dans IR les deux inéquations :
a) $P(x) \geq 0$; b) $R(x) \leq 0$.
5) En déduire l'ensemble des nombres réels x qui vérifient :
$$-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1.$$

58 1) a) Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$8(8x^2 - 2x - 1) = (8x-1)^2 - 9$$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^2 - 2x - 1 = 0$.
2) On considère le polynôme $P(x) = 32x^3 - 6x - 1$.
a) Vérifier que le nombre $-\frac{1}{4}$ est racine de $P(x)$.
b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = (4x+1)Q(x)$$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.

59 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$.

1) Calculer $P(1)$, $P(-2)$ et $P(2)$.
2) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x-2)$.
3) Montrer que si α est une racine non nulle du polynôme $P(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine du polynôme $P(x)$.
4) En déduire les trois racines du polynôme $P(x)$.

60 Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que :
$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

61 Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$.

1) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x-2)$.
2) Montrer que : $P(x) - 2(2-x) = (x-2)^3$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$|P(x) - 2(2-x)| \leq 8 \times 10^{-3}$$
4) En déduire une valeur approchée de $P(1{,}845)$ à 8×10^{-3} près.

62 On considère le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$.

1) Vérifier que (-1) est une racine du polynôme $P(x)$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = (x+1)Q(x)$$
3) Calculer $P(1+\sqrt{2})$ et $Q(1+\sqrt{2})$
4) Déterminer le nombre réel b tel que :
$$Q(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x + b)$$
5) Montrer que, pour tout nombre réel x de $]2 ; 1+\sqrt{2}[$ on a : $-4 < P(x) < 0$.

63 Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)$ et par $(x-2)$.
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.
En déduire le signe de $P(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$x\sqrt{x} - 6x + 11\sqrt{x} \leq 6$$
3) a, b et c sont des nombres réels tels que :
$$a + b + c = 6 \quad \text{et} \quad ab + bc + ca = -11 \quad \text{et} \quad abc = -6$$
a) Montrer que $P(a) = 0$.
b) Déterminer a, b et c.

64 n est nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On consière le polynôme : $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = x(x+1)(2x+1)Q(x)$$

65 Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$.

1) Déterminer les nombres réels a, b, c et d sachant que :
$$\begin{cases} P(x+1) - P(x) = x^2 \\ P(0) = 0 \end{cases}$$
2) En déduire la valeur de la somme :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2$$

66 a, b et c sont des nombres réels deux à deux distincts.
On considère le polynôme :
$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

1) Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
2) En déduire que, pour tout réel x, on a : $P(x) = 1$.

67 $P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \dots - 12x^2 + 12x + 1$
Calculer $P(11)$ et $P(13)$.

68 Soit n un nombre entier naturel non nul.
On considère le polynôme :
$$P(x) = (x-2)^{3n} + (x-1)^{2n} - 1$$

1) Montrer l'existence d'un polynôme $Q(x)$ tel que :
$P(x) = (x-2)Q(x)$ et déterminer le degré de $Q(x)$.
2) Calculer $P(1)$ en fonction de n.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-1)$.
3) On suppose que $n = 1$.
Montrer que $P(x) = (x-2)((x-a)^2 + b))$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.
4) Montrer que pour tout x de $]2 ; +\infty[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(x) > 0$.

69 On considère le polynôme :
$$P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$$
où n est un nombre entier naturel non nul.

1) Montrer que : $P(-1) = 0$.
2) Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = (x-1)^2 (x+1)\,Q(x)$$
et déterminer le degré du polynôme $Q(x)$.

70 Soit $P(x) = ax^5 + bx^4 + 1$.
Montrer qu'il existe deux valeurs numériques de a et b telles que $P(x) = (x-1)^2\,Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme que l'on déterminera.

71 Soit $P(x)$ un polynôme de degré 3 et admettant trois racines non nulles et distinctes α, β et γ : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.
Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

72 Soit $P(x)$ est un polynôme de degré 4 tel que :
$$P(4) = 0 \text{ et } P(1) = P(2) = P(3) = 6$$
et on considère le polynôme $f(x) = P(x) - 6$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(4)$.
2) Déterminer trois racines évidentes du polynôme $f(x)$ et en déduire l'existence d'un polynôme $g(x)$ tel que :
$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)g(x)$$
Quel est le degré de $g(x)$.
Calculer $g(4)$.
3) En déduire que $g(x)$ s'écrit sous la forme :
$$g(x) = ax - (1 + 4a)$$
où a est un nombre réel non nul.
4) Déterminer tous les polynômes $P(x)$ de degré 4 tels que :
$$P(4) = 0 \text{ et } P(1) = P(2) = P(3) = 6$$

73 On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 20x^2 + 4$.

1) Vérifier que : $P(x) = (x^2 - 2)^2 - 16x^2$.
2) Factoriser $P(x)$ en produit de deux polynôme du second degré.
3) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 5$.
Montrer que $n^4 - 20n^2 + 4$ n'est pas premier.

74 1) Soient α, β et γ trois nombres réels donnés.
Montrer qu'il existe un polynôme $P(x)$ du second degré tel que :
$$\begin{cases} P(1) = \alpha \\ P(2) = \beta \\ P(3) = \gamma \end{cases}$$
2) Déterminer $P(x)$ dans chacun des deux cas suivants :
a) $\alpha = \beta = \gamma = 2500$; b) $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $\gamma = 9$

75 Soient α, β et γ des nombres réels donnés. On pose :
$$A(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \; ; \; C(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$
$$B(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \; ; \; D(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$
$$P(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x) + \delta D(x)$$
Montrer que $P(x)$ est l'unique polynôme qui vérifie :
$$P(1) = \alpha \; ; \; P(2) = \beta \; ; \; P(3) = \gamma \; ; \; P(4) = \delta$$

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

76 Soit $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ où a_0 ; a_1 ; … ; a_n sont des nombres entiers relatifs et $a_0 \neq 0$.

On suppose qu'un nombre entier naturel α est racine du polynôme $P(x)$

Montrer qu'il exite un entier relatif β tel que $a_0 = \alpha\beta$

77 1) Vérifier que : $4(a^2 - a - 1) = (2a - 1)^2 - 5$.

2) On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^4 - x + a \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 - ax + 1$$

a) On pose : $R(x) = (a^3 - 2a - 1)\,x + (-a^2 + a + 1)$.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q'(x)$ tel que :

$$P(x) = Q(x)\,Q'(x) + R(x)$$

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles :

$$P(x) = Q(x)\,Q'(x)$$

Problèmes

78 1) On considère le polynôme :

$$F(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$$

a) Montrer que pour tout nombre réel non nul x, on a :

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}F(x)$$

b) En déduire que si a est une racine de $F(x)$, alors $\frac{1}{a}$ est aussi une racine de $F(x)$.

2) On dit qu'un polynôme $P(x)$ "est symétrique de degré n" si son degré est n et si $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x)$ pour tout x non nul.

Le polynôme $G(x) = 2(1 + x^4) - (1 + x)^4$ est-il un polynôme symétrique ?

3) Soit le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Est-ce que 0 est une racine de $P(x)$?

b) Vérifier que $P(x)$ est un polynôme symétrique de degré 4.

c) Pour tout nombre réel non nul x, on pose $t = x + \frac{1}{x}$

Calculer t^2 en fonction de x.

En remarquant que :

$$P(x) = x^2\left(x^2 - x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

exprimer $x^2 - x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ en fonction de t

Montrer alors que pour tout nombre réel non nul x, on a :

$P(x) = 0$ signifie que $\left(t = x + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad Q(t) = 0\right)$

où Q(t) est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

• Déterminer les racines du polynôme $P(x)$.

79 Sur la figure ci-contre, on dispose d'un cylindre de base circulaire de rayon 20 cm et de hauteur h.

A l'intérieur de ce cylindre, il y a une boule de rayon 14 cm couverte d'eau (de telle sorte que l'eau arrive à ras de la boule).

On remplace cette boule par une autre boule de rayon x cm telle que $0 \leq x \leq 20$.

1) Soit $V(x)$ le volume d'eau dans le cylindre qui peut couvrir la boule de rayon x.

Calculer $V(x)$ en fonction de x.

2) a) Montrer qu'il existe un polynôme $W(x)$ que l'on déterminera tel que :

$$V(x) - V(14) = (x - 14)W(x)$$

b) En déduire le signe de $V(x) - V(14)$ selon les valeurs de x.

c) Quel est le volume d'eau nécessaire pour couvrir la boule ?

Polynômes et calcul de sommes usuelles

80 1) Déterminer un polynôme $P(x)$ du second degré tel que :

$$P(x + 1) - P(x) = x$$

En déduire la valeur de la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ où n est un entier naturel non nul.

2) Déterminer un polynôme $Q(x)$ de degré 3 tel que :

$$Q(x + 1) - Q(x) = x^2$$

En déduire la valeur de la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

3) Déterminer un polynôme $R(x)$ de degré 4 tel que :

$$R(x + 1) - R(x) = x^3$$

En déduire la valeur de la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

4) Déterminer un polynôme $F(x)$ de degré 4 tel que :

$$F(x + 1) - F(x) = x(x + 1)(x + 2)$$

En déduire la valeur de somme :

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2)$$

Equations et inéquations du premier degré - Systèmes

5

Capacités attendues

* Résolutions d'équations et d'inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.
* Résolution de systèmes du premier degré à deux inconnues en utilisant les différentes méthodes (combinaison linéaire ; substitution ; déterminant).
* Mathématisation de situations comportant des grandeurs variables en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes.
* Représentation graphique des solutions d'inéquations ou de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues et utilisation du graphique pour régionner le plan et pour la résolution de problèmes simples sur la programmation linéaire.

Contenu

• Activités préparatoires

- Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue
- Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue
- Inéquation et géométrie
- Signe du binôme $ax + b$
- Equations du premier degré à deux inconnues
- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
- Inéquations du premier degré à deux inconnues - programmation linéaire

• Définitions et règles

- Equation du premier degré à une inconnue
- Inéquation du premier degré à une inconnue
- Signe du binôme $ax + b$
- Equation du premier degré à deux inconnues
- Système de deux équations du premier degré
- Signe de $ax + by + c$ - Régionnement du plan

• Points essentiels

• Exercices résolus

• Exercices et problèmes

5 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 — Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

A Résoudre les équations suivantes :

1) $2x-1=2(x-0,5)+3\left(x-\frac{2}{3}\right)$; 2) $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{2}=4-\frac{5x}{12}$

3) $|x-1|=5$; 4) $\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x-\frac{3}{7}\right)+\left(\sqrt{3}-2x\right)\left(x+\frac{18}{5}\right)=0$

5) $\sqrt{x^2+7}=4$; 6) $\frac{2x-7}{4-x}=\frac{3}{5}$

B 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x+3|=7$; b) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}$

c) $|3x-4|=2x+5$; d) $|x+6|+|x-10|=16$

2) Discuter, selon les valeurs du nombre réel m, les solutions de l'équation : $m^2x+5=25x+m$.

ACTIVITE 2 — Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue

A Résoudre les inéquations et les systèmes suivants :

1) $-2x+1\geq x-3$; 2) $\sqrt{2}\,x-\frac{3}{4}<\frac{2x-3}{3}+4\left(x-\sqrt{2}\right)$

3) $\begin{cases}2x-3\leq 1-3x\\ 5x+3>x+9\end{cases}$; 4) $|x-2|\leqslant\frac{1}{2}$

5) $|2x-1|>3$; 6) $\sqrt{x+5}>3$

B Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs solutions :

a) $x^2-4\geqslant(2x+3)(x-2)$; b) $\frac{1}{x-1}\leqslant\frac{2}{x}$

c) $|x-4|\leqslant\frac{1}{2}$; d) $|x+6|+|x-10|>16$

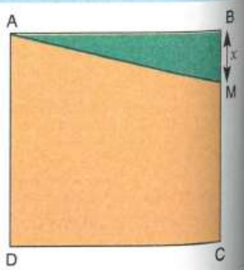
ACTIVITE 3 — Inéquation et géométrie

A L'unité de mesure des longueurs est le cm.
Soit ABCD un carré de côté de longueur 4cm.
Soit M un point du côté [BC] tel que $BM=x$.

1) Vérifier que l'aire A_1 du triangle ABM est égal à $2x$.
2) Vérifier que l'aire A_2 du trapèze AMCD est égal à $16-2x$.
3) Déterminer la position du point M sur [BC] dans chacun des deux cas suivants :

a) $A_1=A_2$; b) $A_1=\frac{1}{3}A_2$

4) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $A_1<\frac{1}{2}A_2$



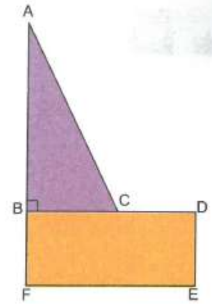
5 ACTIVITES PREPARATOIRES

B On considère la figure ci-contre où :

ABC est un triangle rectangle en B et BDEF est un rectangle.

On pose : AB = 6 , BF = 2 , CD = 1 et BC = x

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du triangle ABC est plus petite (strictement) que l'aire du rectangle BDEF.



ACTIVITE 4 — Signe du binôme ax + b

Soient a et b deux nombres réels et $a\neq 0$.

1) Vérifier que $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$
2) Résoudre chacune des deux inéquations : (1) $x+\frac{b}{a}>0$; (2) $x+\frac{b}{a}<0$
3) Déterminer le signe du binôme $x+\frac{b}{a}$ et en déduire le signe de $ax+b$.
4) Etudier les signes des deux binômes $2x-3$ et $4-x$.
En déduire les solutions de l'inéquation $(2x-3)(4-x)\leq 0$.
5) Résoudre les deux inéquations : (1) $(2x+5)(x-4)\geq 0$; (2) $4x^2-9<0$

ACTIVITE 5 — Equations du premier degré à deux inconnues

Soient x et y deux nombres réels qui vérifient l'égalité (E) : $2x-y=7$

Cette égalité est appelée **équation du premier degré à deux inconnues** x et y.

Le couple $(x\,;\,y)$ est appelé solution de l'équation (E).

1) a) Montrer que le couple $(2\,;\,-3)$ est une solution de l'équation (E).
b) Le couple $(3\,;\,1)$ est-il solution de l'équation (E) ?
c) Si le couple $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation (E) et $y=1$, déterminer x.
2) Soit $(x\,;\,y)$ une solution de l'équation (E).
a) On pose $x=\alpha$; montrer que $y=2\alpha-7$.
Le couple $(\alpha\,;\,2\alpha-7)$ est-il solution de l'équation (E) pour tout nombre réel α ?
b) On pose $y=\beta$; montrer que $x=\frac{\beta+7}{2}$
Le couple $\left(\frac{\beta+7}{2}\,;\,\beta\right)$ est-il solution de l'équation (E) pour tout nombre réel β ?
c) En déduire les solutions de l'équation (E).
3) Résoudre l'équation $4x-5y+3=0$.

L'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ qui vérifient l'équation :
(E) $2x-y=7$
est appelé ensemble des solutions de l'équation (E) et est noté souvent par la lettre S.

5 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 6 — Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

A 1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 5y = 17 \\ 3x + 2y = 25 \end{cases}$

2) Une femme a acheté deux bouquets de fleurs :

- Le premier bouquet contient une rose et cinq fleurs d'iris au prix de 17 dirhams.
- Le deuxième bouquet contient trois roses et deux fleurs d'iris au prix de 25 dirhams.

Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une fleur d'iris ?

B Une personne a déposé une partie de son capital dans une banque A au taux de 10 %, et a déposé la deuxième partie de ce capital dans une banque B au taux de 9 %. Après une année, elle obtient des intérêts dont le montant est de 2000 dirhams. En revanche, si cette personne dépose la première partie dans la banque B et la deuxième partie dans la banque A, elle obtiendra 2750 dirhams d'intérêts.

Quel est le capital dont dispose cette personne ?

ACTIVITE 7 — Inéquations du premier degré à deux inconnues - Programmation linéaire

A Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la droite (Δ) d'équation : $x - 2y + 3 = 0$

1) Construire la droite (Δ) les points A(1 ; 1) ; B(0 ; 2) ; C(–2 ; 1) ; D(1 ; –1).

2) Parmi les points O, A, B, C et D, déterminer les points dont le couple de coordonnées $(x ; y)$ vérifie la relation : $x - 2y + 3 > 0$.

B Soit (E) l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et qui vérifient :

$$\begin{cases} 6x + 7y \leqslant 84 \\ 2x + 3y \leqslant 24 \\ 4x + 3y \leqslant 36 \\ y \leqslant 6 \\ y \leqslant 7 \end{cases}$$

1) Construire (E).

2) Parmi les points de (E), quels sont ceux pour lesquels $x + y$ est maximal ?

5 DEFINITIONS ET REGLES

1 Equation du premier degré à une inconnue

Définition On appelle équation du premier degré à une inconnue toute équation que l'on peut écrire sous la forme $ax + b = 0$ où x est l'inconnue et a et b sont deux nombres réels donnés.

Exemple et applications

- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x - 3 = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation et soit x un nombre réel.

$x \in S$ si et seulement si $2x = 3$ c'est-à-dire $x = \dfrac{3}{2}$.

Donc : $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) : $2x - 3 - 3(1 - x) = 9x - 7$; (2) : $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2x+5}{3} = 4 - \dfrac{x}{6}$

Propriété On considère dans IR l'équation : (E) : $ax + b = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation.

- Si $a \neq 0$, alors $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}$

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'équation (1) : $(2x - 3)\left(\dfrac{3}{2}x + 5\right) = 0$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

On a : $x \in S_1$ si et seulement si $(2x - 3 = 0$ ou $\dfrac{3}{2}x + 5 = 0)$

c'est-à-dire $\left(x = \dfrac{3}{2} \text{ ou } x = \dfrac{-5}{\frac{3}{2}}\right)$ ou encore $x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{-5}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{10}{3}$.

Donc $S_1 = \left\{-\dfrac{10}{3} ; \dfrac{3}{2}\right\}$

- Résolvons dans IR l'équation (2) : $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{3-4x}{6}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (2).

$x \in S_2$ si et seulement si : $\dfrac{2(x-1)}{6} - \dfrac{3(2x+1)}{6} = \dfrac{3-4x}{6}$

c'est à dire
$$\begin{aligned} 2(x-1) - 3(2x+1) &= 3 - 4x \\ 2x - 2 - 6x - 3 &= 3 - 4x \\ -4x + 4x &= 3 + 5 \\ 0x &= 8 \quad \text{ce qui est impossible.} \end{aligned}$$

Donc $S_2 = \varnothing$

Rappel

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue dans IR, on utilise les développements, les simplifications, les factorisations et les deux règles suivantes :

- $a = b$ si et seulement si : $a + c = b + c$.
- Si $c \neq 0$, alors : $a = b$ si et seulement si : $ac = bc$

Rappel

$A \times B = 0$ si et seulement si : $(A = 0$ ou $B = 0)$

■ Résolvons dans IR l'équation (3) : $\sqrt{6}+1-x\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (3).

$x \in S_3$ si et seulement si $\sqrt{6}+1-x\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}x+\sqrt{6}$

c'est-à-dire $x\sqrt{3}-x\sqrt{3}=1+\sqrt{6}-\sqrt{6}-1$

ou encore $0 \times x = 0$

Puisque cette dernière égalité est vérifiée par tout x de IR, alors S_3 = IR

■ Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $(3x-4)(5x+1)-2(3x-4)(1-x)=0.$

b) $\frac{4x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = 1 - \frac{x}{6}$

c) $(x-1)-2\left(3x-\sqrt{5}\right) = 2\left(\sqrt{2}-x\right)-1-3x$

2 Inéquation du premier degré à une inconnue

Définition On appelle inéquation du premier degré à une inconnue dans IR toute inéquation que l'on peut écrire sous l'une des formes suivantes : $ax + b \geq 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b < 0$,
où x est l'inconnue et a et b son deux nombres réels donnés.

La résolution d'une inéquation, du premier degré à une inconnue dans IR, revient à déterminer les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles cette inéquation (en tant qu'inégalité) est réalisée ; ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation. L'ensemble de ces valeurs est appelé **ensemble des solutions** de l'inéquation et se note généralement S.

Exemple et applications

■ Résolvons dans IR l'inéquation $2x - 3 \geq 0$.

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Soit x un nombre réel.

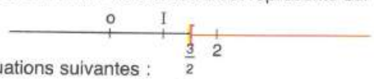
$x \in S$ si et seulement si $2x-3+3 \geq 3$

$x \in S$ si et seulement si $2x \geq 3$

$x \in S$ si et seulement si $\left(\frac{1}{2}\right)(2x) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)(3)$

c'est-à-dire si $x \geqslant \frac{3}{2}$

Donc $S = \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. Cet ensemble de solutions est représenté sur un axe :



■ Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

(1) $2(x-1)-(3x-5) \leq 6x+7+4(x-3)$

(2) $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{3} > \frac{5x-2}{12} - 1$

Remarque

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue dans IR, on utilise les développements, les simplifications, les factorisations et les règles suivantes :

- **$a \leq b$ si et seulement si : $a + c \leq b + c$**
- **Si $c > 0$, alors : $a \leq b$ si et seulement si $ac \leq bc$**
- **Si $c < 0$, alors : $a \leq b$ si et seulement si $ac \geq bc$.**

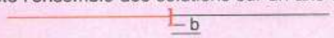
5 DEFINITIONS ET REGLES

Propriétés On considère dans IR l'inéquation : $ax + b \leq 0$.

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

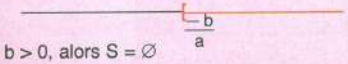
- Si $a > 0$, alors $x \leqslant -\frac{b}{a}$; donc $S = \left]-\infty;-\frac{b}{a}\right]$.

On représente l'ensemble des solutions sur un axe comme suit :



- Si $a < 0$, alors $x \geqslant -\frac{b}{a}$; donc $S = \left[-\frac{b}{a};+\infty\right[$.

On représente l'ensemble des solutions sur un axe comme suit :



- Si a = 0 et b > 0, alors S = ∅
- Si a = 0 et b ≤ 0; alors S = IR.

Exemples et applications

■ Résolvons dans IR l'inéquation (1) : $-2x + 1 < x - 3$.

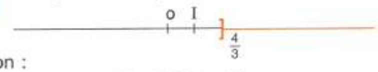
Soit S_1 l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S_1$ si et seulement si $-2x - x < -3 - 1$

$x \in S_1$ si et seulement si $-3x < -4$

$x \in S_1$ si et seulement si $x > \frac{4}{3}$

Donc : $S_1 = \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$. On représente S_1 sur un axe :



■ Résolvons dans IR l'inéquation :

(2) $5(3x-1)-(5x-4) \leq -4x+10-7(-2x+3)$

Soit S_2 l'ensemble du solutions de cette inéquation.

$x \in S_2$ si et seulement si $10x - 1 \leq 10x - 11$

$x \in S_2$ si et seulement si $-1 \leq -11$ et ceci est impossible.

Donc : $S_2 = \varnothing$

■ Résoudre dans IR les deux inéquations suivantes :

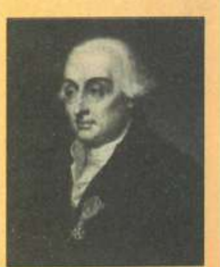
a) $\frac{2x-1}{4}+8<\frac{3-x}{5}$

b) $\frac{x+7}{10} - \frac{x-5}{5} \geq \frac{1-x}{10}$

3 Signe du binôme $ax + b$

Propriété On considère le binôme $ax + b$ où $a \neq 0$

- Si $x \geqslant -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et a ont le même signe.
- Si $x \leqslant -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et $-a$ ont le même signe.



Louis Lagrange (1736-1813)

Mathématicien, mécanicien (s'est intéressé à la mécanique céleste et à la mécanique des fluides). Il a publié en 1771 l'une de ses principales publications sur la résolution algébrique.

Tableau de signe du binôme ax + b

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

Exemples et applications

Signe de chacun des deux binômes $2x+5$ et $-3x+7$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x+5$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$-3x+7$	$+$	0	$-$

Résolvons dans IR l'inéquation $(2x-3)(-5x+3) \leq 0$.
On pose $P(x) = (2x-3)(-5x+3)$
Après avoir étudié le signe de chaque facteur de $P(x)$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-5x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est :

$$S = \left]-\infty ; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$$

Résoudre dans IR les deux inéquations :

a) $4x^2 - 25 \geq 0$

b) $(4x-5)(2x+7)(1-x)^2 < 0$

4 Equation du premier degré à deux inconnues

Définition On appelle équation du premier degré à deux inconnues toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$ où x et y sont les deux inconnues, et où a, b et c sont des nombres réels donnés.

Remarque :

La détermination de l'ensemble des couples $(x ; y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ exprime la résolution dans IR^2 de l'équation : $ax + by + c = 0$.
IR^2 est noté parfois IR × IR.

Rappel

- Le produit de deux nombres réels de même signe, est un nombre réel positif.
- Le produit de deux nombres réels de signes contraires, est un nombre réel négatif.

IR^2 est l'ensemble des couples de réels

Exemples et applications

On considère dans IR^2 l'équation (1) : $2x - y = 3$.
Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

- On a : $2 \times 1 - (-1) = 3$; donc $(1 ; -1) \in S_1$.
- On a : $2 \times \left(\frac{1}{2}\right) - (-2) = 3$; donc $\left(\frac{1}{2} ; -2\right) \in S_1$
- On a : $2 \times 3 - 1 = 5$; donc $2 \times 1 - 1 \neq 3$; d'où $(3 ; 1) \notin S_1$.

Résolvons dans IR^2 l'équation (2) : $2x - 5 = 0$.
Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (2).

$(x ; y) \in S_2$ si et seulement si $x = \frac{5}{2}$.

Donc S_2 est l'ensemble des couples $\left(\frac{5}{2} ; y\right)$ où y est un élément de IR.

On peut aussi écrire S_2 comme suit :

$$S_2 = \left\{\left(\frac{5}{2} ; y\right) / y \in IR\right\} \quad \text{ou} \quad S_2 = \left\{(x ; y) \in IR^2 / x = \frac{5}{2}\right\}$$

Résolvons dans IR^2 l'équation (3) : $4x - 5y + 6 = 0$.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (3).

$(x ; y) \in S_3$ si et seulement si $x = \frac{5y-6}{4}$

Donc : $S_3 = \left\{(x ; y) \in IR^2 / x = \frac{5y-6}{4}\right\}$ ou $S_3 = \left\{\left(\frac{5y-6}{4} ; y\right) / y \in IR\right\}$

Résoudre dans IR^2 les équations suivantes :

a) $5y - 3 = 0$

b) $\sqrt{2}x - 2y + 5\sqrt{6} = 0$

5 Système de deux équations du premier degré

Définition Le système (s) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

est appelé système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Le nombre $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ est appelé déterminant du système (s).

Exemples

Méthode de substitution

Résolvons dans IR^2 le système $(s_1) : \begin{cases} 2x - y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 12 & (2) \end{cases}$

- On détermine l'une des inconnues en fonction de l'autre.
A partir de l'équation (1), on trouve : $y = 2x - 7$ (3)

Méthode

- On peut déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de l'équation $ax + by + c = 0$ en utilisant l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :
Méthode 1 : Calcul de x en fonction de y.
Méthode 2 : Calcul de y en fonction de x.
- L'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$, où $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, est un ensemble infini.
- La droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est la représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ ((D) étant tracée dans le plan muni d'un repère).

Explication

Résoudre le système (s) c'est déterminer tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations :
$ax + by = c$ est $a'x + b'y = c'$

- Dans l'équation (2), on remplace y par l'expression $2x - 7$, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue :

$3x + 4(2x - 7) = 12$ qui signifie que $x = \frac{40}{11}$

- Dans l'équation (3), on remplace x par la valeur $\frac{40}{11}$, on obtient :

$y = 2 \times \frac{40}{11} - 7$ c'est-à-dire $y = \frac{3}{11}$

- Le couple $\left(\frac{40}{11};\frac{3}{11}\right)$ vérifie le système (s_1).
- Donc l'ensemble des solutions du système (s_1) est $S_1 = \left\{\left(\frac{40}{11};\frac{3}{11}\right)\right\}$

Méthode de résolution par combinaison linéaire

Résolvons dans IR^2 le système $(s_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

- En multipliant les deux membres de la première équation par 3 et les deux membres de la deuxième équation par -2, on obtient :

$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ -6x + 8y = -14 \end{cases}$$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on trouve $11y = -5$ c'est-à-dire $y = -\frac{5}{11}$
- Pour obtenir, la valeur de x, on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par 4 (et les deux membres de la deuxième équation par 1 ; ce qui revient à laisser cette équation intacte). On a ainsi :

$$\begin{cases} 8x + 4y = 12 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

- En additionnant les deux équations obtenues membre à membre, on trouve :

$11x = 19$ c'est-à-dire $x = \frac{19}{11}$

- Le couple $\left(\frac{19}{11};-\frac{5}{11}\right)$ vérifie bien le système (s_2).
- Donc l'ensemble des solutions du système (s_2) est $S_2 = \left\{\left(\frac{19}{11};-\frac{5}{11}\right)\right\}$

Méthode du déterminant

Propriété On considère le système $(s) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1) Le système (s) admet une solution et une seule si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$;

dans ce cas la solution est le couple (x ; y) défini par $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$

2) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, alors :

- ou bien le système (s) n'admet pas de solution.
- ou bien le système (s) admet une infinité de solutions.

Explication

Le couple $\left(\frac{40}{11};\frac{3}{11}\right)$ est le couple de coordonnées du point d'intersections des deux droites d'équations : $2x - y - 7 = 0$ et $3x + 4y - 12 = 0$

Note

On peut remplacer la valeur de y dans l'une ou l'autre des deux équations (du système) pour obtenir la valeur de x.

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Exemples

- Résolvons le système suivant $(s_3) : \begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 20 = 38$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (s_3) admet une solution et une seule (x ; y) telle que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{38} = \dfrac{-66 + 28}{38} = \dfrac{-38}{38} = -1 \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{38} = \dfrac{21 + 55}{38} = \dfrac{76}{38} = 2 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solution du système (s_3) est $S_3 = \{(-1 ; 2)\}$

- Résolvons le système suivant $(s_4) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 1 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$

Donc le système (s_4) est ou bien sans solution, ou bien admet une infinité de solutions.

On a : $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 1 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$. En multipliant la 1ère équation par 2, on obtient : $\begin{cases} x - 6y = 2 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$

Donc le système (s_4) équivaut à l'équation : $x - 6y = 2$ c'est-à-dire aussi à : $x = 2 + 6y$.
Ainsi l'ensemble des solutions du système (s_4) est :

$$S_4 = \{(2 + 6y ; y) / y \in IR\}$$

- Résolvons le système suivant $(s_5) : \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} \\ -2x + \sqrt{2}y = 3 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

Donc le système admet une infinité de solutions ou n'admet pas de solution.

On a : $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} \\ -2x + \sqrt{2}y = 3 \end{cases}$. En multipliant la 1ère équation par $(-\sqrt{2})$, on obtient :

$\begin{cases} -2x + \sqrt{2}y = -4 \\ -2x + \sqrt{2}y = 3 \end{cases}$. Ce qui est impossible. Donc le système (s_5) n'a pas de solution. L'ensemble des solutions du système (s_5) est $S_5 = \varnothing$

Appellation

Lorsque le déterminant d'un système, de deux équations du premier degré à deux inconnues, n'est pas nul, on dit que le système est un système de Cramer.

A retenir

- Le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admet une infinité de solutions si et seulement si les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont équations de deux droites confondues.
- Le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ n'admet pas de solutions si et seulement si : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont les équations de deux droites strictement parallèles.

6 Signe de ax + by + c - régionnement du plan

Propriété Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

La droite (D) détermine deux demi-plans ouverts :

- Le premier est l'ensemble des points $M(x ; y)$ qui vérifient : $ax + by + c > 0$.
- L'autre est l'ensemble des points $M(x ; y)$ qui vérifient : $ax + by + c < 0$.

Exemples et applications

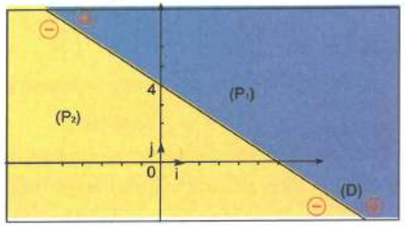
■ Déterminons graphiquement l'ensemble (E) des points $M(x ; y)$ du plan qui vérifient la relation $2x + 3y - 12 > 0$.

- On construit d'abord la droite (D) d'équation : $2x + 3y - 12 = 0$.
- En second lieu, on étudie le signe de $2x + 3y - 12$ puis on détermine le demi-plan dont les points ont des couples de coordonnées vérifiant l'inéquation $2x + 3y - 12 > 0$.

Le point O(0 ; 0) n'appartient pas à la droite (D). Par ailleurs : $2 \times 0 + 3 \times 0 - 12 = -12 < 0$

L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points appartenant à (P_1) (voir la figure).

[En d'autres termes (E) est confondue avec (P_1)].

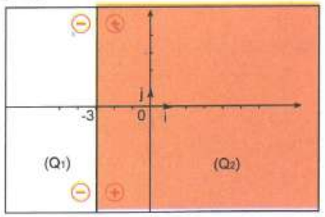


■ Résolvons graphiquement l'inéquation : $x > -3$.

- On construit la droite (Δ) d'équation $x = -3$.
- On étudie le signe de $x + 3$ puis on détermine le demi-plan dont les points ont des couples de coordonnées vérifiant l'inéquation $x > -3$.

Le point O(0 ; 0) n'appartient pas à (Δ).

Comme $0 + 3 = 3 > 0$, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $x > -3$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que $M(x ; y) \in (Q_2)$.



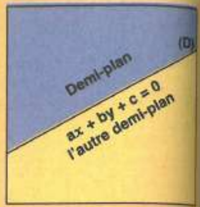
■ 1) Résoudre graphiquement les deux inéquations :

a) $2x - 3y + 5 \geq 0$; b) $y - 1 < 0$

2) Résoudre graphiquement le système :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + 5 < 0 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$$

Méthode

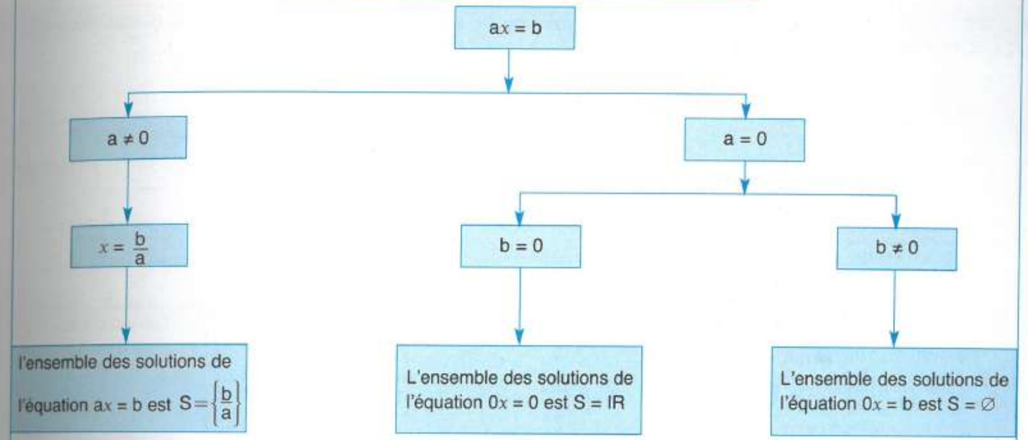


- Comme $ax + by + c$ garde le même signe pour tous les couples coordonnées des points de chacun des demi-plans ouverts déterminés par la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$, alors pour déterminer le signe de $ax + by + c$ lorsque le couple $(x ; y)$ varie dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de voir ce signe pour un couple de coordonnées d'un point du plan qui n'appartient pas à la droite (D) ; ce point est le plus souvent O(0 ; 0) si ce point n'appartient pas (D).
- Régionner le plan revient à le partager en deux demi-plans et une droite qui les sépare.

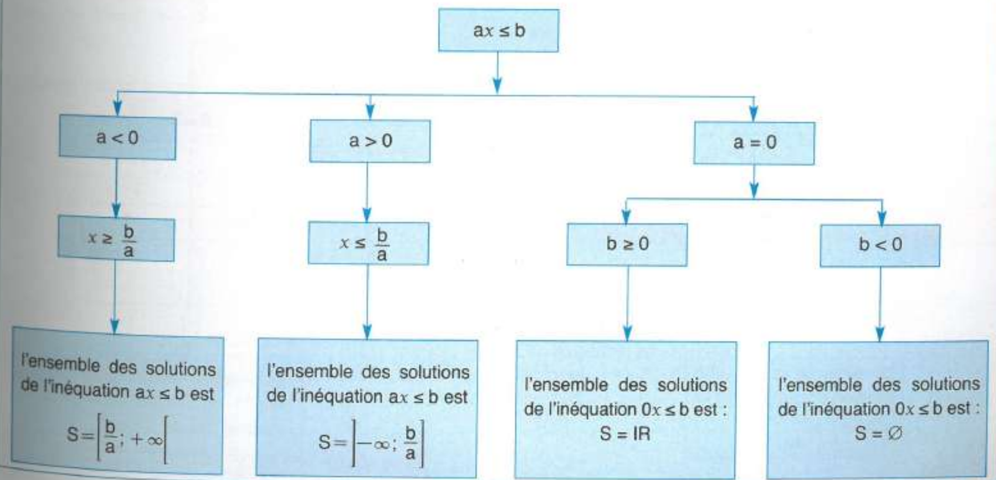
Se rappeler

Pour construire une droite, il suffit de choisir deux points distincts de cette droite.

Equations du premier degré à une inconnue



Inéquations du premier degré à une inconnue



5 POINTS ESSENTIELS

Equation du premier degré à deux inconnues

$ax + by + c = 0$

- $a \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est : $S = \left\{\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a};\ y\right) \setminus y \in IR\right\}$
- $b \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est : $S = \left\{\left(x;\ -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) \setminus x \in IR\right\}$
- $a = 0$ et $b = 0$:
  - $c \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $0x + 0y + c = 0$ est : $S = \varnothing$
  - $c = 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $0x + 0y + 0 = 0$ est : $S = IR^2$

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

- $\Delta \neq 0$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$$

Le système admet une solution unique qui est le couple $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\ \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$

- $\Delta = 0$: Le système admet une infinité de solutions ou n'admet pas de solution

5 EXERCICES RESOLUS

1 Equation se ramenant à une équation du premier degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation :

$$(1)\quad \frac{13x-5}{2x+1} - \frac{13x+5}{2x-1} = \frac{-48x+1}{4x^2-1}$$

Solution

L'équation (1) est définie si : $\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \\ 4x^2-1 \neq 0 \end{cases}$

c'est-à-dire si $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

c'est-à-dire si $x \in IR \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

$\frac{13x-5}{2x+1} - \frac{13x+5}{2x-1} = \frac{-48x+1}{4x^2-1}$ équivaut successivement à :

$$\frac{(13x-5)(2x-1)-(2x+1)(13x+5)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{-48x+1}{4x^2-1}$$

$$(13x-5)(2x-1)-(2x+1)(13x+5) = -48x+1$$

$$26x^2 - 13x - 10x + 5 - (26x^2 + 10x + 13x + 5) = -48x + 1$$

$$-46x = -48x + 1$$

$$2x = 1 \quad ; \quad x = \frac{1}{2}$$

Or l'équation n'est pas définie pour cette valeur de x ; par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \varnothing$.

2 Equations et valeur absolue

Résoudre dans IR l'équation : (2) $|3-2x| + |x-4| = 2x+1$

Solution

Etudions d'abord le signe de chacun des binômes :

$3-2x$ et $x-4$

x	$-\infty$	$3/2$		4	$+\infty$
$3-2x$	+	0	−		−
$x-4$	−		−	0	+
$\lvert 3-2x \rvert$	$3-2x$	0	$2x-3$		$2x-3$
$\lvert x-4 \rvert$	$-x+4$		$-x+4$	0	$x-4$
$\lvert 3-2x \rvert + \lvert x-4 \rvert$	$-3x+7$		$x+1$		$3x-7$

- **1^er^ cas :**

  Si $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$, l'équation (2) devient :

  $-3x + 7 = 2x + 1$ c'est-à-dire $-5x = -6$

  c'est-à-dire $x = \frac{6}{5}$ et $\frac{6}{5} \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$

  (car $\frac{6}{5} < \frac{3}{2}$). Donc $\frac{6}{5}$ est **une** solution de (2).

- **2^ème^ cas :**

  Si $x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$, l'équation (2) devient $x + 1 = 2x + 1$

  c'est-à-dire $x = 0$; mais $0 \notin \left[\frac{3}{2}, 4\right]$

- **3^ème^ cas :**

  Si $x \in [4\ ; +\infty[$, l'équation (2) devient $3x - 7 = 2x + 1$

  c'est-à-dire $x = 8$ et $8 \in [4\ ; +\infty[$.

  Donc 8 est **une** solution de (2).

- Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (2) est :

$$S_2 = \left\{\frac{6}{5}, 8\right\}$$

3 Inéquation paramétrique du premier degré à une inconnue

Résoudre et discuter dans IR l'inéquation suivante :

$$(3)\quad (3-m)x - m^2 + 2m \geq 0$$

où m est un paramètre réel.

Solution

L'inéquation $(3-m)x - m^2 + 2m \geq 0$ équivaut à $(3-m)x \geq m^2 - 2m$

- **1^er^ cas :**

  Si $3 - m = 0$ c'est-à-dire $m = 3$, alors l'inéquation devient : $0x \geq 9 - 6$ c'est-à-dire $0 \geq 3$; ce qui est impossible.

  Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) (dans le cas où $m = 3$) est $S_3 = \varnothing$.

- **2^ème^ cas :**

  Si $3 - m > 0$ c'est-à-dire si $m < 3$, l'inéquation (3) devient : $x \geqslant \frac{m^2-2m}{3-m}$

  Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3), dans le cas où $m < 3$, est $S_3 = \left[\frac{m^2-2m}{3-m};\ +\infty\right[$

- **3^ème^ cas :**

  Si $3 - m < 0$ c'est-à-dire si $m > 3$, l'inéquation (3) devient : $x \leqslant \frac{m^2-2m}{3-m}$

  Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3), dans le cas où $m > 3$, est $S_3 = \left]-\infty;\ \frac{m^2-2m}{3-m}\right]$

4 Inéquation rationnelle

Résoudre dans IR l'inéquation (4): $\frac{x^2-1}{x-2} < x+1$

Solution

L'inéquation (4) est définie si $x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq 2$ ou encore si $x \in IR \setminus \{2\}$.

$\frac{x^2-1}{x-2} < x+1$ équivaut successivement à : $\frac{x^2-1}{x-2} - (x+1) < 0$

$$\frac{x^2-1-(x+1)(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\frac{x+1}{x-2} < 0$$

Etudions le signe de $\frac{x+1}{x-2}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-2}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est $S_4 =]-1\ ;\ 2[$

5 Système de trois équations du premier degré à deux inconnues

Résoudre dans IR^2 le système suivant (s) : $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ x+2y=-5 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

Solution

$$(s)\ \begin{cases} 5x-3y=1 & (1) \\ x+2y=-5 & (2) \\ 2x+y=-4 & (3) \end{cases}$$

On résout d'abord le système : $(s')\ \begin{cases} 5x-3y=1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est : $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10+3=13$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (s') admet une solution unique $(x\ ;\ y)$ où $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_x}{\Delta}$

On a : $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=2-15=-13$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=-25-1=-26$

Donc $\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-13}{13}=-1$ et $\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-26}{13}=-2$

Il est aisé de vérifier que $x=-1$ et $y=-2$ vérifient l'équation : (3) : $2x+y=-4$

Donc l'ensemble des solutions du système (s) est : $S=\{(-1\ ;\ 2)\}$

6 Programmation linéaire

Une usine fabrique deux types de chemises à l'aide de deux machines. La première machine fonctionne 250 heures par mois ; la deuxième machine fonctionne 160 heures par mois.

On suppose que la fabrication d'une chemise du premier type nécessite une heure et demi de travail de la première machine, et deux heures de travail de la deuxième machine.

On suppose aussi que la fabrication d'une chemise du deuxième type nécessite deux heures de travail de la première machine, et une demi-heure de travail de la deuxième machine.

Si chaque chemise du premier type est vendue avec un bénéfice de 12 dirhams, et chaque chemise du deuxième type est vendue avec un bénéfice de 6 dirhams, déterminer le nombre de chemises de chaque type que l'usine doit produire par mois pour réaliser un profit maximum.

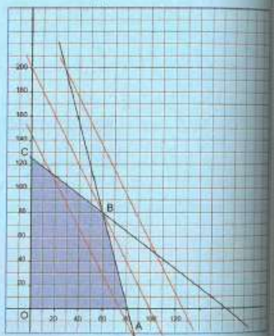
Solution

Soient x le nombre de chemises du premier type et y le nombre de chemises du deuxième type que l'usine peut produire par mois ($x \in IN$ et $y \in IN$).

On peut traduire les données du problème en question par le système suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 1,5x+2y \leqslant 250 \\ 2x+0,5y \leqslant 160 \end{cases}$$

Résolvons graphiquement le système (s).



On considère les droites suivantes :

$(D_1) : x = 0$;

$(D_2) : y = 0$;

$(D_3) : 1,5x + 2y = 250$;

$(D_4) : 2x + 0,5y = 160$

L'ensemble des solutions du système (s) est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ des points $M(x\ ;\ y)$ qui appartiennent à la partie colorée délimitée par le quadrilatère OABC.

Si b est le bénéfice réalisé par la production de x chemises du premier type et y chemises du deuxième type, par mois, alors $12x + 6y = b$.

Ce bénéfice atteint sa valeur maximale lorsque $12x + 6y$ prend sa valeur maximale.

On considère les droites (Δ_b) d'équations : $12x + 6y - b = 0$ c'est-à-dire $y=-2x+\frac{b}{6}$. Ces droites sont parallèles et coupent l'axe des ordonnées au point dont le couple de coordonnées est $\left(0, \frac{b}{6}\right)$

La production de l'usine ne peut réaliser un bénéfice que pour les droites (Δ_b) qui ont au moins un point d'intersection avec le quadrilatère OABC dont les coordonnées sont deux nombres entiers naturels ; par ailleurs le bénéfice sera maximal au point B intersection des droites (D_3) et (D_4). Le couple $(x\ ;\ y)$ de coordonnées de B est solution du système :

$$\begin{cases} 1,5x+2y=250 \\ 2x+0,5y=160 \end{cases}$$

On trouve $x = 60$ et $y = 80$

Donc l'usine réalise son profit maximum lorsqu'elle produit 60 chemises du premier type et 80 chemises du deuxième type. Le bénéfice maximum est $60 \times 12 + 80 \times 6 = 1200$ dirhams.

Exercices d'application

Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

1 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $5x=0$; 2) $-\frac{3}{7}x=0$

3) $3x-7=0$; 4) $\frac{2}{3}x=\sqrt{5}$

5) $3\sqrt{3}x+2=x+\sqrt{3}$; 6) $1+2x=\sqrt{2}(3-x)$

2 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\frac{3x-2}{3}-\frac{x-1}{4}=x-7$; 2) $\frac{6x+1}{3}-x=\frac{2x-1}{2}$

3) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=\frac{49}{20}$; 4) $2x-1=\frac{10x-1}{5}=-\frac{4}{5}$

5) $\left(1-\sqrt{2}\right)x=10\sqrt{2}-x\sqrt{2}$; 6) $(2x-1)^2=(x-2)(4x+3)$

7) $0,7x-1,4=2,1x+5,6$

Equations et factorisation

3 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $(x+1)(2x-3)=0$; 2) $x^2-2x=0$

3) $(2x-3)(5x+1)-3x(2x-3)=0$; 4) $(4x-3)(x+7)-16x^2+9=0$

5) $(4x-5)(1-2x)-(4x-5)^2=0$; 6) $x^3-1+3(x^2-1)=0$

Equations et valeur absolue

4 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $|x|=5$; 2) $|3x|=\sqrt{3}$

3) $|2x-7|=0$; 4) $\left|\frac{2}{5}x-1\right|-5=0$

5) $3|x|+7=0$; 6) $2|x|+1=0$

Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré

5 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $2x+1-3(1+x) \leq 3+x$; 2) $(1-\sqrt{2})x+3 \leqslant 0$

3) $-2x+9<-2(x-\sqrt{2})$; 4) $-6x+2(x-1)<-3(2x-1)+5x+3$

5) $\frac{x-1}{2}+\frac{3+x}{3}>3-2x$; 6) $\frac{2x+1}{2}-(1-2x) \geqslant 5-\frac{x}{3}$

6 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\frac{3}{2}x-\frac{x+1}{5} \geqslant \frac{x-2}{10}+\frac{1}{2}$

2) $\frac{3x-1}{7}-\frac{19x}{49}<\frac{2x-5}{49}+\frac{3x-1}{3}$

3) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3}<\frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$

4) $x-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<2x-1+\frac{1-x}{2}+\frac{x+1}{3}$

Inéquations et factorisation

7 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $(2x-3)(4x-5) \leq 0$; 2) $(1-2x)(x+3) \geq 0$

3) $x^2+2x<0$; 4) $4x^2-5x>0$

5) $25x^2-16 \leq 0$; 6) $(4x-3)(x+7)-16x^2+9>0$

Inéquations et valeur absolue

8 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $|x| \leq 5$; 2) $|2x-1|<\frac{3}{2}$

3) $|x-1| \geqslant \frac{4}{5}$; 4) $|3x-1|>7$

Système d'inéquations du premier degré

9 Résoudre dans IR les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 8x-1 \leqslant 3x+4 \\ 3x-5 \geqslant x+7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{3} \leqslant \frac{x+3}{4} \\ \frac{x+1}{5}+1 \leqslant \frac{2x-3}{3}+\frac{3}{5} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x-1}{2}-(1+x)<\frac{x-1}{3} \\ \frac{x+1}{2}-\left(3-\frac{x}{2}\right) \geqslant 3-\frac{x}{6} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1 \\ \frac{2x-3}{2}>1-\frac{x}{3} \end{cases}$

Equations et pourcentages

10 Dans une entreprise A, il y a 300 employés dont 15 % sont des femmes.

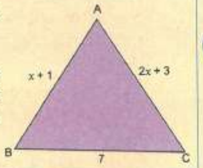
Dans une entreprise B, il y a 30 % de femmes.

Sachant que les deux entreprises réunies contiennent 20 % de femmes, quel est le nombre d'employés de l'entreprise B ?

Inéquations et géométrie

11 Soit x un nombre réel strictement positif.

Déterminer les valeurs de x sachant que 7 ; $x+1$; $2x+3$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.



Equations du premier degré à deux inconnues

12 Résoudre dans IR^2 les équations suivantes :

1) $2x + y - 5 = 0$; 2) $x - 3y + 5 = 0$

3) $\frac{2}{3}x + 2y - \frac{7}{2} = 0$; 4) $\sqrt{3}\,x + 2y - \sqrt{6} = 0$

5) $4x - 9 = 0$; 6) $7y + 3 = 0$

Equation paramétrique du premier degré à deux inconnues

13 Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les solutions de l'équation : $(m + 1)x + my - 2 = 0$

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

14 En utilisant la méthode de substitution, résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} x+y=-3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 5x+2y-7=0 \end{cases}$ $(S_3): \begin{cases} 5x+2y=0 \\ 3x+y=3 \end{cases}$

15 En utilisant la méthode de résolution par combinaison linéaire, résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} 2x-y=2 \\ x+3y=15 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} 4x-5y+7=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$ $(S_3): \begin{cases} 2x-4y=0,18 \\ -x+2y=0,09 \end{cases}$

16 En utilisant la méthode du déterminant, résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 5x-2y-4=0 \\ 3x-y-3=0 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} 0,12x-5,6y=-0,06 \\ -0,3x+y=-3,75 \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Systèmes de trois équations du premier degré à deux inconnues

17 Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} 5x+3y=1 \\ x-2y=-5 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} -2x+3y=5 \\ x+2y=8 \\ -4x+y=5 \end{cases}$

$(S_3): \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-3y+4=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ $(S_4): \begin{cases} y+1=0 \\ x-y+1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

Système et capital

18 Une personne place un capital de 30000 dirhams en deux parties. La première x est placée au taux de 6 % et la deuxième y au taux de 4 % pour une durée d'un an.

Déterminer x et y sachant que l'intérêt total est de 1440 dirhams.

Régionnement du plan

19 Résoudre graphiquement les inéquations :

1) $x - 2y + 3 \leq 0$; 2) $5x - 4y > 0$

3) $2x - 3 \geq 0$; 4) $y + 2 < 0$

20 Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} x-2y+1 \geqslant 0 \\ x+y-3 \leqslant 0 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} x+y-5<0 \\ 3x-4y>0 \end{cases}$

$(S_3): \begin{cases} 2x-y+4 \geqslant 0 \\ 3x+2 \leqslant 0 \end{cases}$ $(S_4): \begin{cases} x+y \geqslant 4 \\ -x-4y \leqslant 20 \end{cases}$

$(S_5): \begin{cases} x-2y+1>0 \\ x-\frac{3}{2}<0 \\ 2y-9<0 \end{cases}$ $(S_6): \begin{cases} x+y-1 \geqslant 0 \\ x-y \leqslant 0 \\ x-y+1 \leqslant 0 \end{cases}$

Exercices de renforcement des apprentissages

Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

21 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $25x^2 - 0,64 = 0$; 2) $\left(\frac{x+45}{2}\right)^2 = 12x + 540$

3) $(2x-3)^2 - 5 = 0$; 4) $4x^2 - 16 = 0$

5) $(x-1)^2 = (3x-2)^2$; 6) $3x^2 - (x-3)^2 = 0$

22 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^3 - 2x^2 + 10 - 5x = 0$

2) $x^3 - 8 + 2(x^2 - 4) + 3x - 6 = 0$

3) $t^2 - 3 + 2(t^2 + 2\sqrt{3}\,t + 3) = 0$

4) $x^3 - 27 + \frac{1}{2}(2x-6)(6-x) = x^2 - 9$

Equations rationnelles

23 Résoudre les équations suivantes :

1) $\frac{x+2}{2-x} = 0$; 2) $\frac{x^2-16}{2x} = 0$

3) $\frac{x+1}{3x-4} = \frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+3} = 0$

5) $2x - 7 = \frac{4}{2x-7}$; 6) $\frac{16}{3x+1} = 3x - 1$

7) $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{6x+1}{3x-2}$; 8) $\frac{1}{x-7} = \frac{1}{3x+8}$

Equations et valeur absolue

24 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $|2x-3| = |2-x|$; 2) $\big|2|x|-3\big| = 3$

3) $|x-2| = 2x - 1$; 4) $|x^2 - 2x| = x^2$

5) $|x-2| - 2|x| = 2x - 3$; 6) $|6-x| + |x+1| = 2 - |x|$

Equations contenant des racines carrées

25 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{3-2x} = \sqrt{x+6}$

3) $\sqrt{x^2-1} = |x|$; 4) $\sqrt{x^2-1} + x = 4$

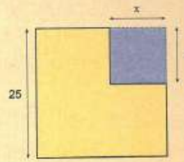
5) $2\sqrt{2x} = \sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{2x-1} = x - 2$

Equations et géométrie

26 On veut construire une piscine sous forme de "L" sur un terrain carré dont la longueur du côté mesure 25m (voir figure)

1) Calculer l'aire de la piscine en fonction de x.

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la piscine est égale à $576m^2$



Equations et nombres entiers

27 1) Déterminer cinq nombres entiers relatifs consécutifs dont la somme est nulle.

2) Déterminer cinq nombres entiers relatifs impairs et consécutifs telle que leur somme soit égale à 125.

3) Déterminer le nombre entier relatif x que l'on doit ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{-7}{3}$ pour obtenir le nombre 6.

Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue

28 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $(2x-3)(5x-1) - (2x-3)(-x+4) \geq 0$

2) $(2x+5)(3x-2) > (2x+5)(x+4)$

3) $x^2 - 25 + (x-5)(3x-7) \leq 0$

4) $(3x-8)(2x-5) < 4x^2 - 20x + 25$

5) $4x^2 - 3x + (4x-3)(2-x) > 0$

6) $(4x+7)(-x+7) + 16x^2 + 56x + 49 \leq 0$

29 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\frac{1-x}{1+x} \leqslant 2$; 2) $\frac{12x-1}{x-1} > -\sqrt{2}$

3) $\frac{x}{2x+3} < \frac{x}{5}$; 4) $\frac{1-x}{3x} + \frac{1}{2-x} \geqslant 0$

5) $\frac{x^2-2x}{x+1} > 0$; 6) $\frac{x^2-1}{x-2} < x + 1$

7) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{2x-1}{x(x+1)}$; 8) $\frac{x^2-3x+1}{x+1} < 1$

Inéquations et valeur absolue

30 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $|3x+4|<|5-3x|$; 2) $|x-1|\leqslant|x+1|$

3) $|x|+3x-1\leqslant 0$; 4) $\frac{1}{2}\leqslant|2x-5|\leqslant 3$

5) $\frac{2-3|x|}{1+|x|}<\frac{1}{2}$; 6) $|x-1|+|2x-3|<7$

7) $|x-1|-|x-2|\leqslant 2x-3$; 8) $\big||x+5|-7\big|<4$

Inéquations contenant des racines carrées

31 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\sqrt{x}\leqslant 7$; 2) $\sqrt{3-2x}>\sqrt{x+6}$

3) $\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$; 4) $\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\geqslant 0$

5) $\sqrt{x^2+6x+9}\leqslant 3$; 6) $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x-3}<0$

Inéquations et commerce

32 Deux entreprises de location de voitures proposent les tarifs suivants :

La première entreprise propose : 550 dirhams de frais fixes plus 6,30 dirhams pour chaque kilomètre parcouru.

La seconde entreprise propose : 600 dirhams de frais fixes plus 6,10 dirhams pour chaque kilomètre parcouru.

Déterminer la distance à partir de laquelle le tarif de la seconde entreprise est le plus avantageux.

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

33 Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+y=-1-\sqrt{3}\end{cases} \qquad (S_2): \begin{cases}\sqrt{2}\,x-3y=2\sqrt{2}\\ 2x-3\sqrt{2}\,y=8\end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases}\sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\,y=1\\ \sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y=0\end{cases} \qquad (S_4): \begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\ 9x-3y=2\end{cases}$$

34 Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases}2x^2+\frac{1}{y}=1\\ 3x^2+\frac{5}{y}=-9\end{cases} \qquad (S_2): \begin{cases}2|x|-3\sqrt{y}=-4\\ 3|x|+\sqrt{y}=5\end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases}\frac{3}{2-x}-\frac{5y}{2-y}=2,5\\ \frac{2}{2-x}-\frac{3y}{2-y}=2\end{cases} \qquad (S_4): \begin{cases}\frac{x+3}{y+5}=3\\ \frac{x+1}{y-3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues

35 Résoudre dans IR^3 les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases}x+y+z=4\\ 2x-y+z=13\\ x+2y+z=13\end{cases} \qquad (S_2): \begin{cases}3x+y-z=-4\\ -2x+3y+z=7\\ x-2y+2z=1\end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases}2x+y+z+1=0\\ x+2y+z=0\\ x+y+2z-1=0\end{cases} \qquad (S_4): \begin{cases}x-2y+z=0\\ 3x+y-2z-2=0\\ 5x-3y-2=0\end{cases}$$

Systèmes et proportionnalité

36 Déterminer trois nombres réels x, y et z proportionnels respectivement à 2, 3 et 5 tels que : $x + 2y - 3z = 1$

Systèmes et profit

37 Pour former le capital d'une société, trois personnes A, B et C placent les montants suivants :

A = 50000 dirhams ; B = 60000 dirhams ; C = 90000 dirhams

Après un an, le bénéfice total est de 20000 dirhams.

Calculer la part du bénéfice de chacune des trois personnes sachant que cette part est proportionnelle à la contribution au capital.

Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

38 Résoudre graphiquement le système :

$$(S): \begin{cases}2x-3y\leqslant 12\\ 3x+2y\geqslant 5\\ 7x+9y\leqslant 49\end{cases}$$

39 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

(S_1) : $(5x-3y)(2x+y-2)\geq 0$

(S_2) : $(x+y-1)(2x-y+1)<0$

40 Résoudre dans IR^2 le système suivant :

$$(S): \begin{cases}4x+3y>17\\ 2x\ y<11\\ x+2y<8\\ x-y\leq 4\end{cases}$$

Système paramétrique

41 On considère dans IR^2 le système suivant :

$$(E): \begin{cases}(m-1)x+2y=-3\\ mx-3y=8\end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Déterminer la valeur du nombre réel m pour que le couple (1 ; –2) soit solution du système (E).
2) Résoudre le système (E) pour m = –1.
3) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles le système (E) admet une solution unique que l'on déterminera.

Systèmes et géométrie

42 Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 52m et que le périmètre est égale à 396m.

Systèmes et polynômes

43 Déterminer un polynôme $P(x)$ du second degré tel que :

$P(-1) = 14$; $P(2) = 2$; $P(1) = 0$.

Systèmes et vitesse

44 Un camion parcourt une pente en montée à la vitesse de 24 kilomètres par heure, et en descente aux $\frac{4}{3}$ de cette vitesse.

Calculer la longueur de la pente sachant que la durée de la montée et de la descente (réunies) est de 21 minutes.

45 Si la vitesse d'un train augmente de 10 kilomètres par heure, il "gagne" 40 minutes, et si sa vitesse diminue de 10 kilomètres par heure, il "perd" une heure.

Quelle est la distance parcourue par le train ? et quelle est sa vitesse ?

Exercices de synthèse

Equations paramétriques du premier degré à une inconnue

46 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les équations suivantes :

1) $(m-1)x + 2m = 0$.
2) $(2-m)x + 3mx + 2(m-x) - 6 = 0$.
3) $(3m+5)x + 3m = (2m-5)x + m + 1$.

Inéquations paramétriques du premier degré à une inconnue

47 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les inéquations suivantes :

1) $(m+2)x + 3 - 2m \leq 0$.
2) $2x(m-1) + 3m \leq m(x+1) - 5$.
3) $(m+1)x+1-3m>\frac{m-1}{2}+\frac{3+x}{2}$

Discussion d'un système paramétrique

48 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, le système suivant :

$$(s): \begin{cases}mx+3y=m^2\\ 3x+my=9\end{cases}$$

Systèmes et réduction

49 Le prix total d'achat de 5 unités d'un produit A et de 4 unités d'un produit B est de 350 dirhams.

Si le prix unitaire du produit B ne change pas et si celui (prix unitaire) du produit A baisse de 10 %, alors le prix total d'achat de 20 unités du produit A et de 8 unités du produit B sera de 1180 dirhams.

Déterminer les prix unitaires des produits A et B avant la "réduction" (c'est-à-dire lors du premier achat)

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Programmation linéaire

50 Un entreprise fabrique deux sortes de ceintures A et B. Chaque ceinture A est vendue avec un bénéfice de deux dirhams et chaque ceinture B avec un bénéfice de 1,5 dirham.

La fabrication d'une ceinture A dure deux heures et celle d'une ceinture B dure une heure, tandis que l'entreprise ne dispose que de 1000 heures de travail par jour.

On dispose d'une quantité de cuir suffisante pour produire 800 ceintures A et B par jour, et de 400 boucles pour les ceintures A et 700 boucles pour les ceintures B.

Dresser un programme de production quotidien pour que l'entreprise réalise un profit maximal.

51 Un artisan fabrique deux types d'objets A et B.

- Un objet A coûte 30 dirhams de matière première et 150 dirhams de main-d'œuvre.
- Un objet B coûte 70 dirhams de matière première et 75 dirhams de main-d'œuvre.

Les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre sont respectivement 650 dirhams et 1250 dirhams.

Les profits réalisés sont de 54 dirhams par objet A et 45 dirhams par objet B.

Déterminer le nombre d'objets A et le nombre d'objets B que l'artisan doit produire par jour pour réaliser un profit maximum.

Systèmes et valeur maximale

52 1) Résoudre graphiquement le système :

$$(s)\ \begin{cases} 2x+y-3>0 \\ x-4y+3<0 \end{cases}$$

2) Déterminer la valeur minimale (minimum ou la plus petite valeur) de l'expression $x + 2y$ sachant que le couple $(x\,;\,y)$ vérifie le système (s).

Problèmes

Age du père et du fils

53 L'âge du père est le double de l'âge de son fils.

Lorsque le fils aura l'âge actuel de son père, la somme des âges du père et de son fils sera 90 ans.

Déterminer l'âge du père et celui de son fils.

Poids des trois amis

54 Salwa et Ahmed pèsent ensemble 60 kilogrammes. Salwa et Omar pèsent 39 kilogrammes. Ahmed et Omar pèsent 45 kilogrammes.
Quels sont les poids de Salwa, Ahmed et Omar.

Mathématisation d'une situation

55 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que les longueurs des côtés sont des nombres entiers naturels pairs consécutifs.

1) Si on désigne les longueurs des côtés de ce triangle par $x-2$, x et $x+2$, quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

2) Montrer que $x^2 - 8x = 0$

3) En déduire le mesures des longueurs de ce triangle.

Hauteur du mur d'un jardin

56 La longueur d'une échelle dépasse la hauteur du mur du jardin de 20 cm. Si on éloigne le bas de l'échelle d'un mètre du mur, le haut de l'échelle coïncide avec le bord du mur. Quelles sont la longueur de l'échelle et la hauteur du mur ?

Vitesse

57 Deux villes A et B sont distantes de 130 kilomètres.
Une voiture part de A à sept heures pour B et roule à une vitesse constante. Puis, deux voitures partent de B vers A à la même vitesse, l'une à huit heures et l'autre à huit heures et demi.
La voiture partante de A, après avoir parcouru 88 km, rencontre la première voiture partante de B, et après avoir parcouru 106 km, elle rencontre la deuxième voiture venant de B. Déterminer la vitesse de la voiture partante de A.

Nombre de spectateurs

58 Le tarif normal pour assister à une pièce de théâtre est de 100 dirhams alors que le tarif spécial aux étudiants est de 60 dirhams. Sachant que la recette totale de 90 spectateurs présents est de 7640 dirhams, déterminer le nombre d'étudiants parmi les spectateurs.

Economie

59 Chaque kilomètre parcouru en voiture personnelle coûte à un individu 1,10 dirhams. Sachant que le tarif d'un taxi est : 1,5 dirhams et 0,90 par kilomètre, quel est le moyen de locomotion le plus avantageux par cet individu ? sa voiture ou le taxi ?

Equations et inéquations du second degré à une inconnue

6

Capacités attendues

Résolution d'équations et d'inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du second degrés à une inconnue

Contenu

- **Activités préparatoires**
  - Résolution d'équations
  - Complétion au carré
  - Problème du second degré
  - Résolution d'une équation du second degré
  - Utilisation des équations du second degré pour calculer des longueurs
  - Résolution d'un problème géométrique en utilisant une équation du second degré.
  - Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
  - Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$
  - Solutions évidentes et non recours au discriminant
- **Définitions et règles**
  - Equations du second degré à une inconnue
  - Factorisation d'un trinôme du second degré
  - Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
  - Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit
  - Signe d'un trinôme du second degré
  - Inéquations du second degré
- **Points essentiels**
- **Exercices résolus**
- **Exercices et problèmes**

ACTIVITE 1 Résolution d'équations

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $3x(2x-1)=0$; 2) $(\sqrt{3}x-1)(-4x+5)=0$

3) $4x^2-25=0$; 4) $16x^2-3=0$

5) $x^2+1=0$; 6) $9x^2+4=0$

> $ab=0$ signifie que $a=0$ ou $b=0$

ACTIVITE 2 Complétion au carré

1) Compléter (par ce qui convient) : $x^2-5x=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ....

2) Résoudre dans IR l'équation $x^2-5x+6=0$

Cette équation est appelée **équation du second degré à une inconnue**.

> La technique utilisée est appelée la complétion au carré ; le nombre x^2+bx est le début du carré

ACTIVITE 3 Problème du second degré

Une personne achète un morceau de tissu à 504 dirhams.
Déterminer le nombre de mètres achetés sachant que si le prix d'un mètre diminue de 4 dirhams, cette personne obtiendra 8 mètres supplémentaires.

ACTIVITE 4 Résolution d'une équation du second degré

On considère dans IR l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels avec $a\neq 0$.

1) Montrer que : $ax^2+bx+c=0$ signifie $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]=0$

L'écriture $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$ est appelée **la forme canonique du trinôme** ax^2+bx+c.

Il semble difficile de se rappeler la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c afin de l'utiliser dans la résolution de d'équation $ax^2+bx+c=0$.

Pour simplifier, on pose $\Delta=b^2-4ac$. Δ est appelé **discriminant** de (E).

On a donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

> $\Delta=b^2-4ac$
> Le symbole Δ se lit delta. C'est une lettre grecque

2)On suppose dans cette question que : $\Delta=0$

Vérifier que $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Résoudre alors l'équation (E).

3) On suppose dans cette question que : $\Delta>0$

a) Vérifier que : $ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

b) Résoudre dans IR l'équation (E).

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans le cas où $\Delta<0$.

5) Résoudre dans IR les équations suivantes :

(1) : $-4x^2+3x+1=0$; (2) : $4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$; (3) : $2x^2+x+3=0$

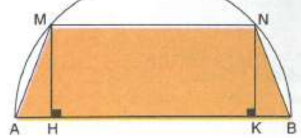
> · L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ.
> · La factorisation du trinôme ax^2+bx+c dépend aussi du signe de Δ.

ACTIVITE 5 Utilisation des équations du second degré pour calculer des longueurs

A Soient AMNB un trapèze inscrit dans un demi cercle de diamètre [AB] (voir figure).

On pose AB = 2R

Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur la droite (AB).



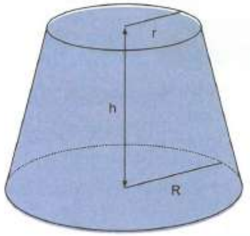
1) Montrer que : $AH=\frac{AM^2}{2R}$

2) Montrer que : $KH=2R-\frac{AM^2}{R}$

3) On suppose que MN = 2AM.

a) Montrer que : $AM^2+2R\times AM-2R^2=0$

b) En déduire AM en fonction de R)



B La formule qui donne le volume de la section d'un cône de révolution est $V=\pi\left(R^2+r^2+Rr\right)\frac{h}{3}$

Déterminer R en fonction de V, r et h.

ACTIVITE 6 Résolution d'un problème géométrique en utilisant une équation du second degré

soit ABCD un rectangle tel que : BC = 3 et AB = 5.

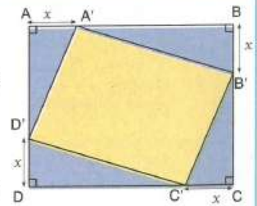
Soit x un nombre réel tel que : $0\leq x\leq 3$

On considère les points A' ; B' ; C' ; D' qui appartiennent respectivement aux segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] tels que :

$AA'=BB'=CC'=DD'=x$

1) Montrer que l'aire du quadrilatère vaut $2x^2-10x+15$.

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère est égale à 7.



ACTIVITE 7 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

On considère dans IR l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ et soit Δ son discriminant.

Dans ce qui suit, on suppose que l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

1) Calculer la somme x_1+x_2 en fonction de a et b.

2) Calculer le produit x_1x_2 en fonction de a et c.

3) On considère l'équation (E') : $2x^2-x-6=0$

a) Montrer que l'équation (E') admet deux solutions x_1 et x_2 (leur détermination n'est pas demandée).

b) Calculer x_1+x_2 et x_1x_2.

6 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 8 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et que $x_1 < x_2$

Recopier et compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$			0				
$x - x_2$					0		
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a > 0$)			0		0		
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a < 0$)			0		0		

ACTIVITE 9 Solutions évidentes et non recours au discriminant

A 1) On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

a) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a + b + c = 0$.

b) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a - b + c = 0$

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_1) : 4x^2+5x-9=0$

$(E_2) : -3x^2+2x+5=0$

$(E_3) : \sqrt{2}\,x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$

B On considère le trinôme $H(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ où α et β sont deux nombres réels.

1) Calculer $H(\alpha)$ et en déduire les solutions de l'équation $H(x) = 0$.

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_4) : x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$

$(E_5) : 2x^2-\left(1+\sqrt{7}\right)x+\dfrac{\sqrt{7}}{2}=0$

$(E_6) : x^2-5x+6=0$

C Déterminer une solution évidente, de chacune des équations suivantes, puis déterminer l'autre solution.

$(E_7)\quad x(x+1)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

$(E_8)\quad \left(x-\dfrac{ab}{x}\right)\left(x+\dfrac{ab}{x}\right)=(a-b)(a+b)$

$(E_9)\quad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1$

$(E_{10})\quad x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)x+4=0$

6 DEFINITIONS ET REGLES

1 Equations du second degré à une inconnue

Définition • Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une équation du second degré à une inconnue dans IR.

• Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples et applications

- L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet 1 et 3 comme solutions.
- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution dans IR.
- Calculer le discriminant de chacune des équations suivantes.

(1) : $-2x^2 + x + 1 = 0$; (2) : $x^2 + x + 1 = 0$; (3) : $25x^2 - 10x + 1 = 0$

Propriété 1 On considère dans IR l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.

et soit S son ensemble de solutions.

• Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution et on a : $S = \varnothing$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique $-\dfrac{b}{2a}$ et on a : $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes à savoir : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a : $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'équation (1) : $x^2 + 4x - 5 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta_1 = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$

Comme $\Delta_1 > 0$, alors l'équation (1) admet deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1=\frac{-4-6}{2}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+6}{2}=1$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \{-5 ; 1\}$.

- Résolvons dans IR l'équation (2) : $2x^2 + 5x + 7 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta_2 = 5^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31$

Comme $\Delta_2 < 0$, alors l'équation (2) n'a pas de solution.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2 = \varnothing$.

- Résolvons dans IR l'équation : (3) $4x^2-4\sqrt{5}\,x+5=0$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta_3 =\left(-4\sqrt{5}\right)^2-4\times4\times5=0$.

Comme $\Delta_3 = 0$, alors l'équation (3) admet une solution unique qui est $x_1=-\dfrac{-4\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3=\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

- Résoudre dans IR les équations suivantes :

(1) : $x^2 - 6x + 8 = 0$; (2) : $2x^2 + x - 2 = 0$

(3) : $3x^2 + 2x + 1 = 0$; (4) : $9x^2+2x+\dfrac{1}{9}=0$

Rappel

• Tout nombre réel qui vérifie l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est solution de cette équation et est dit racine du polynôme $ax^2 + bx + c$.

• Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes elles sont communément notées x_1 et x_2 (ou x' et x'').

Remarques

• Si $\Delta = 0$ alors $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$ on dit, dans ce cas, que l'équation admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme solution double.

• Si $ac < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes.

6 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 8 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et que $x_1 < x_2$

Recopier et compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$			0				
$x - x_2$					0		
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a > 0$)			0		0		
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a < 0$)			0		0		

ACTIVITE 9 Solutions évidentes et non recours au discriminant

A 1) On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

a) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a + b + c = 0$.

b) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a - b + c = 0$

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_1) : 4x^2+5x-9=0$

$(E_2) : -3x^2+2x+5=0$

$(E_3) : \sqrt{2}\,x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$

B On considère le trinôme $H(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ où α et β sont deux nombres réels.

1) Calculer $H(\alpha)$ et en déduire les solutions de l'équation $H(x) = 0$.

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_4) : x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$

$(E_5) : 2x^2-\left(1+\sqrt{7}\right)x+\dfrac{\sqrt{7}}{2}=0$

$(E_6) : x^2-5x+6=0$

C Déterminer une solution évidente, de chacune des équations suivantes, puis déterminer l'autre solution.

$(E_7) \quad x(x+1)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

$(E_8) \quad \left(x-\dfrac{ab}{x}\right)\left(x+\dfrac{ab}{x}\right)=(a-b)(a+b)$

$(E_9) \quad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1$

$(E_{10}) \quad x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)x+4=0$

6 DEFINITIONS ET REGLES

1 Equations du second degré à une inconnue

Définition • Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une équation du second degré à une inconnue dans IR.
• Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples et applications

- L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet 1 et 3 comme solutions.
- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution dans IR.
- Calculer le discriminant de chacune des équations suivantes.
  (1) : $-2x^2 + x + 1 = 0$; (2) : $x^2 + x + 1 = 0$; (3) : $25x^2 - 10x + 1 = 0$

Propriété 1 On considère dans IR l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.
et soit S son ensemble de solutions.
• Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution et on a : $S = \varnothing$.
• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique $-\dfrac{b}{2a}$ et on a : $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes à savoir : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a : $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'équation (1) : $x^2 + 4x - 5 = 0$
  Le discriminant de cette équation est $\Delta_1 = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$
  Comme $\Delta_1 > 0$, alors l'équation (1) admet deux solutions distinctes qui sont :
  $$x_1=\frac{-4-6}{2}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+6}{2}=1$$
  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \{-5 ; 1\}$.
- Résolvons dans IR l'équation (2) : $2x^2 + 5x + 7 = 0$
  Le discriminant de cette équation est $\Delta_2 = 5^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31$
  Comme $\Delta_2 < 0$, alors l'équation (2) n'a pas de solution.
  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2 = \varnothing$.
- Résolvons dans IR l'équation : (3) $4x^2-4\sqrt{5}\,x+5=0$.
  Le discriminant de cette équation est : $\Delta_3 = \left(-4\sqrt{5}\right)^2-4\times4\times5=0$.
  Comme $\Delta_3 = 0$, alors l'équation (3) admet une solution unique qui est $x_1=-\dfrac{-4\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3=\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.
- Résoudre dans IR les équations suivantes :
  (1) : $x^2 - 6x + 8 = 0$; (2) : $2x^2 + x - 2 = 0$
  (3) : $3x^2 + 2x + 1 = 0$; (4) : $9x^2+2x+\dfrac{1}{9}=0$

Rappel

• Tout nombre réel qui vérifie l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est solution de cette équation et est dit racine du polynôme $ax^2 + bx + c$.

• Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes elles sont communément notées x_1 et x_2 (ou x' et x'').

Remarques

• Si $\Delta = 0$ alors $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$ on dit, dans ce cas, que l'équation admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme solution double.

• Si $ac < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes.

2 Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété 2 On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ ne peut pas être factorisé en produit de polynômes du premier degré.

Exemples et applications

- Factorisons le trinôme $P(x) = 2x^2 - x - 1$.
  Le discriminant du trinôme $P(x)$ est $\Delta = 9$ et ses racines sont :
  $$x_1=-\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = 1 \text{ ; donc } P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
  C'est-à-dire : $P(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$ ou encore $P(x)=(2x+1)(x-1)$
- Factorisons le trinôme $Q(x)=-4x^2+4\sqrt{3}\,x-3$
  Le discriminant du polynôme $Q(x)$ est $\Delta = 0$;
  donc $Q(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ c'est-à-dire $Q(x)=-4\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
  ou encore $Q(x)=-(2x-\sqrt{3})^2$
- On considère le trinôme $R(x) = x^2 + x + 1$.
  Le discriminant de $R(x)$ est $\Delta = -3$
  Comme $\Delta < 0$, alors $R(x)$ ne peut pas être factorisé en produit de polynômes du premier degré.
- Factoriser les polynômes suivants :
  $$L(x)=4x^2+5x+1$$
  $$H(x)=25x^2-10\sqrt{2}\,x+2$$
  $$K(x)=-3x^2+2x-7$$

Remarque

Pour factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$, on détermine le signe de son discriminant et on précise ses deux solutions (lorsqu'elles existent).

3 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 3 Si le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est strictement positif, alors les deux solutions x_1 et x_2 de cette équation vérifient les deux égalités :
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Exemples et applications

- Soient x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation : $-2x^2+x+\sqrt{3}=0$
  On a : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$
  c'est-à-dire : $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ et $x_1x_2==-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- En notant que 1 est une solution de l'équation $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$,
  déterminons l'autre solution de cette équation. soit α cette autre solution.
  On a : $\alpha+1=1+\sqrt{2}$ (ou $\alpha\times1=\sqrt{2}$) ; donc $\alpha=\sqrt{2}$.
- Déterminer la somme et le produit des deux racines de chacun des deux polynômes suivants :
  $$P(x) = -2x^2 + 3x - 1 \quad \text{et} \quad Q(x)=x^2-(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}$$
- Etudier le signe des deux racines du trinôme $H(x) = -3x^2 + 7x + 1$ (sans déterminer ces deux racines).

4 Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Propriété 4 Soient S et P deux nombres réels.
Le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$
Les nombres u et v sont les solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

Exemples et applications

- Résolvons le système (s) : $\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = -6 \end{cases}$
  Comme $5^2 - 4(-6) = 49 >$, alors le système (s) admet une solution.
  u et v sont les deux solutions de l'équation (E) : $X^2 - 5X - 6 = 0$
  (E) admet deux solutions qui sont $x_1=\frac{5-7}{2}=-1$ et $x_2=\frac{5+7}{2}=6$
  Donc $\begin{cases} u = -1 \\ v = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 6 \\ v = -1 \end{cases}$
  L'ensemble des solutions du système (s) est $T = \{(-1 ; 6) ; (6 ; -1)\}$.
- Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=-1 \end{cases}$.
- Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les deux équations suivantes :
  (1) $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$; (2) $x^2-4\sqrt{3}\,x+9=0$

Remarque

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution double, alors $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$;

et on a aussi $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Eclaircissement

La propriété 3 nous permet de :

- **calculer la somme et le produit des deux solutions d'une équation du second degré sans déterminer (ou connaître) ses solutions.**
- **déterminer l'une des solutions connaissant l'autre.**
- **vérifier la validité des solutions trouvées.**
- **préciser le signe des solutions.**

Passage du système à l'équation

- **On dit que u et v ont des rôles symétriques dans le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$**
- **Il faut faire la distinction entre l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ et l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$**

Technique

Les solutions de l'équation $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ sont α et β.

5 Signe d'un trinôme du second degré

Propriété 5 On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et soit Δ sont discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de IR.
- Si $\Delta = 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x différent du réel $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors le signe de $P(x)$ est :
  → le signe de a à l'extérieur des racines ;
  → le signe contraire de a à l'intérieur des racines.

Exemples et applications

- Etudions le signe du trinôme $P(x) = -3x^2 + x - 2$.
Le discriminant du trinôme $P(x)$ est $\Delta = -23$.
Comme $\Delta < 0$, alors le signe de $P(x)$ est celui du nombre a.
Puisque $a = -3 < 0$, alors $P(x) < 0$ pour tout x de IR.

Tableau de signe de P(x) :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	

- Etudions le signe du trinôme $Q(x) = 2x^2 - x - 1$.
Le discriminant du trinôme $Q(x)$ est $\Delta = 9$.
Comme $\Delta > 0$; donc $Q(x)$ admet deux racines, à savoir $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
Comme $a = 2 > 0$, on a le tableau suivant :

Tableau de signe de Q(x) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Etudions le signe du trinôme $R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}x + 3$.
Le discriminant du trinôme $R(x)$ est $\Delta = 0$.
Donc $R(x)$ admet une racine unique qui est $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Comme $a = 16 > 0$, alors $R(x) > 0$ pour tout x de $IR \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Tableau de signe de R(x) :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$		$+\infty$
$R(x)$		$+$	0	$+$	

- Etudier le signe de chacun des trinômes suivants :

$$G(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$H(x) = -x^2 - 2x + 15$$
$$K(x) = -5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25$$

Remarque

* x_1 et x_2 étant les deux racines distinctes du trinôme $P(x)$ tels que $x_1 < x_2$:
  - l'intérieur des racines signifie : $x \in]x_1 ; x_2[$
  - l'extérieur des racines signifie : $x \in]-\infty ; x_1[$ ou $x \in]x_2 ; +\infty[$
  - $P(x_1) = P(x_2) = 0$
* Si $\Delta = 0$, alors $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

6 Inéquations du second degré

Définition On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \neq 0$).

Toute Inéquation de la forme $P(x) \geq 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) < 0$ est appelée **inéquation du second degré**.

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'inéquation (1) : $x^2 - 7x + 12 \geq 0$.
Etudions d'abord le signe du trinôme $x^2 - 7x + 12$.
Le trinôme $x^2 - 7x + 12$ admet deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$.

Tableau de signe de $x^2 - 7x + 12$:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est : $S_1 =]-\infty ; 3] \cup [4 ; +\infty[$

- Résolvons dans IR l'inéquation (2) : $-3x^2 + x - 1 \leq 0$.
Etudions d'abord le signe du trinôme $-3x^2 + x - 1$.
Le discriminant du trinôme $-3x^2 + x - 1$ est $\Delta = -11$.
$\Delta < 0$; donc le signe de $-3x^2 + x - 1$ est le même que celui de -3 pour tout réel x.

Tableau de signe de $-3x^2 + x - 1$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2 + x - 1$		$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $S_2 = IR$

- Résolvons dans IR l'inéquation (3) : $16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3 < 0$
Etudions d'abord le signe du trinôme $16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3$
Le trinôme $16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3$ admet une racine double qui est $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

Tableau de signe de $16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3$:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{4}$		$+\infty$
$16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3$		$+$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est : $S_2 = \varnothing$

- Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

(1) $3x^2 - 2x - 8 > 0$
(2) $x^2 - 2x + 15 \leqslant 0$
(3) $-5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25 < 0$

Rappel

Tout nombre réel t vérifiant l'inégalité $P(x) \geq 0$ (c'est-à-dire $P(t) \geq 0$) est une solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

$(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ comme solution unique

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a

$\Delta > 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a

(On suppose $x_1 < x_2$)

$\Delta < 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans IR.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

Somme et produit des solutions d'une équation du second degré à une inconnue

Si α et β sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors $\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Soient S et P deux nombres réels.

Le système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$

Les réels u et v sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

1 Equation se ramenant à une équation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation (1) : $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Solution

Résolvons dans IR l'équation (1) : $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Cette équation équivaut à : $3(x^2)^2 - 2x^2 - 1 = 0$

Posons $X = x^2$; donc l'équation (1) devient :

$$(1') : \quad 3X^2 - 2X - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 > 0$.

Donc l'équation (1') admet deux solutions

$$X_1 = \frac{2-4}{6} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2+4}{6}$$

c'est-à-dire $X_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $X_2 = 1$

Or $X = x^2$; par conséquent l'équation (1) équivaut à

$$\left(x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = -\frac{1}{3}\right)$$

La dernière relation est impossible $\left(\text{car } x^2 \geq 0 \text{ et } -\dfrac{1}{3} < 0\right)$

Par ailleurs $x^2 = 1$ signifie que $(x = -1$ ou $x = 1)$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \{-1 ; 1\}$.

2 Inéquation se ramenant à une inéquation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'inéquation suivante :

$$(2) \quad \frac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5} \geq 0$$

Commentaire

Pour résoudre cette inéquation, on étudie d'abord les signes de $-2x^2 + x + 1$ et $x^2 - 4x - 5$, puis on en déduit le signe du quotient $\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$

Solution

L'inéquation (2) est définie lorsque $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

- Résolvons dans IR l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$;

 son discriminant est $\Delta = 36$ qui est strictement positif. Donc l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.

- Résolvons dans IR l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$;

 son discriminant est $D = 9$ $(D > 0)$; donc $-2x^2 + x + 1 = 0$ admet deux solutions qui sont $x' = -\dfrac{1}{2}$ et $x'' = 1$

Tableau de singe de $\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		5		$+\infty$
$-2x^2+x+1$		−		−	0	+	0	−		−	
x^2-4x-5		+	0	−		−		−	0	+	
$\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$		−	‖	+	0	−	0	+	‖	−	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est

$$S_2 = \left]-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, 5[$$

3 Résolution d'une équation irrationnelle qui se ramène à une équation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation (3) : $\sqrt{x^2+3} = 2x - 1$

Solution

L'équation (3) : $\sqrt{x^2+3} = 2x - 1$ est équivalente à :

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = (2x-1)^2 \quad \text{et} \quad 2x - 1 \geqslant 0$$

c'est-à-dire à : $x^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 1$ et $x \geqslant \dfrac{1}{2}$

ou encore à : $3x^2 - 4x - 2 = 0$ et $x \in \left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$

Le discriminant de l'équation $3x^2 - 4x - 2 = 0$

est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 40$; donc l'équation $3x^2 - 4x - 2 = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{40}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-\sqrt{40}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$

Comme $\dfrac{2-\sqrt{10}}{3} \notin \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et $\dfrac{2+\sqrt{10}}{3} \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$,

alors l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3 = \left\{\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

4 Résolution d'un système qui se ramène à une équation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR^2 le système (4) : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Solution

$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$

c'est-à-dire à : $\begin{cases} -3xy = 13 - 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$ ou encore à : $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$

Donc x et y sont solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$

qui a pour solutions $u_1 = -3$ et $u_2 = 1$. Donc $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions du système (4) est

$$S_4 = \{(-3 ; 1) \; ; \; (1 ; -3)\}$$

Exercices d'application

Equations du second degré ne nécessitant pas le calcul du discriminant

1 **Type $ax^2 + c = 0$ ou $ax^2 + bx = 0$**

Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^2 - 4 = 0$; 2) $x^2 - 7 = 0$

3) $7x^2 + 3 = 0$; 4) $5x^2 - 36 = 0$

5) $3x^2 - 2x = 0$; 6) $5x^2 = 3x$

7) $9(x + 1)^2 - 36 = 0$; 8) $(3x + 1)^2 + (3x + 1) = 0$

9) $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) = 0$; 10) $(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) = 0$

2 **Type se ramenant à $a(x - r)(x - s) = 0$**

Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $(x-7)(2x+1)=0$

2) $(3-2x)(x-4)=0$

3) $(3x-7)^2-9(x+2)^2=0$

4) $(x+2)^2+(3-x)^2=0$

5) $(x-5)(x+7)+x^2-25=0$

6) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$

7) $(3x-1)(x-2)=(x-2)$

8) $7x(x-3)=(x-3)^2$

3 **Type $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ ou $x^2 - 2ax + a^2 = 0$**

Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $4x^2-4x+1=0$; 2) $x^2+3x+\frac{9}{4}=0$

3) $100x^2-60x+9=0$; 4) $x^2+x+\frac{1}{4}=0$

5) $4x^2+24x+36=0$; 6) $25x^2-30x+9=0$

7) $4x^2+28x+49=0$; 8) $2x^2-2\sqrt{6}\,x+3=0$

Forme canonique

4 Recopier les égalités suivantes et les compléter :

1) $x^2 + 12x + 11 = (x + ...)^2 + ...$

2) $x^2 + 12x + 35 = (x + ...)^2 + ...$

3) $x^2-7x=(x-...)^2+...$

4) $x^2+7x+\frac{49}{4}=(x+...)^2+...$

5) $x^2-5x+9=(x-...)^2+...$

6) $x^2-5x+4=(x-...)^2+...$

7) $x^2+5x-\frac{49}{4}=(x+...)^2+...$

5 Ecrire le trinôme $f(x)$ sous la forme $a[(x-\alpha)^2-d]$ où a, α et d sont des nombres réels que l'on déterminera dans chaque cas, puis déterminer la forme factorisée (si c'est possible) du polynôme $f(x)$:

1) $f(x)=-4x^2+24x-28$

2) $f(x)=2x^2-3x+1$

3) $f(x)=2x^2-3x-15$

4) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+x+3$

5) $f(x)=-3x^2+x+4$

6) $f(x)=3x^2-x+\frac{5}{12}$

Equations du second degré

6 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $10x^2-3x-4=0$

2) $x^2-x+7=0$

3) $9x^2-42x+49=0$

4) $(2+\sqrt{3})x^2-(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-1=0$

5) $(1+\sqrt{2})x^2-2(1-\sqrt{2})x+1=0$

6) $x^2-21x+54=0$

7) $3t^2-17t+4=0$

8) $4x^2-7x-1=0$

9) $5x^2+x-252=0$

10) $-x^2-55x+4500=0$

7 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $t^2-1,32t+1,27=0$

2) $\frac{3}{8}x^2+\sqrt{\frac{7}{4}}\,x-1,5=0$

3) $10000x^2-10001x+10000=0$

4) $x^2+2x+1-a^4=0$

(où a est un nombre réel non nul donné).

8 Déterminer des équations du second degré admettant r et s comme solutions, dans chaque cas suivant :

1) $r = 1$ et $s = r$

2) $r = -5$ et $s = 8$

3) $r = 0$ et $s = -4$

4) $r = -1$ et $s = -2$

5) $r = a + 1$ et $s = a - 1$

(a réel donné)

Inéquations du second degré

9 **Signe d'un trinôme**

Déterminer, selon les valeurs de x, le signe du trinôme $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

2) $f(x) = 7x^2 + 12x + 5$

3) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

4) $f(x) = x^2 + x + 1$

5) $f(x) = 8 - 5x^2$

6) $f(x) = -x^2 + 11x - 30$

7) $f(x) = (5x + 7)(x - 3)$

8) $f(x) = (4x + 5)^2 - 49$

9) $f(x) = 4x^2 - (x + 6)^2$

10) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

10 **Inéquations**

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

1) $x^2-5x+6\geq 0$

2) $x^2-8x+5<0$

3) $49x^2-70x+25>0$

4) $-x^2+x+3<0$

5) $\sqrt{2}\,x^2+4x+\frac{1}{\sqrt{2}}\leq 0$

6) $3,5x^2-0,5x+0,15\leq 0$

Equations se ramenant à des équations du second degré

11 En posant $X = x^2$, résoudre chaque équation parmi les équations suivantes :

1) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

2) $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

3) $x^4 + x^2 - 56 = 0$

4) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

5) $6x^4 - 17x^2 + 5 = 0$

6) $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$

7) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

12 En posant $t=\sqrt{x}$, résoudre les équations suivantes :

1) $x-2\sqrt{x}+3=0$

2) $3x+8\sqrt{x}-3=0$

3) $x+9\sqrt{x}-10=0$

4) $2x+7=15\sqrt{x}$

5) $\sqrt{x}=x-2$

13 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $(3x-1)(5x+2)=3x-1$

2) $\frac{x^2+x+1}{x-1}=2x+3$

3) $\frac{x}{x^2-8}+3=0$

4) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}=1$

5) $(x^2+x+1)^2=(x^2+x+2)^2-9$

14 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $\sqrt{x^2+4}=5-x$

2) $\sqrt{x^2-3x+1}=x-2$

3) $x-\sqrt{5x-1}=3$

4) $\sqrt{x^2-8}-2x=-5$

15 Soient s et p deux nombres réels donnés.
On considère le trinôme $f(x) = x^2 - sx + p$ et on suppose $s^2 - 4p > 0$.

a) Montrer que $f(x)$ admet deux racines distinctes et calculer leur somme et leur produit.

b) On suppose que deux nombres ont pour somme s et pour produit p. Montrer que ces deux nombres sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Inéquations se ramenant à des inéquations du second degré

16 Résoudre, dans IR, chacune des inéquations suivantes :

1) $(3x-2)^2>(2x+2)^2$

2) $(x+3)(4x+3)>2x+6$

3) $\frac{x+5}{2x+1}\geq 0$

4) $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x+1}\leq -2$

5) $\frac{2x^2-8x-24}{x^2+17x+52}\geq 0$

6) $\sqrt{x-2}<x-5$

7) $\frac{6x+2}{3x+9}+\frac{x-1}{2x+1}>0$

Exercices de renforcement des apprentissages

17 α, β et γ sont des nombres réels donnés.
Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

1) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
2) $(\alpha + 1)^2 x^2 - (\alpha - \beta)(\alpha + 1)x - \alpha\beta = 0$
3) $4\alpha^2x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - (\gamma + \alpha)^2 = 0$
4) $\alpha^2x^2 - \alpha(\alpha + \beta + 1)x + \beta(\alpha + \beta(\alpha + 1)) = 0$
5) $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)x - \beta^2\gamma^2 - \gamma^2\alpha^2 = 0$

18 Résoudre, dans IR, les équations suivantes :

1) $(2x+1)^2 + (6x+7)^2 - 8 = 0$
2) $4(x-5)^2 + 9x = -3(x+3)$
3) $(x+2)^2 + (x-2)^2 + x^2 = 8 - x$
4) $\frac{5x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{8}{3}$
5) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{24}$

19 Sans effectuer aucun calcul, montrer que les équations suivantes n'ont pas de solution dans IR :

1) $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$
2) $x + 5\sqrt{x} + 3 = 0$
3) $x + 3\sqrt{x-4} - 2 = 0$
4) $2x^4 + ax^2 + a^2 + 1 = 0$

20 Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

1) $7x^2 - 5x + 4 > 0$
2) $66x^2 + 17x + 1 < 0$
3) $3x^4 + 2x^2 - 1 > 0$
4) $x^2 - 4x + 3 > 10^{10}$
5) $-15 - 29x + 8x^2 \leq 0$
6) $x^5 - x^2 < 0$
7) $x^6 - 7x^3 - 8 \geq 0$
8) $x^2 + 7x - 3 < -10^{10}$

21 Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

1) $4x - 3\sqrt{x} + 1 < 0$
2) $\frac{x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x} < 0$
3) $\frac{x^3 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \geqslant 0$
4) $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2 + x} \leq \frac{3(x+3)}{x}$
5) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} \leq \frac{1}{2}x + 2$

22 Déterminer le nombre réel a pour que les deux équations suivantes $x^2 + x + a = 0$ et $x^2 + ax + 1 = 0$ aient une solution commune.

23 Soient α et β les solutions de l'équation $x^2 + 7x - 12 = 0$
1) Calculer α et β.
2) Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.
3) Calculer (en utilisant le résultat de 2) ce qui suit :

$\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$; $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$

$\frac{\alpha-1}{\beta} + \frac{\beta-1}{\alpha}$; $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

$\alpha^3 + \beta^3$; $\alpha^4 + \beta^4$

24 Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = -1024 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 98 \\ xy = 15 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

5) $x + y = xy = \frac{x}{y}$

25 Résoudre, dans IR, le système :

$$\begin{cases} x^2 + 14x - 51 < 0 \\ 4x + 17 > 0 \end{cases}$$

26 Résoudre, dans IR, le système :

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq 3 \\ 2 + x < x^2 \end{cases}$$

27 On considère, dans IR, l'équation (E) suivante :

$$(E) : x - 2 = \frac{-1}{x+1}$$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes.
2) Si m et n sont les solutions de l'équation (E), montrer que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -1$$

28 1) Résoudre, dans IR, l'équation : $t^2 + 4t + 3 = 0$
2) Résoudre, dans IR, l'équation : $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

29 Déterminer tous les couples $(x ; y)$ de réels tels que :

$$\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$$

30 Déterminer tous les couples $(x ; y)$ de réels tels que :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = x + \sqrt{xy} \\ (x+y)^2 = 2(x-y)^2 \end{cases}$$

31 Déterminer tous les couples a, b et c tels que :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab + c^2 = 1 \end{cases}$$

32 Déterminer tous les réels x et y tels que :

$$x^2 + y^2 + (x + y) - xy + 1 = 0$$

33 Soient a et b deux nombres réels donnés
On pose $P(x) = x^3 - (a + b + 1)x^2 + (ab + a + b)x - ab$
1) Montrer que $P(1) = 0$
2) Résoudre, dans IR, l'équation $P(x) = 0$

34 a et b étant deux nombres réels donnés, on considère les deux équations :

$$(E) : x^2 + ax + 1 = 0$$
$$(E') : x^2 + bx + 1 = 0$$

On suppose que (E) admet deux solution α et β.
et que (E') admet deux solutions α' et β'.
Calculer, en fonction de α et β, le produit suivant :

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')$$

35 Résoudre, dans IR, l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1$$

36 Déterminer le nombre réel a pour que l'on ait :
Pour tout réel x : $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 + x + 1} < 2$

37 Soit a un nombre réel tel que : $a \geq 1$
Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que :

$$\begin{cases} |x| \leq a \\ x + \frac{1}{x} = 2a \end{cases}$$

38 Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle tels que : $a < b < c$.
Montrer que l'équation : $x^2 - (a + b + c)x + a^2 + b^2 = 0$ admet deux solutions distinctes.

Exercices de synthèse

39 Soient a et b deux nombres réels.
S est l'ensemble des solutions de l'équation : $x^2 - ax + b = 0$
T est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - bx + a = 0$
Déterminer a et b sachant que : $S \cup T = \{-1 ; 1 ; 2 ; 3\}$

40 On considère, dans IR, l'équation symétrique

$$(E) : 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0.$$

1) Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2) Montrer que l'équation (E) est équivalente à

$$(E') : \ 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

3) On pose $u = x + \frac{1}{x}$
   a) calculer u^2 (en fonction de x).
   b) Montrer l'équation (E') équivaut à :
   $(2u^2 - 5u - 3 = 0$ et $u = x + \frac{1}{x})$
4) Résoudre, dans IR, l'équation $2u^2 - 5u - 3 = 0$.
   En déduire les solutions de l'équation (E).
5) En procédant de la même façon, résoudre chacune des équations suivantes :

$(E_1) : 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

$(E_2) : x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

$(E_3) : x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$

$(E_4) : 2(x + 1)^4 + 9(x + 1)^3 + 14(x + 1)^2 + 9(x + 1) + 2 = 0$

41 Montrer que, quels que soient les nombres réels non nuls x et y, on a :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 > 0$$

42 On considère l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$.
Soient α et β les deux solutions de (E).
On pose :
$s_1 = \alpha + \beta$; $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$;... ; $s_n = \alpha^n + \beta^n$ pour tout n de IN*
1) Montrer que : $s_{n+2} + s_{n+1} = s_n$.
2) Calculer s_2 ; s_3 ; s_4 ; s_5 ; s_6 ; s_7 ; s_8.
3) En déduire que : $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8 = 47$

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

Problèmes

43 Trouver deux nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme des carrés est égale à 8048074.

44 Deux ouvriers doivent exécuter un travail déterminé.

S'ils travaillent ensemble, il achèveront le travail en 12 jours.

Si l'un des ouvriers effectue la moitié du travail en question, puis l'autre poursuit l'exécution de la moitié du travail, ils accompliront le travail en 25 jours.

Quels est le temps nécessaire pour chaque ouvrier pour accomplir le travail seul ?

45 On considère l'expression $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$

1) Résoudre, dans IR, l'équation $F(x) = -4$.
2) Résoudre, dans IR, l'inéquation $F(x) > -4$.
3) α et β sont deux nombres réels qui vérifient $F(\alpha) = F(\beta)$.
   Montrer que α et β sont solutions de l'équation
   $t^2 - pt + p - 7 = 0$ où p est un nombre réel que l'on déterminera.

46 Soit a un nombre réel.

On considère l'équation (E) suivante :

(E) : $(2a - 1)x^3 + 2(a - 1)x^2 - 2(2a - 1)^2x + 5 = 0$

1) Déterminer a sachant que 1 est solution de l'équation (E).
2) En considérant les valeurs obtenues à la question 1), trouver les réels α, β et γ pour que l'équation devienne :
   $(x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$
3) Résoudre cette équation.

47 Deux villes sont distantes de 450km.

Pour parcourir cette distance, une voiture met quatre heures de moins qu'un camion.

Sachant que la vitesse de la voiture dépasse celle du camion de 30km/h, quelles sont les vitesses respectives de la voiture et du camion.

48 Calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sachant que la longueur de son hypoténuse est 26m, et que la distance entre le sommet de l'angle droit et le pied de la hauteur issue de ce sommet est 9,23m.

49 Un robinet remplit un bassin de 6m^3 de capacité.

Si le débit du robinet est 10 litres par minute, il faut 20mn supplémentaires pour remplir le bassin.

Quel est le débit du robinet (en l/mn) ?

50 La distance d parcourue par un caillou en chute dans un puits est (approximativement) $d = 4{,}9t^2$ (d en mètres et t en secondes).

Par ailleurs la vitesse du son dans l'air est d'environ 330m/s.

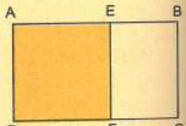
Si on jette un caillou dans un puits, l'écho de la percussion avec l'eau nous parvient après trois secondes de son lancer.

Quelle est la profondeur de ce puits ?

51 On dit que le rectangle ABCD est un **rectangle d'or** si :

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{EB}$

où AEFD est un carré ;



ce qui signifie que le rapport "longueur sur largeur" dans les deux rectangles ABCD et BCFE est le même. Ce rapport est noté φ et appelé **nombre d'or**.

Il est clair que $\varphi > 1$.

1) Déterminer la valeur de φ.
   (On pourra poser x = AB et prendre BC = 1)
2) En déduire les valeurs de $\dfrac{1}{\varphi}$, $\varphi - \dfrac{1}{\varphi}$ et $\dfrac{1}{\varphi - 1}$.
3) Le rectangle EBCF est-il un rectangle d'or ?

Calcul vectoriel dans le plan

7

Capacités attendues

- Construction d'un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Exprimer les notions et les propriétés géométriques en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement.
- Résolution de problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.

Contenu

Activités préparatoires

- Egalité de deux vecteurs
- Somme de deux vecteurs - relation de Chasles
- Colinéarité de deux vecteurs
- Milieu d'un segment
- Propriété $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- Propriété $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- Alignement de trois points
- Colinéarité de deux vecteurs
- Calcul vectoriel et résolution de problèmes
- Condition de nullité d'un vecteur

Définitions et règles

- Egalité de deux vecteurs
- Somme de deux vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel
- Colinéarité de deux vecteurs
- Milieu d'un segment

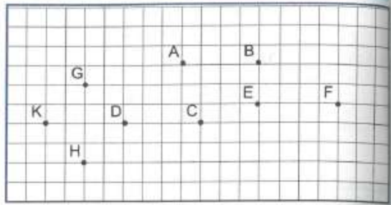
Points essentiels

Exercices résolus

Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 — Egalité de deux vecteurs

Recopier le dessin ci-contre.



1) On a (AB) // (CD). On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même **direction**.

a) Déterminer les vecteurs qui ont la même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même direction que le vecteur $\overrightarrow{DG}$.

2) On a AB = CD. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme ; la distance AB est appelée **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ et on la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

a) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que celle du vecteur $\overrightarrow{DG}$.

3) ABDK est un parallélogramme et C appartient à la demi-droite [KD).
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KC}$ ont le même **sens**.

a) Déterminer les vecteurs qui ont le même sens que celui de $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que $\overrightarrow{DG}$ et qui n'ont pas le même sens que le vecteur $\overrightarrow{DG}$.

4) On dit que deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

a) Déterminer les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

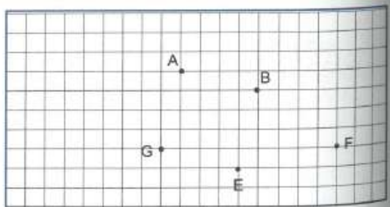
b) Déterminer les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DG}$.

> · $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati)
> · $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

• ABCD et ABFE sont des parallélogrammes et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
La translation qui transforme A en B, transforme aussi E en F et D en C. Le vecteur de cette translation peut être noté $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{EF}$.
Généralement, on le note $\vec{u}\left(\vec{v}\,;\vec{w}\,;...\right)$; cette notation est indépendante des points qui déterminent le vecteur considéré.

ACTIVITE 2 — Somme de deux vecteurs - Relation de Chasles

A Recopier le dessin suivant.



1) Compléter l'égalité : $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=...$

2) a) Construire le point H tel que ABGH soit un parallélogramme.

b) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}$.

c) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BE}$.

B 1) Ecrire les vecteurs suivants sous forme d'un seul vecteur.

a) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$

c) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AF}$

2) Soient K, L, M, N des points du plan.
On considère les deux point I et J définis par :
$\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}$

a) Calculer $\overrightarrow{JI}$.

b) Que peut-on en déduire ?

ACTIVITE 3 — Colinéarité de deux vecteurs

Dans chacune des figures suivantes, existe t-il un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$?
Si oui, quel est son signe ?

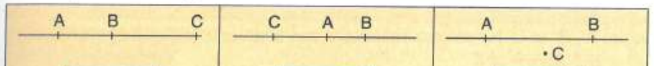


Figure (1) Figure (2) Figure (3)

> (A, B et C sont alignés) signifie qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

ACTIVITE 4 — Milieu d'un segment

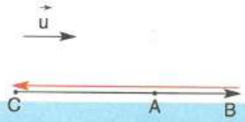
Soient A, B deux points distincts, I le milieu du segment [AB] et O un point donné.

1) Montrer que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{O}$ et $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$.

2) Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

ACTIVITE 5 — Propriété $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ et on pose $\|\vec{u}\|=k$.
Soient a et b deux nombres réels tels que $a>0$, $b<0$ et $a+b<0$.
A, B et C sont des points tels que $\overrightarrow{AB}=a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=b\vec{u}$.

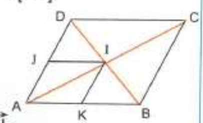


1) Calculer la norme $\|\overrightarrow{AC}\|$ en fonction de a, b et k.

2) Montrer que : $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

ACTIVITE 6 — Propriété $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

A Soient ABCD un parallélogramme de centre I, J le milieu de [AD] et K le milieu de [AB].
On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$

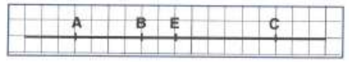


1) Montrer que AKIJ est un parallélogramme.

2) Montrer que $\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\overrightarrow{AI}$

En déduire que : $\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

B Recopier la figure suivante :



On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

1) Montrer que : $\frac{1}{2}\left(3\vec{u}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)\vec{u}=\overrightarrow{AE}$.

2) En déduire que : $\frac{1}{2}\left(3\vec{u}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\vec{u}$.

7 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 7 — Alignement de trois points

Soient A, B, C trois points non alignés.

On considère les points M, N, P définis par .

$\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA}$; $\overrightarrow{PA}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PB}$.

1) Déterminer $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Déterminer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{NP}$.

3) En déduire que M, N et P sont alignés.

ACTIVITE 8 — Colinéarité de deux vecteurs

Soient ABC un triangle, A′, B′ et C′ les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1) Montrer que : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

2) Soit I un point donné.

On considère les points J et K tels que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{BB'}$.

Soit E le milieu du segment [JK].

Montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

ACTIVITE 9 — Calcul vectoriel et résolution de problèmes

Soient ABC un triangle, M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Soient I un point donné, J et K les points définis par : $\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CP}$.

Soit E le milieu du segment [JK].

1) Montrer que : $\overrightarrow{IE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire des droites (IE) et (BC) ?

2) Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

Montrer que le point H défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, est l'orthocentre du triangle ABC.

ACTIVITE 10 — Condition de nullité d'un vecteur

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Soient E le milieu de [AC] et F le milieu de [BD].

Pour tous nombres réels x et y, on considère le vecteur $\vec{S}$ définis par :

$$\vec{S}=x\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+y\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\right)$$

1) Exprimer $\vec{S}$ en fonction de x, y et $\overrightarrow{EF}$.

2) Quelle est la condition pour que $\vec{S}=\vec{0}$?

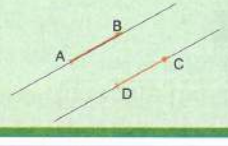
7 DEFINITIONS ET REGLES

1 Egalité de deux vecteurs

Définition Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que A ≠ B et C ≠ D.

On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont **égaux** et on écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ lorsque ces deux vecteurs ont :

- la même direction ;
- le même sens ;
- la même norme.



Propriété 1 Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Exemples et applications

- Soient A, B, C, D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.
  Donc : BADC ; ADCB ; DCBA sont des parallélogrammes
  D'où : $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$
- Soient AEFD et EFCB deux parallélogrammes.
  Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Propriété 2 Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point unique B tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Conséquence Quels que soient les points A, M et N du plan, on a :

- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$ signifie que M = N.
- $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ signifie que M = A.

Le vecteur $\vec{0}$ est dit vecteur nul.

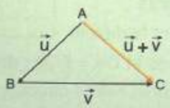
2 Somme de deux vecteurs

Définition (Relation de Chasles)

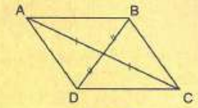
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.

La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ et défini par : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ est connue sous le nom de relation de Chasles.



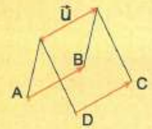
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction signifie que : (AB) // (DC)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens signifie que le déplacement de A vers B se fait dans le même sens que le déplacement de D vers C.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même norme signifie que AB = DC c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{DC}\|$ (les deux vecteurs ont la même longueur).
- On ne peut comparer le sens de deux vecteurs que s'ils ont la même direction.



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ABCD

est un parallélogramme

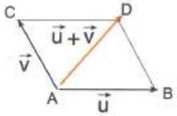


Remarque

Il existe une infinité de vecteurs égaux à un vecteur donné $\vec{u}$.

Règle du parallélogramme pour construire la somme de deux vecteurs

La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ pour que ABDC soit un parallélogramme.



Rappel

$\boxed{\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA}}$

Exemples et applications

- Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

On a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC}$

Donc : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

- Soient A, B, O trois points du plan $\mathcal{P}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

- Soient ABCD un parallélogramme, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
Soit K un point de la droite (AD).
Montrer que : $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$

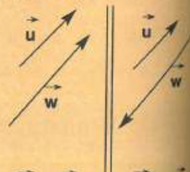
3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $\vec{w}$ que l'on note $k\vec{u}$ et qui est défini par :

- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si k = 0, alors $\vec{w} = \vec{0}$ (c'est-à-dire $0\vec{u} = \vec{0}$)
  - Si k > 0, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, le même sens et $\|\vec{w}\| = k\|\vec{u}\|$
  - Si k < 0, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, des sens contraires et $\|\vec{w}\| = (-k)\|\vec{u}\|$
- Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{w} = \vec{0}$ (c'est-à-dire $k\vec{0} = \vec{0}$)

Rappel

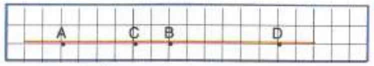
La norme $\|\vec{u}\|$ du vecteur $\vec{u}$ n'est autre que la longueur du vecteur $\vec{u}$.



$\vec{w} = k\vec{u}$ (k > 0) $\quad$ $\vec{w} = k\vec{u}$ (k < 0)

Exemples et applications

- On considère la figure suivante :

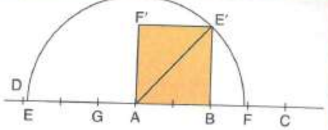


– Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont la même direction, des sens opposés et CA = 2CB ; donc $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{CB}$.
– Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont la même direction, le même sens et DA = 2DB ; donc $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB}$.

Rappel

- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
- $(-1)\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$
- $0\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

- On considère la figure suivante :
– On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
– La longueur de la diagonale du carré ABE'F' est égale à $\sqrt{2}$ AB (rayon du cercle).
– Les deux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, des sens opposés et AE $= \sqrt{2}$ AB ; donc $\overrightarrow{AE} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$.



- Déterminer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés Quels que soient les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}$ et les réels a, b et k, on a :

$$a\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}$$
$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$
$$a\left(b\vec{u}\right) = (ab)\vec{u}$$

Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors : k = 0 ou $\vec{u} = \vec{0}$

Remarque

$a\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = a\vec{u} - a\vec{v}$

$(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

Exemples et applications

- • On a : $\vec{u} + x\vec{u} = 1\vec{u} + x\vec{u}$

$\vec{u} + x\vec{u} = (1+x)\vec{u}$

• Si $6\vec{u} = 8\vec{v}$, alors : $\frac{1}{2}\left(6\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\left(8\vec{v}\right)$ c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{2}\times 6\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\times 8\right)\vec{v}$

ou encore $3\vec{u} = 4\vec{v}$

- Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 2\left(\vec{u}+\vec{v}\right) - 2\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$; $\vec{V}_2 = \vec{u} + 2\left(\vec{u}-\vec{v}\right) - 3\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$\vec{V}_3 = 3\left(\vec{u}-2\vec{v}\right) + 5\left(\vec{v}-\vec{u}\right)$; $\vec{V}_4 = \frac{1}{2}\left(4\vec{u}+5\vec{v}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

4 Colinéarité de deux vecteurs

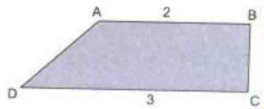
Définition On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

• $\vec{0} = 0.\vec{u}$
Le vecteur nul est colinéaire avec tout vecteur du plan.

Exemples et applications

- Soit ABCD un trapèze (voir figure)



On a : $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$. Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

- Soient A, B et C trois points tels que $7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

On a $7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$; donc $7\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$.
D'où la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

• Les points A, B, C sont alignés signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{AB} = k'\overrightarrow{AC}$)

- Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :

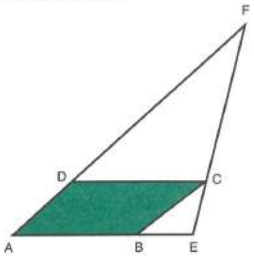
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=4\,\overrightarrow{AD}$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$$

Or $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AF}=4\,\overrightarrow{AD}$, par suite :

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BC} \quad \left(\text{car } \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\right)$$
$$\overrightarrow{EF}=4\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$$



Donc : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$

Ce qui prouve que les points E, C et F sont alignés.

- Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$$

1) Construire la figure.
2) Montrer que les points A, C et F sont alignés.

5 Milieu d'un segment

Propriété 3 Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB], il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

(1) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

(2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Propriété 4 Si I est le milieu du segment [AB], alors quel que soit le point M du plan $\mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

Exemple

- Soit ABC un triangle.

Construisons les points E et F définis par

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

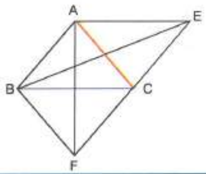
Donc ABCE et ABCF sont des parallélogrammes

c'est-à-dire $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

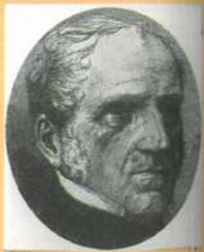
D'où C est le milieu de [EF].



Remarque importante

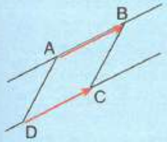
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et si $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$, où α et β sont des réels, alors :

$\alpha=0$ et $\beta=0$

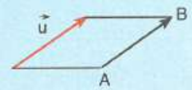


Michel Chasles (1793-1880) Savant et mathématicien français. On lui doit d'importants travaux en géométrie vectorielle et projective.

Egalité de deux vecteurs



- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont :
  - la même direction
  - le même sens
  - la même norme
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



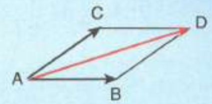
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point unique B tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$ signifie que M = N
- $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ signifie que M = A

Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C du plan $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

Somme de deux vecteurs



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

signifie que ABDC est un parallélogramme

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

- Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $\vec{w}$ que l'on note $k\vec{u}$ et qui défini par :
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si k = 0, alors $\vec{w}=\vec{0}$ $\left(0\vec{u}=\vec{0}\right)$
  - Si $k>0$, alors $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ont la même direction, le même sens et $\|\vec{w}\|=k\|\vec{u}\|$
  - Si $k<0$, alors $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ont la même direction, des sens opposés et $\|\vec{w}\|=(-k)\|\vec{u}\|$
- Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{w}=\vec{0}$ $\left(k\vec{0}=\vec{0}\right)$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et les réels a, b et k, on a :

- $a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\vec{u}+a\vec{v}$

  $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

  $a\left(b\vec{u}\right)=(ab)\vec{u}$
- Si $k\vec{u}=\vec{0}$, alors $\left(k=0 \text{ ou } \vec{u}=\vec{0}\right)$

Colinéarité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$

Milieu d'un segment

- Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB] il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée.

(1) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

(2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

- Si I est le milieu du segment [AB], alors quel que soit le point M du plan $\mathcal{P}$: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

1 Points alignés – Parallélogramme

Soient O, A et B des points du plan $\mathcal{P}$.

Soient M, N et P les points, du plan $\mathcal{P}$, tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

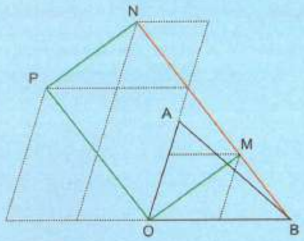
1) Construire la figure.

2) Montrer que les points B, M et N sont alignés.

3) Montrer que le quadrilatère OMNP est un parallélogramme.

Solution

1) Construction de la figure.



2) Alignement des points B, M et N

• On a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BM} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

• On a : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BN} = \left(2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

• On a $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BM}$

Ce qui prouve que les points B, P et N sont alignés.

3) Nature du quadrilatère OMNP.

On a : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PN} = \left(2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \left(\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$

$\overrightarrow{PN} = \left(2 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$

D'où OMNP est un parallélogramme.

2 Milieu d'un segment

Soit ABC un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3) Montrer que A est le milieu du segment [CE].

Solution

1) Construction du point D

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AD} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

2) Construction du point E

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Ce qui signifie que ABED est un parallélogramme.

3) Montrons que A est milieu de [CE]

Ce que l'on veut prouver est

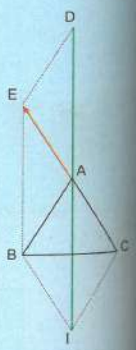
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

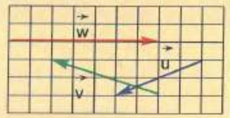
D'où : A est le milieu du segment [CE].



Exercices d'application

Somme vectorielle

1 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs représentés sur la figure. A partir de deux points A et B du quadrillage, construire les points M, N et tels que :



$\overrightarrow{AM} = \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{u} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{u} + \vec{v}$

puis les points E, F et G tels que :

$\overrightarrow{BE} = \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\overrightarrow{FG} = \vec{u} + \vec{v}$

2 Soit ABC un triangle tel que :

BC = 8a, CA = 9a et AB = 6a (où $a > 0$)

1) Construire la figure dans le cas où a = 0,5.

2) Construire les points E, F et G tels que :

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$.

3) Citer tous les parallélogrammes dont les sommets figurent parmi les points A, B, C, E, F et G.

3 A, B, C, D sont quatre points.

Construire les points M, N, P définis par :

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$.

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

3) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

4 Soit ABCD un parallélogramme.

Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$

5 Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

$\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$; $\vec{v} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$

$\vec{w} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PP}$; $\vec{x} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP}$

$\vec{y} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$; $\vec{z} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$.

Exprimer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DO}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

7 En observant attentivement la figure où ABCD, BCEF et ADEF sont des parallélogrammes, déterminer le point X dans chaque égalité vectorielle :

1) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AX}$

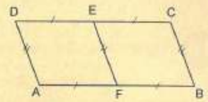
2) $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FX}$

3) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AX}$

4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BX}$

5) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BX}$

6) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CX}$



8 Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

9 ABCD est un parallélogramme.

Soit E un point donné du plan.

On considère le point F tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$.

En utilisant des égalités vectorielles pertinentes, montrer que [AF] et [DE] ont le même milieu.

10 Soit ABCD un quadrilatère quelconque.

1) Construire les deux points M et N tels que:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

2) Montrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

11 Soit ABC un triangle.

On considère le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Soit O un point quelconque du plan.

Montrer que : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$

12 Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

Montrer que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

13 Soient A et B deux points distincts.
On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
Construire les vecteurs $2\vec{u}$; $\frac{1}{8}\vec{u}$; $-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$.

14 A, B, C sont trois points non alignés, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.
Construire les points E, F, G tels que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}$; $\overrightarrow{BF}=\frac{7}{4}\vec{u}$; $\overrightarrow{CG}=\vec{u}-\frac{5}{3}\vec{v}$.

15 Construire trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que :
$$\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}=\vec{0}.$$

16 Simplifier les écritures :
$\frac{36}{25}\left(\vec{u}+\frac{5}{6}\vec{u}\right)$; $\frac{33}{22}\left(\vec{u}+\frac{4,5}{3,6}\vec{u}\right)$

$\frac{27}{4}\times\left(-\frac{2}{9}\right)\vec{u}+3,5\vec{v}$; $0,26\left(3\vec{u}-\frac{8}{13}\vec{v}\right)$.

17 Déterminer le vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :
1) $\vec{u}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}$.
2) $\vec{u}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.
3) $9\vec{u}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}=5\vec{u}+\frac{10}{9}\overrightarrow{BC}$.

18 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}=\frac{7}{5}\vec{v}$.
Déterminer les réels x, y, z tels que :
$$\vec{v}=x\vec{u} \qquad -\vec{v}=y\vec{u} \qquad \vec{v}=z(-\vec{u})$$

19 Soient A et B deux points distincts.
1) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=1,5\overrightarrow{AB}$.
2) Déterminer α et β tels que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{AB}$

Définition d'un point par une égalité vectorielle

20 Dans chacun des cas suivants, déterminer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; puis construire M.
1) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
2) $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$.
3) $4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$.
4) $5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

21 Soit ABC un triangle.
Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, dans chacun des cas suivantes, puis construire le point M.
1) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$
2) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
4) $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}$
6) $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}$

Milieu et centre de gravité

22 On considère un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soient B, C et D les points définis par :
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{u}-\vec{v}$.
Montrer que B est le milieu de [CD].

23 Soit MNPQ un parallélogramme.
1) Construire les points R et S tels que :
$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{QN}$ et $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MN}$.
2) Montrer que N est le milieu de [SQ].

24 Soit MNP un triangle.
1) Construire les points E et F tels que :
$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$.
2) Montrer que P est le milieu de [EF].

25 Soient A et B deux points distincts.
1) Construire les points R et S tels que :
$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
2) Montrer que les segments [AB] et [RS] ont le même milieu.

26 A, B, C, M sont des points du plan.
On pose : $\vec{v}=\overrightarrow{MA}$; $\vec{w}=\overrightarrow{MB}$; $\vec{t}=\overrightarrow{MC}$.
1) Construire les points E, F, H définis par :
$$\overrightarrow{ME}=\vec{v}+\vec{w}-\vec{t}$$
$$\overrightarrow{MF}=\vec{v}-\vec{w}+\vec{t}$$
$$\overrightarrow{MH}=-\vec{v}+\vec{w}+\vec{t}$$
2) Montrer que A, B et C sont les milieux respectifs des segments [EF], [FH] et [HE].
3) Montrer que : $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

27 Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectif de [BC], [CA] et [AB].
On considère les points M, N, P tels que :
$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'M}$; $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{B'N}$; $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{C'P}$.
Calculer $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$.

28 Soient ABC un triangle, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [CA], C' le milieu de [AB] et G le point d'intersection de (BB') et (CC').
(G est le centre de gravité du triangle ABC).
E est le symétrique de G par rapport à B'.
F est le symétrique de G par rapport à C'.
1) Montrer que AGBF, AGCE et AFGE sont des parallélogrammes.
2) En déduire que : $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}\\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GE}\\ \overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GA}\end{cases}$
puis que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
3) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :
$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$
4) En déduire que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

29 ABC un triangle et H son centre de gravité.
A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [CA].
M et N sont les milieux respectifs de [BH] et [AH].
Montrer que A'B'NM est un parallélogramme.

30 ABC est un triangle ; x est un nombre réel.
Soient H le centre de gravité du triangle ABC,
I le milieu de [BC] et M le point tel que :
$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$$
Montrer que les points A, M, I et H sont alignés.

Colinéarité, alignement et parallélisme

31 Soit OABC un quadrilatère.
On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
1) Montrer que : $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$
2) Soit P le point tel que : $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}$
Montrer que (OP) est parallèle à (CM).

32 Soit ABCD un quadrilatère.
On considère le vecteur $\vec{v}=3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-4\overrightarrow{DC}$.
1) Montrer que : $\vec{v}=3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.
2) Soit E le point tel que : $\vec{v}=\overrightarrow{CE}$.
Montrer que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.

33 A, B, C, M sont quatre points du plan ; x est un nombre réel.
On considère le vecteur $\vec{v}=x\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}$.
1) Ecrire $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et x.
2) Déterminer x pour que le vecteur $\vec{v}$ soit indépendant de x.

34 On considère deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
1) Simplifier l'écriture vectorielle du vecteur $\vec{u}$ défini par :
$$\vec{u}=2\vec{i}+3\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$$
2) On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$
a) Calculer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b) Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires.

35 Soit ABC un triangle.
1) Construire les points E et F définis par :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

36 Soit ABC un triangle.
On considère le point M tel que :
$\begin{cases}\cdot\overrightarrow{MA} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BC}\\ \cdot\overrightarrow{MB} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AC}\end{cases}$
Montrer que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$.

37 Soit ABC un triangle.
1) Construire les points E et F tels que :
$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $5\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que les point A, E et F sont alignés.

38 Soit ABCD un parallélogramme.
1) Construire les points J, K, L et M tels que :
• J est le milieu de [BC]
• K est le milieu de [AD]
•$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CK}$
2) Montrer que les droites (BM) et (DL) sont parallèles.

39 ABC est un triangle. On considère le point X déterminé par :

$$\begin{cases} \bullet\ \overrightarrow{AX} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires.} \\ \bullet\ \overrightarrow{CX} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$$

Calculer $\overrightarrow{BX}$.

40 ABCD est un parallélogramme.

1) Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AB}$$

2) Construire le point C′ tel que AMC′N soit un parallélogramme.
3) Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.

41 Soit ABC un triangle.

On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$$

1) Construire E et F.
2) Montrer que les points B, E et F son alignés.

42 Soient ABCD un parallélogramme, M et N les points définis par :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$$

1) Calculer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que A, M et N sont alignés.

43 Soient ABCD un parallélogramme, M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

1) Montrer que (MN) et (AC) sont parallèles.
2) La droite passant par M et parallèle à la droit (BC), coupe (BD) en P.
   Montrer que (PN) est parallèle à (AB).

44 Soit ABC un triangle.

1) Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$.
2) Montrer que E appartient à la droite (AC).
3) Soit M un point tel que :

$$\overrightarrow{BM}=(x+1)\overrightarrow{BA}-x\overrightarrow{BC}$$

   où x est un nombre réel.
   Montrer que : $M \in (AC)$

45 ABC est un triangle.

Soient a un nombre réel,, E, F et H les points tels que :

$\overrightarrow{BE}=-a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}$

Montrer que le point H appartient à la droite (BC).

Exercices de renforcement des apprentissages

46 ABMN et MNEF sont deux parallélogrammes de côté commun [MN].

Montrer que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$

47 ABMN et ABEF sont deux parallélogrammes ayant [AB] comme côté commun.

Monter que : $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{NF}$

48 Soient ABC un triangle, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

Montrer que : $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\vec{O}$

49 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère le point K tel que : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

La droite (DK) coupe (BC) en L.

1) Montrer que : $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DL}$.
2) Calculer $\overrightarrow{CL}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

50 Soit ABM un triangle.

On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}=\vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$$

1) Montrer que M est le milieu de [EF].
2) On considère les points G et H tels que :

$$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ME} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}$$

Montrer que ABHG est un parallélogramme.

51 Soit ABCD un parallélogramme.

Soient E le milieu de [AB], K le symétrique de D par rapport à C et L le symétrique de D par rapport à E.

1) Monter que B est le milieu de [CL].
2) La droite (KE) coupe (BC) en T.
   Calculer $\overrightarrow{LT}$ en fonction de $\overrightarrow{LC}$.

52 Soient ABC un triangle, E, F et G les points tels que :

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CF}$; $2\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

1) Construire E, F et G;
2) Montrer que $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{EC}$.
3) La droite (AG) coupe (BC) en K.
   Montrer que K est le milieu de [BC].

53 Soient ABC un triangle, x un réel strictement supérieur à 1, M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}$$

Montrer que les points A, C et N sont alignés.

54 Soient ABC un triangle, x un nombre réel tels que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

On considère les points E, F, M et N tels que :

$\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{FN}=4\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE}=2x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{AB}$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle les points A, M et N sont alignés.

55 Soient ABCD un parallélogramme, E le milieu du segment [AB] et N le point du segment [DE] tel que : $\overrightarrow{EM}=x\overrightarrow{ED}$

Déterminer x pour que A, C et M soient alignés.

56 Soient ABCD un quadrilatère et x un nombre réel.

On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN}=x\overrightarrow{DC}$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{AD}$
2) On suppose, dans cette question, que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$.
   a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Calculer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et x.
   c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles M et N sont confondus ?

57 Soient ABC un triangle, E, F et G les points tels que :

$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EA}$; $4\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{FB}=\vec{0}$.

1) Construire la figure.
2) Montrer que :

$$\overrightarrow{FB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

3) Montrer que les points B, F et G sont alignés et déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{FB}$.
4) Montrer que les points A, C et G sont alignés et déterminer le réel β tel que $\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AC}$.

58 ABCD est un parallélogramme ; I et J sont les points définis par : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AD}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$
2) En déduire que les points C, I et J sont alignés.

59 Soit ABC un triangle.

On considère les points I, J; K tels que

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$.
2) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

60 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}.$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
2) En déduire que les points C, E et F sont alignés.

61 ABC est un triangle. On considère les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$.

1) Construire la figure.
2) Montrer que : $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PB}=\frac{9}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
3) Montrer que A, C et P sont alignés.
4) En déduire que P est le point d'intersection de (AC) et (BN).

62 Soient ABCD un parallélogramme,

M le symétrique de B par rapport à C

et N le point tel que : $3\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}$

1) Montrer que les points A, M, et N sont alignés.
2) La droite (AN) coupe (CD) en E.
   Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{DC}$

63 ABC est un triangle.

Les points E, F et G sont définis par :

$$4\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0} \quad ; \quad 2\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BC}.$$

1) Montrer que : $2\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
2) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

64 Soit ABC un triangle et soit x un nombre réel.
On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

1) Construire la figure pour $x=\frac{1}{2}$.
2) Dans le cas général, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3) Déterminer x dans chacun des cas suivants :
   a) M = N (M et N confondus) ;
   b) BCNM est un parallélogramme.

65 Soient ABCD un parallélogramme et x un nombre réel.
On considère les points R, S, T, V définis par :

$$\overrightarrow{AR}=x\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BS}=x\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CT}=x\overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DU}=x\overrightarrow{DA}$$

1) Construire la figure dans le cas où $x=3$.
2) Dans le cas général, montrer que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

66 Soient ABC un triangle, x un nombre réel non nul, M et N les points tels que : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}=(x+1)\overrightarrow{BC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et x.
2) Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles A, C et N sont alignés ?

67 Soit ABCD un parallélogramme:
On considère les points F et J tels que : $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
Les droites (DJ) et (AC) se coupent en L.
Les droites (DF) et (AB) se coupent en M.

1) Montrer que $\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$
2) Montrer que DAFJ est un parallélogramme.
3) a) Calculer $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{CF}$.
   b) Calculer $\overrightarrow{CA}$ en fonction de $\overrightarrow{CL}$.
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

68 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que (EF) est parallèle à (BC).
2) Calculer $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) C appartient-il à (EF) ?
4) Quel est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EF}$.

69 Soit ABCD un triangle.

On considère les points E, F, H, M tels que :

$$2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC} \quad ; \quad 3\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CA}$$
$$3\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB} \quad ; \quad 2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AE}$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{MC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$
2) Soit K le point d'intersection de (CH) et (BF).
   Montrer que A, K et E sont alignés.

Exercices de synthèse

70 Soit ABC un triangle.

1) Construire les points E et F tels que :
$$3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{CE}=\vec{0} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CF}=\vec{0}.$$
2) Montrer que les points B, E et F sont alignés.

71 Soit ABC un triangle.
On considère le point E tel que : $\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EC}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
2) Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   Montrer que $2\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{KC}$.
3) Soit I le point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
   Montrer que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
4) Montrer que les points A, I et K sont alignés.
5) Montrer que (AI) et (CE) se coupent en K.

72 ABCD est un parallélogramme de centre G.

1) Soient E le milieu de [AB] et F le milieu de [BC].
   Montrer que : $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$
2) On considère les points H, K et I définis par :
   - $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{CE}$.
   - K est le milieu de [GH].
   - I est le milieu de [AD].

   a) Montrer que A est le milieu de [HE].
   b) Quelle est la nature du quadrilatère AGIH ?
   c) Montrer que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
3) a) Montrer que $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.
   b) Déterminer l'ensemble des points M tels que: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CE}$.
4) Soit L le point tel que : $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
   Soit N le point d'intersection de (DL) et (AC).
   Montrer que : $3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

73 Soit ABC un triangle. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Les points M, N, P sont définis par :

$$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}.$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{4}\vec{v}$
2) a) Déterminer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b) Montrer que : (BN) // (CP).
3) Soient I le milieu de [BN] et K le milieu de [CP].
   a) Déterminer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b) Montrer que A, I et K sont alignés.
4) Soit E le point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$.
   Montrer que E appartient à la droite (IK).

74 ABCD est un trapèze tel que $7\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{DC}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) On considère le point E défini par : $5\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{DE}$
   a) Calculer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   En déduire que les segments [AE] et [BD] ont le même milieu.
3) Soit x un nombre réel.
   On considère le point M défini par : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
   a) Déterminer x pour que M soit le symétrique de C par rapport à D.
   b) Dans le cas général, déterminer $\overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et x.
   Quel est l'ensemble des points M lorsque x décrit IR ?

75 Soit ABC un triangle.
On considère le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.
Soit M le point d'intersection de (AE) et (BC).
On pose : $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=\beta\overrightarrow{MB}$.

1) Montrer que $(\alpha-7)\overrightarrow{AM}=(3-4\beta)\overrightarrow{MB}$.
2) Déterminer la position du point M sur le segment [AE].

76 Soient ABC un triangle, I, J et K les points définis par :

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0} \quad ; \quad 3\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JA} \quad ; \quad \overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC}$$

1) Construire les points I, J et K.
2) Soit G le point tel que : $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GC}$.
   a) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :
   $$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$$
   b) Montrer que les droits (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en G.

77 Soient ABC un triangle, I, J et K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB} \quad ; \quad 4\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{CK}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

En suivant les mêmes étapes de l'exercice (76), montrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

78 Soit ABC un triangle.
On considère les points I, J et K définis par :

$$4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} \quad ; \quad 2\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC} .$$

1) Montrer que : $2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
2) Montrer que : $2\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JK}=\vec{0}$.
   Que peut-on en déduire ?

79 ABC est un triangle. On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{EA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

K est le point d'intersection de (AF) et (CE).
L est le point d'intersection de (BK) et (AC).
Déterminer la position de L sur la droite (AC).

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

Problèmes

80 **Droite d'Euler**

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

1) On considère le point P tel que : $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

a) Quelle est la nature du quadrilatère OAPB ?

b) Quelles est la nature du quadrilatère OPHC ?

c) En déduire que (CH) est une hauteur du triangle ABC.

2) Montrer, de la même façon, que (BH) est une hauteur du triangle ABC.

Que représente le point H ?

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que les points O, H et G sont alignés et déterminer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$.

> Si ABC n'est pas équilatéral, alors la droite (OG) est la droite d'Euler du triangle ABC

81 Soit ABC un triangle.

M est un point de (AB).

N est un point de (AC).

1) On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre réel non nul k tel que :

$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$.

Montrer que : (MN) // (BC).

2) On suppose, dans cette question que :

(MN) est parallèle à (BC)

On pose : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BC}$

Montrer que : $x = y = z$

> Il s'agit, dans cet exercice, de la formulation vectorielle du théorème de Thalès

82 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

- La droite passant par M et parallèle à (AB), coupe (AD) en I et coupe (BC) en J.
- La droite passant par M et parallèle à (BC), coupe (AB) en K et coupe (CD) en L.

1) Exprimer $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{MC}$.

2) Déterminer le nombre réel k tel que :

$$\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MJ}$$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MK}=k\overrightarrow{ML}$

(où k est le nombre trouvé en 2))

4) Montrer que : (LJ) // (IK)

83 Soit ABC un triangle.

On considère un point M de (BC), un point N de (CA) et un point P de (AB) tels que les droites (AM), (BN) et (CP) soient parallèles.

On pose $\begin{cases}\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{MC}\\ \overrightarrow{NC}=y\overrightarrow{NA}\\ \overrightarrow{PA}=z\overrightarrow{PB}\end{cases}$

1) Exprimer y et z en fonction de x.

2) En déduire que $xyz = -1$

> Ce résultat porte le nom de théorème de Ménélaüs

Projection

8

Capacités attendues

- Traduction vectorielle du théorème de Thalès.

Contenu

● Activités préparatoires

- Projeté d'un point sur une droite
- Théorème de Thalès et réciproque
- Coefficient de colinéarité
- Conservation du coefficient de colinéarité
- Projection de la somme de deux vecteurs
- Théorème de Ménélaüs

● Définitions et règles

- Projection sur une droite
- Projection orthogonale
- Théorème de Thalès
- Réciproque du théorème de Thalès
- Théorème de Thalès par la projection
- Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

● Points essentiels

● Exercices résolus

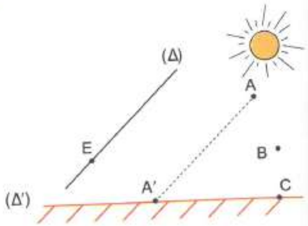
● Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 — Projeté d'un point sur une droite

On suppose que les rayons de lumière du soleil prennent la direction de la droite (Δ), comme le montre le dessin ci-contre, et que la droite (Δ') représente le sol.

L'ombre du point A sur le sol est le point A' intersection de la droite (Δ') et de la parallèle à (Δ) issue de A.

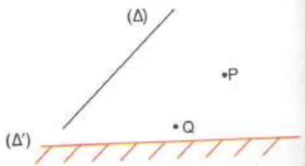
A' est appelé projeté du point A sur (Δ') parallèlement à (Δ).



1) a) Représenter l'ombre de chacun des points B, C et E sur le sol.

b) Quelle l'ombre du segment [AB] ?

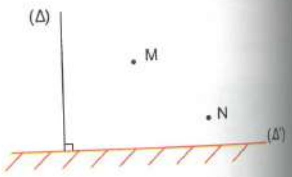
2) Soient P et Q deux points tels que (PQ) // (Δ)



a) Quelles sont les ombres des deux points P et Q sur le sol ?

b) Quelle est l'ombre du segment [PQ] ?

3) On suppose que : (Δ) ⊥ (Δ')



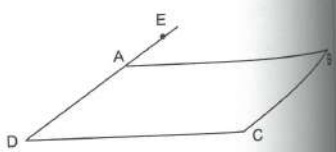
Construire M' et N' ombres respectives des points M et N sur le sol.

M' et N' sont **les projetés orthogonaux** respectifs des points M et N sur (Δ').

ACTIVITE 2 — Théorème de Thalès et réciproque

A Soient ABCD un parallélogramme tel que AB = 8cm et AD : 4,5cm, E le point tel que : AE = 1,5cm et E ∉ [AD] (voir figure).

La droite (EC) coupe le segment [AB] en M.



1) Calculer la distance AM.

2) Déterminer le point N du segment [CD] sachant que $DN = \frac{3}{4}DC$.

3) Montrer que (AN) // (EC).

B Soit ABCD un parallélogramme et soit O un point, distinct de A et C, de la droite (AC).

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O telles que :

$\begin{cases} (\Delta) \text{ coupe (AB) en I et coupe (DC) en J.} \\ (\Delta') \text{ coupe (BC) en L et coupe (AD) en M.} \end{cases}$

On a : O ∈ (AC) ; il existe donc un réel k tel que : $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.

1) En utilisant la projection sur (Δ) parallèlement à (AB), montrer que : $\overrightarrow{OJ} = k\overrightarrow{OI}$

2) En utilisant la projection sur (Δ') parallèlement à (AD), montrer que : $\overrightarrow{OL} = k\overrightarrow{OM}$

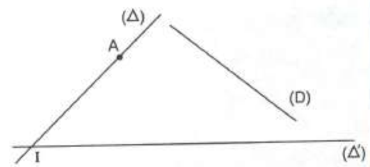
3) En déduire que (MI) est parallèle à (LJ).

ACTIVITE 3 — Coefficient de colinéarité

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point I.

Soit (D) une droite non parallèle à (Δ) et non parallèle à (Δ').

Soit A un point de la droite (Δ).



1) Construire le point B tel que : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$

2) Soit (Δ_1) la droite passant par A et parallèle à la droite (D) ;

(Δ_1) coupe la droite (Δ') en un point A'.

Soit (Δ_2) la droite passant par B et parallèle à la droite (D) ;

(Δ_2) coupe la droite (Δ') en un point B'.

Montrer que : $\overrightarrow{IB'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA'}$

3) Quelle est la valeur du réel α qui vérifie $\overrightarrow{AA'} = \alpha\overrightarrow{BB'}$?

4) Soit M le milieu du segment [AB].

La parallèle à la droite (D) et passant par M coupe la droite (Δ') en un point M'.

Déterminer la position du point M' sur le segment [A'B'].

8 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 4 Conservation du coefficient de colinéarité

A Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires tels que : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ et $k \in IR^*$

Soit (Δ) une droite non parallèle à (Δ′) (voir figure).

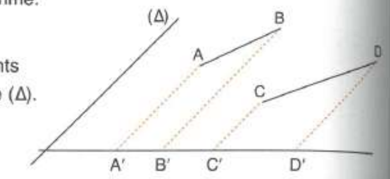
1) Construire le point M tel que ABMC soit un parallélogramme.

2) Montrer que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CM}$.

3) Soient A′, B′, C′, D′ et M′ les projetés respectifs des points A, B, C, D et M sur la droite (Δ′) parallèlement à la droite (Δ).

a) Montrer que : $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{C'M'}$ et $\overrightarrow{C'M'} = \overrightarrow{A'B'}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$



4) Montrer que la relation $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$ reste valable si (Δ) // (AB)

B Soit ABC un triangle. On considère les points D, E et F tels que :

$$3\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{FA} - 3\overrightarrow{FB} = \vec{0}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{DB}$.

2) Montrer que F est le projeté des points D et E par la projection sur (AB) parallèlement à (DE).

ACTIVITE 5 Projection de la somme de deux vecteurs

Soient (D) une droite, O un point de (D) et (Δ) une droite non parallèle à (D).

A, B et S sont des points tels que : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Soient A′, B′ et S′ les projetés respectifs de A, B et S sur (D) parallèlement à (Δ).

Montrer que : $\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$

ACTIVITE 6 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle.

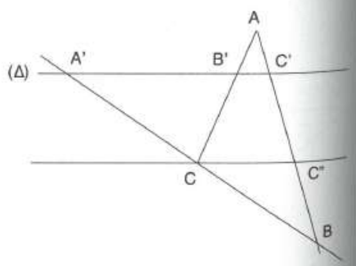
Soit (Δ) une droite qui coupe (BC), (CA) et (AB) respectivement en A′, B′ et C′.

Soit C″ le point de (AB) tel que (CC″) // (Δ) (voir figure).

1) En utilisant la projection sur (AB) parallèlement à (Δ), montrer que : $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{C'B}{C'C''}$ et $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{C'C''}{C'A}$

2) En déduire que : $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$

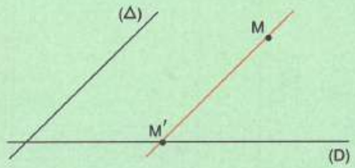
(Cette relation est appelée relation de Ménélaüs).



8 DEFINITIONS ET REGLES

1 Projection sur une droite

Définition Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$.
Soit M un point de $\mathcal{P}$.



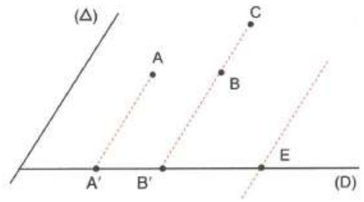
La droite parallèle à (Δ) et issue de M coupe la droite (D) en un point M′.
Le point M′ est appelé **projeté** du point M sur la droite (D) **parallèlement** à la droite (Δ) ; on écrit : p(M) = M′.
p est appelée **projection** sur (D) parallèlement à (Δ).

Remarque
Le projeté du point M sur (D) parallèlement à (Δ), est inchangé si on remplace (Δ) par toute autre droite qui lui est parallèle.

Exemples et applications

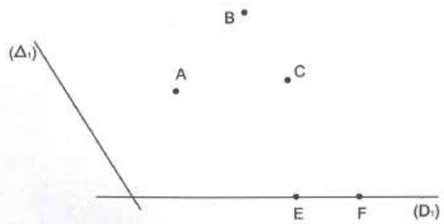
On considère la figure suivante :

- A′ est le projeté du point A sur (D) parallèlement à (Δ).
- B′ est le projeté des deux points B et C sur (D) parallèlement à (Δ).
- E est le projeté de E sur (D) parallèlement à (Δ).



Remarques
- **B et C ont le même projeté B′ sur (Δ) parallèlement à (Δ) car (BC) // (Δ).**
- **E est son propre projeté sur (D) parallèlement à (Δ) car E ∈ (D).**

On considère la figure suivante où les points B, C, F sont alignés et (BC) // (Δ_1).

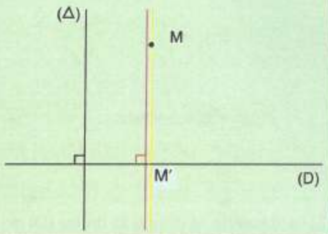


1) Déterminer les projetés des points A, B, C, E et F sur (D_1) parallèlement à (Δ_1).

2) Construire le point M tel que E soit le projeté du point M sur (D_1) parallèlement à (Δ_1) et que le quadrilatère ECMF soit un parallélogramme.

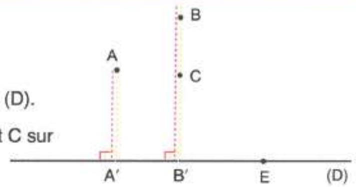
2 Projection orthogonale

Définition Soient (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires du plan $\mathcal{P}$.
Le point M′, projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ), est appelé **projeté orthogonal** du point M sur la droite (D).

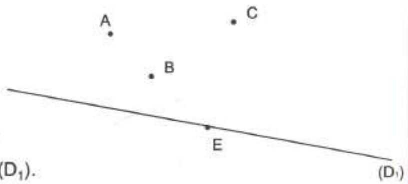


Exemples et applications

- On considère la figure suivante :
  A′ est le projeté orthogonal du point A sur (D).
  B′ est le projeté orthogonal des points B et C sur la droite (D).
  E est le projeté orthogonal du point E sur la droite (D).



- On considère la figure suivante où les points A, B, E sont alignés et (EC) ⊥ (D_1).
  Déterminer les projetés orthogonaux des points A, B, C et E sur la droite (D_1).



Propriété 1 Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan.
Le projeté de tout point M de la droite (D) est lui-même, par la projection sur (D) parallèlement à (Δ).

3 Théorème de Thalès

Propriété 2 Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.
Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A.
Soient C et N deux points de la droite (D_2), distincts de A.
Si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Remarques

- B et C ont le même projeté orthogonal sur (D) car (BC) ⊥ (D).
- E est son propre projeté orthogonal sur (D) car E ∈ (D).

Dénomination

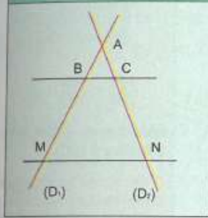
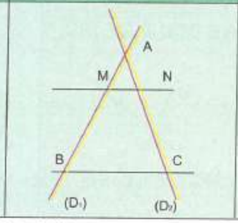
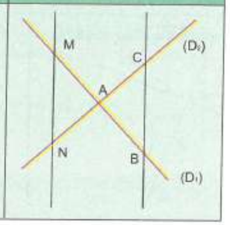
On dit que tout point de (D) est **invariant** (ou **fixe**) par la projection sur (D) parallèlement à (Δ).

Remarque

Le théorème de Thalès est utilisé pour calculer des longueurs.

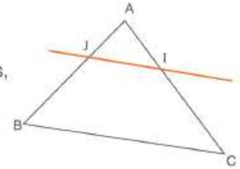
Exemples et applications

- Dans les trois cas suivants, on a :
  - A, M, B sont alignés
  - A, N, C sont alignés
  - (MN) // (BC)

1^{er} cas	$2^{ème}$ cas	$3^{ème}$ cas
		

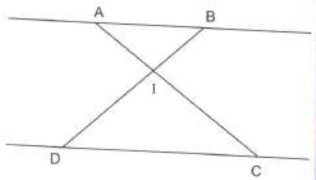
On en déduit : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

- Soit ABC un triangle. Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (voir figure) telles que : AI = 13, AJ : 5, AC = 39 et AB = x.
  Déterminons la valeur du réel x.
  On a : (IJ) // (BC). Donc, d'après le théorème de Thalès,
  on a : $\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC}$ c'est-à-dire : $\frac{5}{x} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$.
  D'où : $x = 15$



- Dans la figure suivante, on a :
  - (AB) et (CD) sont parallèles
  - DI = 54, IA = 9, IB = x et IC = 45

  Déterminer la valeur de x.



4 Réciproque du Théorème de Thalès

Propriété 3 Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.
Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A.
Soient C et N deux points de la droite (D_2), distincts de A.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre,
alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Traduction vectorielle du théorème de Thalès

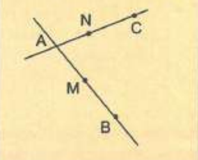
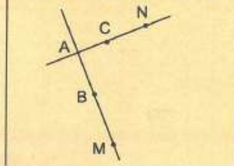
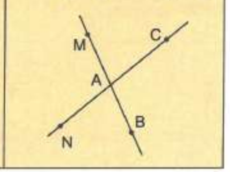
Si A, M et B sont alignés,
Si A, N et C sont alignés
et (MN) // (BC), alors :
$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC} \end{cases}$
où k est le même nombre réel (pour les trois égalités vectorielles).

Remarque

- On utilise la réciproque du théorème de Thalès pour prouver le parallélisme de deux droites.
- Si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \end{cases}$, alors (MN) // (BC)

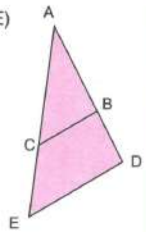
Exemples et applications

- Dans les trois cas suivants, on a :
  - A, M, B sont alignés
  - A, N, C sont alignés et dans le même ordre que A, M, B
  - $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

1^er^ cas	2^ème^ cas	3^ème^ cas
$M \in [AB]$ et $N \in [AC]$	$B \in [AM]$ et $C \in [AN]$	$A \in [MB]$ et $A \in [NC]$
		

On en déduit : (MN) // (BC).

- Sur la figure suivante, ABC est un triangle, les droites (BD) et (CE) se coupent en A, AB = 14, AD = 21, AC = 22, AE = 33.



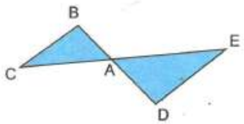
Montrons que : (DE) // (BC).

- Les droites A, B, D sont alignés
- Les points A, C, E sont alignés et dans le même ordre que A, B, D.
- $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{2}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on a : (DE) // (BC)

On considère la figure ci-contre, on a :

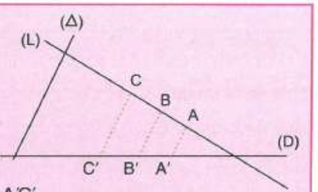
$$\begin{cases} AB = 45 \\ AC = 30 \\ AD = 33 \\ AE = 22 \end{cases}$$



Montrer que : (BC) // (DE)

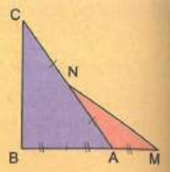
5 Théorème de Thalès par la projection

Propriété 4 Soient (D) et (L) deux droites.
Soit (Δ) une droite non parallèle à (D) et non parallèle à (L).
Soient A, B, C des points de (L) tels que A et B soient distincts.
Si A′, B′, C′ sont les projetés respectifs de A, B, C sur (D) parallèlement à (Δ) alors : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$



Remarque importante

Dans la figure suivante :



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

néanmoins (MN) n'est pas parallèle à (BC).

Il est donc indispensable de tenir compte de l'ordre des points sur chaque droite.

Remarque

On peut exprimer cette propriété comme suit :

Si A′, B′, C′ sont les projetés respectifs de trois point A, B, C de (L) sur (D) parallèlement à (Δ)

et si $\overrightarrow{AC} = k_1 \overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{A'C'} = k_2 \overrightarrow{A'B'}$,

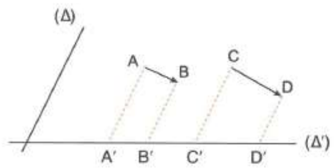
alors $k_1 = k_2$.

6 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Propriété 5 Soient (Δ) et (Δ′) deux droites sécantes.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires tels que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Si A′, B′, C′, D′ sont les projetés respectifs des points A, B, C, D sur (Δ′) parallèlement à la droite (Δ), alors $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$.



Si $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

Convention

On exprime cette propriété en disant que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Exemple et application

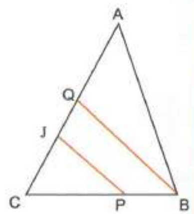
- Soit ABC un triangle du plan.

Q est le milieu du segment [AC].

P est le point de la droite (BC) tel que : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Soit J le point d'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (BQ) issue de P.

Montrons que : $\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QJ}$



On a : (JP) // (QB).

Donc Q, J, C sont le projetés respectifs de B, P, C sur (AC) parallèlement à la droite (QB).

Comme la projection conserve le coefficient de colinéarité et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$. D'où $\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QJ}$.

- Soient ABC un triangle, I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et E le symétrique du point A par rapport à B.

Les droites (EI) et (BC) se coupent en O.

Montrer que O est le milieu du segment [BC].

Projection

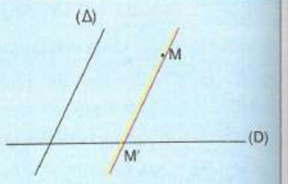
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan.

Soit M un point de $\mathcal{P}$.

La droite parallèle à (Δ) issue de M coupe la droite (D) en un point M′.

Le point M′ est appelé <u>projeté</u> du point M sur (D) <u>parallèlement à la droite</u> (Δ) ; on écrit p(M) = M′

p est appelée <u>projection</u> sur (D) parallèlement à (Δ).

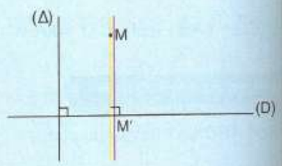


Projection orthogonale

Soient (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires du plan $\mathcal{P}$.

Le point M′, projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ),

est appelé <u>projeté orthogonal</u> du point M sur la droite (D).



Théorème de Thalès

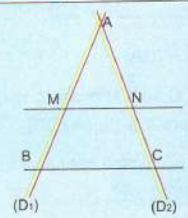
Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A.

Soient C et N deux points de la droite (D_2), distincts de A.

Si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



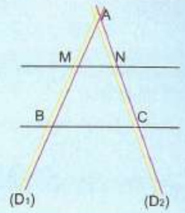
Réciproque du Théorème de Thalès

Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A.

Soient C et N deux points de la droite (D_2), distinct de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Théorème de Thalès par la projection

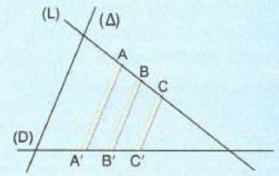
Soient (D) et (L) deux droites.

Soit (Δ) une droite non parallèle à (D) et non parallèle à (L).

Soient A, B, C des points de (L) tels que A et B soient distincts.

Si A′, B′, C′ sont les projetés respectifs de A, B, C sur (D) parallèlement à (Δ), alors :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$



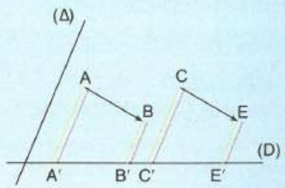
Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ deux vecteurs colinéaires tels que :

$$\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{AB}$$

Si A′, B′, C′,E′ sont les projetés respectifs des points A, B, C, E sur (D) parallèlement à la droite (Δ), alors : $\overrightarrow{C'E'} = k\overrightarrow{A'B'}$



8 EXERCICES RESOLUS

1 Conservation du coefficient de colinéarité

Soit ABC un triangle dans le plan $\mathcal{P}$.

Q est le milieu de [AC], P est le point de la droite (BC) tel que : $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

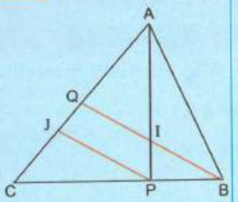
Soit J le point d'intersection de la droite (AC) et de la droite parallèle à (BQ) issue de P.

Soit I le point d'intersection des droites (AP) et (BQ).

1) Montrer que : $\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QJ}$.

2) Montrer que : $\overrightarrow{JA}=4\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{PA}=4\overrightarrow{PI}$.

Solution



1) Montrons que : $\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QJ}$.

On a : (JP) // (QB)

Donc : Q, J, C sont les projetés respectifs de B, P, C sur (AC) parallèlement à (BQ).

Comme la projection conserve le coefficient de colinéarité et $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{QJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$.

D'où : $\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QJ}$

2) Montrons que $\overrightarrow{JA}=4\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{PA}=4\overrightarrow{PI}$

* On a : $\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{JQ}+\overrightarrow{QA}$

Or Q est le milieu de [AC], donc $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{CQ}$.

Il s'ensuit : $\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{JQ}+\overrightarrow{CQ}$

Par ailleurs : $\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QJ}$; donc : $\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{JQ}+3\overrightarrow{JQ}$

D'où : $\overrightarrow{JA}=4\overrightarrow{JQ}$

* On a : (JP) // (QI)

Donc I, P, A sont les projetés respectifs de Q, J, A sur la droite (AP) parallèlement à la droite (QI)

Comme la projection conserve le coefficient de colinéarité et $\overrightarrow{JA}=4\overrightarrow{JQ}$, alors : $\overrightarrow{PA}=4\overrightarrow{PI}$.

2 Projection orthogonal – Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle du plan.

Le point D est le projeté orthogonal de B sur (AC).

Le point E est le projeté orthogonal de C su (AB).

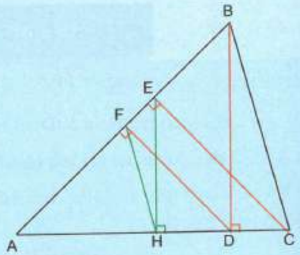
Le point F est le projeté orthogonal de D sur (AB).

Le point H est le projeté orthogonal de E sur (AC).

Montrer que les droites (FH) et (BC) sont parallèles.

Solution

Montrons que (FH) // (BC).



• On a : (CE) ⊥ (AB) et (DF) ⊥ (AB).

Donc : (DF) // (CE).

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AD}$

ce qui signifie aussi que : AE × AD = AC × AF (1)

• On a : (BD) ⊥ (AC) et (EH) ⊥ (AC).

Donc : (EH) // (BD).

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}$

Donc : AE × AD = AH × AB (2)

• Des relations (1) et (2), on tire : AC × AF = AH × AB.

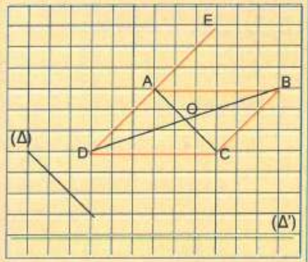
Donc : $\frac{AH}{AC}=\frac{AF}{AB}$

Comme les points A, H, C et les points A, F, B sont dans le même ordre, et d'après la réciproque du théorème de Thalès, on a alors : (FH) // (BC).

8 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

1 Soient ABCD un parallélogramme de centre O, et E le point défini par : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DA}$



1) Construire les points A', B', C', D', E' projetés respectifs des points A, B, C, D, E sur la droite (Δ') parallèlement à la droite (Δ).

2) Déterminer le projeté du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite (Δ') parallèlement à la droite (Δ).

3) Montrer que $\overrightarrow{D'E'}=2\overrightarrow{D'A'}$.

2 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points E et F tels que :

$3\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{DA}$

La droite (BD) coupe les droites (AE) et (CF) respectivement en M et N.

1) Déterminer les deux réels a et b tels que :

$\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}=b\overrightarrow{BD}$

2) Déterminer le réel k tel que : $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BD}$

3 Soient ABC un triangle, M et N les points définis par :

$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Soient M' et N' les projetés respectifs de M et N sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC).

Montrer que : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NN'}=-2\overrightarrow{BC}$.

4 Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le point de (AB) tel que : $3\overrightarrow{AJ}-2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

La droite parallèle à (AC) issue de J coupe (BC) en un point K.

1) a) Calculer : $\frac{KC}{KB}$

b) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Soit L le point défini par : $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les points I, K et L sont alignés.

Exercices de renforcement des apprentissages

5 Soient ABC un triangle, E, F et D les points définis par :

$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

La droite passant par E et parallèle à (BC), coupe (AB) en I.

La droite passant par F et parallèle à (BC), coupe (AD) en J.

1) Monter que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$.

2) Soit K le point d'intersection des droites (BC) et (AD).

Montrer que : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

5 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Soit (Δ) une droite passant par O et coupant les deux droites (AB) et (CD) respectivement en M et P.

Soit (Δ') une autre droite passant par O et coupant les deux droites (BC) et (AD) respectivement en N et Q.

Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

6 Soient ABC un triangle, P, Q et R les points définis par :

$\overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PC}$; $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{RB}=3\overrightarrow{RA}$

1) Construire les points P, Q et R.

2) En utilisant une projection convenable, montrer que P, Q et R sont alignés.

7 Soit ABCD un parallélogramme.

(Δ) est une droite variable passant par A, coupant (CD) en M et coupant (BC) en N.

On considère les nombres réels x et y tels que :

$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CB}=y\overrightarrow{CN}$.

Montrer que $x + y = 1$.

Exercices de synthèse

9 Soient ABC un triangle, M et N les deux points définis par :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}.$$

1) Construire les points M et N.

2) Soit L le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

En utilisant la notion de projection, montrer que :

$$2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

10 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Soit A' le projeté du point A sur la droite (CD) parallèlement à la droite (BD).

1) Montrer que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$.

2) Soit E le point de la droit (BC) tel que A' soit le projeté du point E sur (DC) parallèlement à la droite (BD).

a) Construire le point E.

b) Montrer que A est le milieu de [EA'].

3) La droite (EO) coupe (AB) en H et (CD) en R.

a) Montrer que H est le milieu de [ER] et que O est le milieu de [HR].

b) Calculer $\overrightarrow{EO}$ en fonction de $\overrightarrow{ER}$.

11 Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O.

Soit M un point de (D), distinct du point O.

Soit N un point de (D'), distinct du point O.

1) On considère un point E de la droite (MN).

Soit F le projeté de E sur (OM) parallèlement à (ON).

Soit G le projeté de E sur (ON) parallèlement à (D).

On pose : $\overrightarrow{OF} = a\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OG} = b\overrightarrow{ON}$.

Montrer que : a + b = 1.

2) Soient F_1 et G_1 deux points appartenant respectivement à (D) et (D') tels que :

$\overrightarrow{OF_1} = a_1\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OG_1} = b_1\overrightarrow{ON}$ et $a_1 + b_1 = 1$.

Soit M_1 le sommet du parallélogramme $F_1OG_1M_1$.

Montrer que M_1 appartient à (MN).

12 Soient ABC un triangle, D, M et N les points définis par :

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DA} \quad ; \quad 4\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1) Construire la figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3) Montrer que les points A, C et N sont alignés.

4) Soit E un point de [AB], distinct de A et B.

Le point I est le projeté du point E sur (BD) parallèlement à (AD).

Le point J est le projeté du point E sur (BN) parallèlement à (AN).

Montrer que les droites (IJ) et (DN) sont parallèles.

13 Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD].

Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point I.

La droite passant par I et parallèle à la droite (AC), coupe la droite (CD) en un point E.

La droite passant par I et parallèle à la droite (BD), coupe la droite (CD) en un point F.

1) Comparer $\frac{AI}{AD}$; $\frac{BI}{BC}$; $\frac{CE}{CD}$ et $\frac{DF}{DC}$.

2) En déduire que : EC = DF.

- Montrer que les segments [DC] et [EF] ont le même milieu.

Problèmes

14 Soient ABC un triangle et H son centre de gravité.

On considère une droite (Δ) ne passant pas par O, et coupant les droites (AH), (BH) et (CH) respectivement en M, N et P.

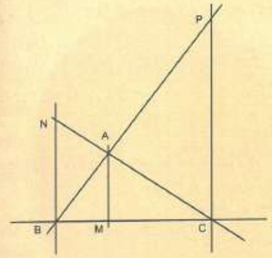
On pose : $\overrightarrow{HA} = x\overrightarrow{HM}$; $\overrightarrow{HB} = y\overrightarrow{HN}$; $\overrightarrow{HC} = z\overrightarrow{HP}$.

En utilisant la projection sur (AH) parallèlement à (Δ), montrer que : $x + y + z = 0$

15 Soient ABC un triangle et M un point du segment [BC].

Soit N le projeté de B sur la droite (AC) parallèlement à la droite (AM).

Soit P le projeté de C sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AM) (voir figure).



1) a) Montrer que : $\frac{MA}{BN} = \frac{CM}{CB}$ et $\frac{MA}{CP} = \frac{BM}{BC}$.

b) en déduire que : $\frac{1}{AM} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}$.

2) En utilisant le résultat précédent, expliquer comment construire un segment de longueur h telle que :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

où a et b sont deux longueurs données.

16 Soient ABC un triangle et M un point de [BC], distinct de B et C.

La droite parallèle à (AB) issue de M, coupe (AC) en N.

La droite parallèle à (AC) issue de M, coupe (AB) en P.

1) a) Comparer les rapports $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{CM}{CB}$.

b) Comparer les rapports $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{BM}{BC}$.

2) En déduire que : les droites (PN) et (BC) sont parallèles si et seulement si le point M est le milieu du segment [BC].

17 Soient ABC un triangle, M, N et P des points, distincts des sommets du triangle, appartenant respectivement à (BC), (CA) et (AB).

1) On suppose, dans cette question, que les droites (AM), (BN) et (CP) sont parallèles.

Montrer que : $\frac{MB}{MC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{PA}{PB} = 1$

2) On suppose, dans cette question, que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes en un point E.

Montrer que : $\frac{MB}{MC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{PA}{PB} = 1$

18 Soit ABCD un parallélogramme.

Soit (Δ_1) une droite passant par A.

(Δ_2) est une droite non parallèle à (Δ_1).

B', C', D' sont les projetés respectifs de B, C, D sur (Δ_1) parallèlement à (Δ_2).

1) En utilisant la projection sur (Δ_1) parallèlement à (Δ_2), écrire $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AD'}$.

2) En déduire que : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}$

19 Soient ABD un triangle et G son centre de gravité.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On pose : $\vec{S} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

On veut démontrer le résultat célèbre $\vec{S} = \vec{0}$.

1) En utilisant la projection sur (BC) parallèlement à (AJ), puis la projection sur (CA) parallèlement à (BJ), montrer que $\vec{S} = \vec{0}$.

2) Soit F le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$$

En utilisant la projection sur (BC) parallèlement à (AF), puis la projection sur (AC) parallèlement à (BF), montrer que F est le centre de gravité du triangle ABC (C'est-à-dire F est confondu avec G).

La droite dans le plan (Etude analytique)

9

Capacités attendues

* Traduction des notions et des propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle au moyen des coordonnées.
* Utilisation de l'outil analytique dans la résolution des problèmes géométriques.

Contenu

● Activités préparatoires

- Repère - Coordonnées d'un point et d'un vecteur
- Condition de colinéarité de deux vecteurs
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'une droite
- Alignement de points
- Coordonnées du centre de gravité d'un triangle
- Résolution des problèmes en utilisant l'outil analytique par le choix d'un repère convenable
- Intersection de deux droites et colinéarité de deux vecteurs

● Définitions et règles

- Repère : Coordonnées d'un point - coordonnées d'un vecteur
- Condition de colinéarité de deux vecteurs
- La droite dans le plan
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'une droite
- Droites particulières
- Equation d'une droite et son coefficient directeur
- Positions relatives de deux droites

● Points essentiels

● Exercices résolus

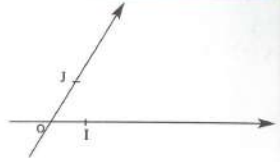
● Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 — Repère - coordonnées d'un point et d'un vecteur

Soit (O, I, J) un repère du plan $\mathcal{P}$.

On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

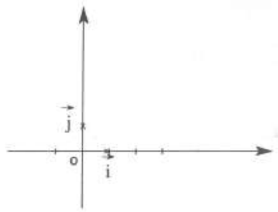
- Le triplet $(O;\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère du plan $\mathcal{P}$.
- Le couple $(\vec{i};\vec{j})$ est appelé base de l'ensemble des vecteurs du plan.
- Si (OI) ⊥ (OJ), on dit que $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal du plan.
- Si (OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ = 1, on dit que $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal (ou orthonormé) du plan.



1) Construire les points A, B, M, N, P tels que :

$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{MN}$.



2) Déterminer les nombres réels x et y tels que : $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple $(x\,;\,y)$ est appelé couple de coordonnées du point P dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le couple $(x\,;\,y)$ est aussi appelé couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

On écrit $P(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{OP}(x;y)$ $\left(\text{ou } \overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

3) Soit K le point tel que : $\overrightarrow{OK}=-\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OP}$.

a) Déterminer les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KN}$.

b) Déterminer la position des points K, M et N.

4) Déterminer les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{AE}=-5\vec{i}+2\vec{j}$.

ACTIVITE 2 — Condition de colinéarité de deux vecteurs

A Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

On considère deux vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul.

1) Montrer que : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $ab'-ba'=0$.

2) Montrer que : Si $ab'-ba'=0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le nombre $ab'-ba'$ est appelé déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) et on le note $\det(\vec{u};\vec{v})$; on écrit $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-ba'$.

3) On considère les vecteurs $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{w}=x\vec{i}+8\vec{j}$.

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

b) Déterminer la valeur du nombre réel x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit colinéaires.

4) On considère les points A(1; –2), B(5; –4), $C\left(2;-\frac{5}{2}\right)$ et D(–3; y)

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer la valeur du nombre réel y pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

(B) Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

On considère les points A(3 ; 4), B(x ; –4), C(9 ; 6) et D(1 ; –8)

1) Déterminer la valeur du nombre réel x pour que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

2) Déterminer les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}-\sqrt{2}\,\overrightarrow{AD}$.

3) Déterminer les coordonnées du point N tel que : $\overrightarrow{AN}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}$.

4) Déterminer les coordonnées du point H milieu du segment [MN].

ACTIVITE 3 Représentation paramétrique d'une droite

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

On considère les points A(–1 ; 2), B(2 ; –5) et $C\left(\frac{1}{2};-1\right)$

Soit (D) la droite passant par A et B.

1) Déterminer le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

2) Soit M(x, y) un point appartenant à la droite (D).

a) Montrer qu'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est appelé vecteur directeur de la droite (D) passant par A.

b) Montrer que : $\begin{cases} x=-1+3k \\ y=2-7k \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x=-1+3k \\ y=2-7k \end{cases}$ $(k\in IR)$ est appelé **représentation paramétrique** de la droite (D) passant par A(–1 ; 2) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;-7)$

c) Le point C appartient-il à la droite (D) ?

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par B et dirigée par le vecteur $\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}$.

ACTIVITE 4 Equation cartésienne d'une droite

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Soit (D) la droite passant par A(2 ; 1) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-2;3)$.

1) Soit M(x ; y) un point appartenant à la droite (D).

Montrer que : $\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix}=0$. En déduire que $3x+2y-8=0$.

L'équation $3x+2y-8=0$ est appelée **équation cartésienne** de la droite (D).

2) On considère les deux points B(–1 ; 3) et C(2 ; 5).

Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

3) Déterminer l'intersection des deux droites (D) et (BC).

ACTIVITE 5 Alignement de points

Soient ABCD un parallélogramme, P le milieu de [AB] et Q le milieu de [AD].

Les droites (AC) et (BQ) se coupent au point R.

En utilisant un repère convenable :

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, P, Q, R.

b) Montrer que : $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QB}$.

c) Montrer que les points D, R et P sont alignés.

ACTIVITE 6 Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient A, B, C les points tels que A(–2 ; –3), B(5 ; 0), C(0 ; 7).

Soit G le centre de gravité de triangle ABC.

1) Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [AB].

2) Déterminer le réel k tel que : $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AI}$.

3) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$, puis celles du point G.

4) Vérifier que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ACTIVITE 7 Résolution des problèmes en utilisant l'outil analytique par le choix d'un repère convenable

(A) Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construire les point M, N et P définis par : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

2) En considérant le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

a) Déterminer les coordonnées des point M, N et P.

b) En déduire que (BM) est parallèle à (PN).

(B) Soit ABC un triangle. P est un point de (AB), Q est un point de (BC) et R est un point de (CA) tels que :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CR}=\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}$$

Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

ACTIVITE 8 Intersection de deux droites et colinéarité de deux vecteurs

Soient ABCD un carré, E le point définie par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, F le point d'intersection des droites (AD) et (BE), et G le point d'intersection des droites (AD) et (BE), et G le point d'intersection des droites (AB) et (DE).

1) Dessiner la figure.

2) En considérant le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$:

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AD).

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BE), puis en déduire les coordonnées de F.

3) Montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et déterminer les coordonnées de G.

9 DEFINITIONS ET REGLES

1 Repère : Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

Repère

Définition Soit (O ; I, J) un repère du plan.

On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

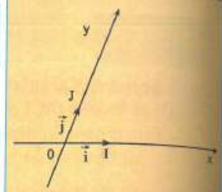
- Le triplet $(O;\vec{i},\vec{j})$ s'appelle repère du plan.
- $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal si $(OI)\perp(OJ)$.
- $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal (ou orthonormé) si $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\right) OI=OJ=1$
- La droite (OI) est appelée axe des abscisses.
La droite (OJ) est appelée axe des ordonnées.

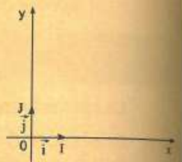
Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

Propriétés Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

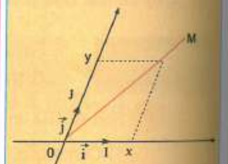
- Pour tout point M du plan, il existe un couple unique $(x\,;\,y)$ de nombres réels tel que :
$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$
Le couple $(x\,;\,y)$ est appelé couple de coordonnées du point M ;
on écrit : $M(x\,;\,y)$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un couple unique $(x\,;\,y)$ de nombres réels tel que :
$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$$
Le couple $(x\,;\,y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$;
on écrit : $\vec{u}\,(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

- **Egalité de deux vecteurs :**
Soient $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ deux vecteurs.
$\vec{u}=\vec{v}$ signifie que : ($x=x'$ et $y=y'$)
- **Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$** : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$
- **Coordonnées de la somme de deux vecteurs :** $\vec{u}+\vec{v}\,(x+x'\,;\,y+y')$
- **Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel :**
$k\vec{u}\,(kx\,;\,ky)$ où k est un nombre réel.
- **Colinéarité de deux vecteurs non nuls :**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $x'=kx$ et $y'=ky$.
- **Milieu d'un segment :**
Si I est le milieu du segment [AB], alors $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$
- **Distance de deux points**
Dans un repère orthonormal, $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$





$\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.



x s'appelle l'abscisse du point M.

y s'appelle l'ordonnée du point M.

9 DEFINITIONS ET REGLES

2 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Déterminant de deux vecteurs

Définition On considère deux vecteurs $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$

Le nombre $xy'-yx'$ s'appelle déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\det(\vec{u};\vec{v})$; on écrit $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$

Condition de colinéarité

Propriété
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v})=0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

Exemples et application

■ On considère les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=5\vec{i}+\vec{j}$

On a : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2+15=17$

Comme $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

■ On considère les points A(–1 ; 2), B(2 ; 3) et $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

On a : $\overrightarrow{AB}(3;1)$, $\overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}3 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$

comme $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

■ On considère les vecteurs :

$$\vec{u}_1=2\sqrt{3}\,\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_2=6\vec{i}-\vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_3=3\vec{i}-(2m+1)\vec{j}$$

1) Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

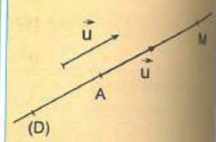
2) Déterminer la valeur de m pour laquelle $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires.

Remarques

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, alors
$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-6$
$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2$
- $\det(\vec{u},\vec{v})=-\det(\vec{v},\vec{u})$
- $\det(k\vec{u},\vec{v})=k\det(\vec{u},\vec{v})$
(pour tout réel k)

3 La droite dans le plan

Définition Soit A un point du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$, où k est un réel, est la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$; on la note $D(A;\vec{u})$.



$(D)=D(A,\vec{u})$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, alors :
$D(A;\vec{u})=D(A;\vec{v})$
- La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4 Représentation paramétrique d'une droite

Définition Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient $A(x_0\,;\,y_0)$ un point du plan et $\vec{u}\,(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x=x_0+k\alpha \\ y=y_0+k\beta \end{cases}$ $(k\in IR)$

s'appelle représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0\,;\,y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(\alpha;\beta)$.

Exemples et applications

- Soit (D) la droite passant par le point A(2 ; –3) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3;5)$
(D) est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$(D) : \begin{cases} x=2-3k \\ y=-3+5k \end{cases} \quad (k\in IR)$$

Le nombre k est le paramètre dépendant du point M.
  - Si on prend k = 0, on obtient le point A(2 ; –3) qui est évidemment un point de (D).
  - Si on prend k = –1, on obtient le point B(5 ; –8) ; donc le point B(5 ; –8) appartient à (D).
  - Si on prend $k=\frac{1}{2}$, on obtient le point $C\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ qui appartient donc à la droite (D).
- Le système $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \end{cases}$ $(t\in IR)$ détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A'(3 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{v}(1;\,2)$.
- On considère les points E(–1 ; 2), F(2 ; 3) et G(1 ; –1).
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
2) Le point G appartient-il à la droite (EF) ?
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (L) passant par le point F et dirigée par le vecteur $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}$.

Remarque

Toute droite admet une infinité de représentations paramétriques.

5 Equation cartésienne d'une droite

Définition Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Toute droite, dans le plan, admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+c=0 \qquad \text{où } (a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$$

Remarques

- Pour déterminer une équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$, on utilise la relation :
$M(x;y)\in D(A;\vec{u})$
qui équivaut à : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires c'est-à-dire à :
$\det(\overrightarrow{AM};\,\vec{u})=0$
- (a; b) ≠ (0; 0) signifie que :
→ l'un au moins des deux nombres est non nul.
→ ou les deux nombres a et b sont non nuls.

Exemple et application

- Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par A(–1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$.
Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
$M(x\,;\,y)\in(D)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$.
Or $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ et $\vec{u}(-3;4)$, par conséquent :

$$\det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 4(x+1)+3(y-2)=4x+3y-2$$

Ainsi $M(x\,;\,y)\in(D)$ si et seulement si $4x+3y-2=0$.
D'où : $4x+3y-2=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).
- On considère les deux points B(2 ; 3) et C(–1 ; 1).
Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

Propriété Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient a, b et c des nombres réels avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$.
L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b;a)$.

- Noter que :
pour tout nombre réel non nul k, les équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $kax+kby+kc=0$ sont celles d'une même droite.

Exemple et application

- Soit (Δ) la droite d'équation : $2x-y+3=0$.
Si on remplace x par –1 (c'est-à-dire si on pose $x=-1$), on obtient y = 1. Donc le point A(–1 ; 1) appartient à la droite (Δ).
La droite (Δ) est la droite passant par A(–1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2)$.
- Soit (L) la droite d'équation : $3x+4y-5=0$.
1) Déterminer un point appartenant à la droite (L).
2) Déterminer un vecteur directeur de la droite (L).
3) Le point $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ appartient-il à (L) ?

Remarques

Soient A et B deux points.
Si $x_B-x_A\neq0$ et $y_B-y_A\neq0$, alors une équation cartésienne de la droite (AB) s'écrit sous la forme :

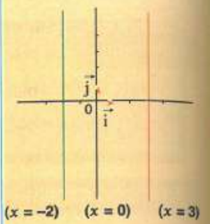
$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

6 Droites particulières

A- Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

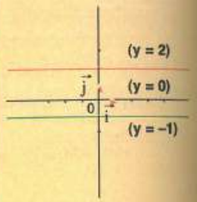
Pour qu'une droite soit parallèle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $x = c$.



B- Droite parallèle à l'axe des abscisses

Propriété Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

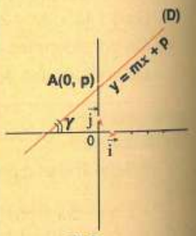
Pour qu'une droite soit parallèle à l'axe des abscisses, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $y = c$.



7 Equation d'une droite et son coefficient directeur

Propriété Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour qu'une droite (D) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $y = mx + p$.



Le nombre réel m s'appelle **coefficient directeur** de la droite (D).
Le nombre réel p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de (D).
L'équation $y = mx + p$ est **l'équation réduite** de la droite (D).

- Si $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal, le nombre réel m est appelé pente de la droite (D).
Si γ est une mesure de l'angle déterminé par la droite (D) et l'axe des abscisses, alors
$m = \tan\gamma$
- Si $\vec{u}(\alpha;\beta)$ est un vecteur directeur d'une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées ($\alpha \neq 0$), alors $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur de la droite (D).

Propriété Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La droite passant par le point $A(x_0 ; y_0)$ et de coefficient directeur m a une équation cartésienne de la forme : $y - y_0 = m(x - x_0)$

Exemples

- Déterminons une équation de la droite (D) passant par A(–1 ; 2) et de coefficient directeur 2.
Une équation de (D) s'écrit $y - 2 = m(x - (-1))$
c'est-à-dire $y - 2 = m(x + 1)$.
Or m = 2 ; donc $y - 2 = 2(x + 1)$ est une équation de la droite (D).
Donc $y = 2x + 4$ est l'équation réduite de (D).

8 Positions relatives de deux droites

A- Parallélisme de deux droites définies par leurs équations cartésiennes

Théorème Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour que deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ (où $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$) soient parallèles, il faut et il suffit que : $ab' - ba' = 0$ c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$.

Remarques

Soit $(D) = D(A;\vec{u})$ et $(\Delta) = D(B;\vec{v})$

Pour que (D) et (Δ) soient parallèles il faut et il suffit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires c'est-à-dire :

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

Exemple et applications

- On considère les deux droites $\begin{cases} (D) : 2x - y + 3 = 0 \\ (D') : 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$
On a : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$. Or $11 \neq 0$; par conséquent (D) et (D') ne sont pas parallèles.
- On considère les deux droites $\begin{cases} (D_1) : 3x + 2y - 5 = 0 \\ (D_2) : mx + 7y + 1 = 0 \end{cases}$
1) Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle (D_1) et (D_2) sont parallèles.
2) Déterminer une équation de la droite (Δ) parallèle à la droit (D_1) et passant par le point A(–1; 2).

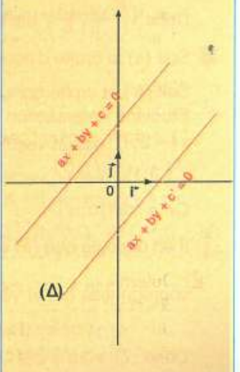
B- Parallélisme de deux droites définies par leurs équations réduites

Théorème Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour que deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient parallèles, il faut et il suffit que $m = m'$.

Note

Si (Δ) est une droite parallèle à une droite dont une équation est :
$ax + by + c = 0$
alors une équation de (Δ) s'écrit :
$ax + by + c' = 0$



Exemple et application

- On considère la droite (D) d'équation : $y = \frac{3}{2}x + 1$.
Déterminons une équation de la droite (Δ) passant par A(2; –3) et parallèle à la droite (D).
Comme (Δ) et (D) sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur.
Donc l'équation cartésienne de (Δ) s'écrit $y - (-3) = \frac{3}{2}(x - 2)$ (puisque (Δ) passe par A).
Donc : $y = \frac{3}{2}x - 6$ est l'équation réduite de (Δ).
- Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle la droite (D_1) d'équation :
$y = (2m + 1)x + 5 - m$ est parallèle à la droite (D_2) d'équation $y = -3x + 5$.

C- Intersection de deux droites

Théorème Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Pour que les droites (D) et (D′) d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

soient sécantes, il faut et il suffit que $ab' - ba' \neq 0$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection de (D) et (D′) est la solution du système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- Pour que les droites (Δ) et (Δ′) d'équations respectives : $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient sécantes, il faut et il suffit que $m \neq m'$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ′) est la solution du système : $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

Exemples

- Etudions l'intersection des droites (D) et (D′) d'équations respectives :

$$2x + y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y - 5 = 0$$

On a : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

Puisque $5 \neq 0$, les droites (D) et (D′) sont sécantes ; le couple de coordonnées du point I d'intesection de (D) et (D′) est la solution du système :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

On sait que la solution de ce dernier système est $(x ; y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{9}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{13}{5}$$

Donc $I\left(-\frac{9}{5}; \frac{13}{5}\right)$ est le point d'intersection des droites (D) et (D′).

- Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne : $x + 2y + 3 = 0$.

Soit (Δ′) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Etudions l'intersection des droites (Δ) et (Δ′).

$\vec{u}(-2;1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

$\vec{u'}(2;1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ′).

On a $\det(\vec{u};\vec{u'}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Il en découle que (Δ) et (Δ′) sont sécantes en un point J dont le couple de coordonnées $(x ; y)$ vérifie : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Donc : $(1 + 2t) + 2(2 + t) + 3 = 0$; c'est-à-dire $4t + 8 = 0$ ou encore $t = -2$.

Il s'ensuit que $J(-3 ; 0)$ est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ′).

René Descartes (1596-1650)

Outre sa célébrité comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne, Descartes était un mathématicien hors pair. Il a appliqué l'algèbre en géométrie ; il est à l'origine de la géométrie analytique. Le terme connu de "coordonnées cartésiennes" dérive de son nom.

Déterminant de deux vecteurs

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ est le nombre réel noté $\det(\vec{u};\vec{v})$ définie par : $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Condition de colinéarité de deux vecteurs

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

La droite dans le plan

Soient A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; on la note $D(A;\vec{u})$.

Représentation paramétrique d'une droite

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A(x_0; y_0)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_0 + k\alpha \\ y = y_0 + k\beta \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ s'appelle représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0 ; y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$.

Equation cartésienne d'une droite

Toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\vec{u}(-b;a)$ en est un vecteur directeur

Equation réduite d'une droite

Pour qu'une droite (D) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme $y = mx + p$ qui est appelée l'équation réduite de la droite (D). Le réel m s'appelle le coefficient directeur de la droite (D).

Positions relatives de deux droites

Parallélisme de deux droites définies par leurs équations cartésiennes

- Pour que deux droites d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ soient parallèles, il faut et il suffit que : $ab' - ba' = 0$ ou encore $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$.
- Pour que deux droites soient parallèles il faut et il suffit que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires.

Parallélisme de deux droites définies par leurs équations réduites

Pour que deux droites d'équations respectives : $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient parallèles, il faut et il suffit que $m = m'$.

Intersection de deux droites

- Pour que les droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

soient sécantes, il faut et il suffit que $ab' - ba' \neq 0$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est la solution du système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- Pour que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient sécantes, il faut et il suffit que $m \neq m'$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ') est la solution du système : $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

1 Position relative et intersection de deux droites

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les deux droites (D) et (D') définies par leurs représentations paramétriques :

$$(D): \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \ (t \in IR) \quad \text{et} \quad (D'): \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases} \ (k \in IR)$$

1) Etudier la position relative des droites (D) et (D').
2) Déterminer l'intersection des droites (D) et (D').

Solution

1) Position relative de (D) et (D')

$\vec{u}(-1; 2)$ est un vecteur directeur de (D).

$\vec{u'}(-3; 2)$ est un vecteur directeur de (D').

$$\det(\vec{u}; \vec{u'}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4$$

Comme $\det(\vec{u}; \vec{u'}) \neq 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont non colinéaires.

Donc (D) et (D') sont non parallèles, donc sécantes.

2) Intersection des droites (D) et (D')

Puisque (D) et (D') ne sont pas parallèles, alors (D) et (D') sont sécantes en un point I dont le couple de coordonnées $(x ; y)$ vérifie les deux systèmes simultanément.

Il s'agit, en premier lieu, de déterminer k et t tels que :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases}$$

ou encore que : $\begin{cases} 3 - t = 4 - 3k \\ 2 + 2t = 1 + 2k \end{cases}$

ce dernier système équivaut successivement à :

$$\begin{cases} -t + 3k = 1 \\ 2t - 2k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2t + 6k = 2 \\ 2t - 2k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k = 1 \\ t = 3k - 1 \end{cases}$$

$$\left(k = \frac{1}{4} \text{ et } t = -\frac{1}{4}\right)$$

en remplaçant l'un des nombres k ou t par sa valeur, on détermine les coordonnées de I :

On a : $x = 3 - t$ et $y = 2 + 2t$;

donc : $x = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ et $y = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$

En conclusion $I\left(\frac{13}{4}; \frac{3}{2}\right)$ est le point d'intersection de (D) et (D').

2 Equation d'une droite et alignement de points

Soit ABC un triangle du plan.

1) Construire les points L, M et N tels que :

$$\vec{CL} = \frac{1}{4}\vec{CA} \quad ; \quad \vec{MB} = \frac{1}{3}\vec{MA} \quad ; \quad \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

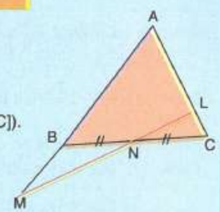
2) On rapporte le plan au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

a) Déterminer les coordonnées des points L, M et N.

b) Ecrire une équation cartésienne de la droite (LM).

c) En déduire que les points L, M et N sont alignés.

Solution



1) Construire des points L, M et N.

- $\vec{CL} = \frac{1}{4}\vec{CA}$
- $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ (N est le milieu de [BC]).
- $\vec{MB} = \frac{1}{3}\vec{MA}$; donc :

$\vec{AB} - \vec{AM} = -\frac{1}{3}\vec{AM}$

$\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{MA}$; d'où $\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

2) a) Coordonnées des points L, M et N dans $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$

- A est l'origine du repère ; donc A(0 ; 0).
- On a : $\vec{AB} = 1.\vec{AB} + 0.\vec{AC}$; donc B(1 ; 0).
- On a : $\vec{AC} = 0.\vec{AB} + 1.\vec{AC}$; donc C(0 ; 1).
- On a : $\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB} + 0.\vec{AC}$; donc $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.
- On a : $\vec{CL} = \frac{1}{4}\vec{CA}$; donc $\vec{AL} + \vec{CA} = \frac{1}{4}\vec{CA}$.

donc : $\vec{AL} = \frac{3}{4}\vec{AC} = 0.\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$; d'où $L\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

- On a : $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ c'est-à-dire N est le milieu de [BC].

Donc $x_N = \frac{x_B + x_C}{2}$ et $y_N = \frac{y_B + y_C}{2}$.

C'est-à-dire $x_N = \frac{1+0}{2}$ et $y_N = \frac{0+1}{2}$.

D'où : $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

b) Equation cartésienne de (LM)

- On a $\overrightarrow{LM}(x_M - x_L\,;\, y_M - y_L)$

Donc $\overrightarrow{LM}\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$

- Soit E(x ; y) un point du plan.

E ∈ (LM) signifie que $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires c'est-à-dire

$\det\left(\overrightarrow{ME}; \overrightarrow{LM}\right) = 0$.

$\det\left(\overrightarrow{ME}; \overrightarrow{LM}\right) = 0$ équivaut successivement à :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ y & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}y = 0$$

$$-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{3}{2}y = 0$$

$$2x + 4y - 3 = 0$$

Donc $2x + 4y - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (LM).

c) Alignement de L, M et N

On a : $2x_N + 4y_N - 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 3$

$2x_N + 4y_N - 3 = 1 + 2 - 3$

$2x_N + 4y_N - 3 = 0$

Donc N ∈ (LM)

Ce qui montre que les points L, M et N sont alignés.

3 Faisceau de droites

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

On considère les droites (D_m) définies par :

$(D_m) : (m-1)x - my - m + 2 = 0$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que le point A(2 ; 1) appartient à la droite (D_m) quel que soit m de IR.

2) Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle le point B(1 ; –2) appartient à la droite (D_m).

3) Déterminer la valeur du réel m pour laquelle la droite (D_m) est parallèle à la droite (D) d'équation : $2x - 3y + 5 = 0$.

Solution

1) On a :

$(m-1)x_A - my_A - m + 2 = (m-1) \times 2 - m \times 1 - m + 2$

$(m-1)x_A - my_A - m + 2 = 2m - 2 - m - m + 2$

$(m-1)x_A - my_A - m + 2 = 0$

Donc A(2 ; 1) appartient à (D_m) pour tout réel m.

2) B(1 ; –2) ∈ D_m équivaut successivement à :

$$(m-1) \times 1 - m(-2) - m + 2 = 0$$

$$m - 1 + 2m - m + 2 = 0$$

$$2m + 1 = 0$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

Donc B(1 ; –2) ∈ (D_m) si et seulement si $m = -\frac{1}{2}$.

(Autrement dit B ∈ $(D_{-0,5})$).

3) Déterminons la valeur du réel m pour laquelle (D_m) est parallèle à (Δ).

On a : $\begin{cases} (D_m) : (m-1)x - my - m = 2 = 0 \\ (\Delta) \quad : 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$

(D_m) // (Δ) si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ -m & -3 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire si : $-3(m-1) + 2m = 0$

ou encore si : $-m + 3 = 0$

$m = 3$.

D'où : (D_m) // (Δ) signifie m = 3

> Un faisceau de droites est un ensemble de droites passant par un point fixe.

Sauf mention expresse du contraire, dans tous les exercices, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercices d'application

Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

1 On considère les vecteurs suivants :

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{v} = 5x\vec{i} + (2y-1)\vec{j}$; $\vec{w} = -\vec{i} + 7\vec{j}$

1) Déterminer les nombres x et y pour que $\vec{u} = \vec{v}$.

2) Déterminer les nombres x et y pour que $\vec{w} = \vec{v}$.

2 On considère les vecteurs suivants :

$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{w} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

Déterminer les deux nombres réels x et y pour que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

3 On considère les vecteurs suivants :

$\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{w}(3;4)$

Déterminer les deux nombres réels x et y pour que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

4 On considère les points A(2 ; 0), B(–1 ; 3) et C(1 ; –2).
Calculer les coordonnées de chacun des points P, Q et R définis par :

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

5 On considère les points :
A(2 ; 3) ; B(5 ; –1) ; C(1 ; 7) ; D(x ; y – 1)
Déterminer les deux nombres réels x et y pour que ABCD soit un parallélogramme.

Colinéarité de deux vecteurs

6 On considère les points : A(3 ; 1) ; B(4 ; 7) ; C(1 ; 6)
Soient E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AO}$$

Montrer que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires.

7 On considère les points A(–4 ; –2), B(5 ; 4) et C(8 ; 6)

1) Montrer qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

2) Déterminer le réel h tel que $\overrightarrow{BC} = h\overrightarrow{BA}$

8 On considère les points A(1; –8), B(11; 7), C(5; –1), D(7; 2)
Montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

9 On considère les vecteurs suivants :

$\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{w} = (2m-1)\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{w'} = \vec{i} + (m+1)\vec{j}$

où m est nombre réel.

1) Calculer les déterminants suivants :

$\det(\vec{u}; \vec{v})$; $\det(\vec{u}; \vec{w})$; $\det(\vec{v}; \vec{w'})$

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

3) Déterminer la valeur de m pour laquelle $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

4) Déterminer la valeur de m pour laquelle $\vec{v}$ et $\vec{w'}$ sont colinéaires.

10 Discuter, selon les valeurs du nombre réel m, la colinéarité des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\vec{v} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{u} = 2m\vec{i} + 5\vec{j}$

2) $\vec{v}\,(m+3; m-3)$ et $\vec{u}\,(m-2; m-1)$

3) $\vec{v}\,(8; m-3)$ et $\vec{u}\,(m-3; 2)$

11 On considère les points A(2 ; 3), B(3 ; 5), C(m – 1 ; 3m – 3).
Déterminer la valeur de m telle que le point C appartient à la droite (AB).

12 Les points A(–1 ; 1), B(–3 ; 2), C(2 ; 0) sont-ils alignés ?

Représentation paramétrique d'une droite

13 Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A(-1;2)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

2) $A(2;-3)$ et $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$

3) $A(1;0)$ et $\vec{u}\,(5;-7)$

4) $A(0;-3)$ et $\vec{u}\,(3;0)$

14 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

1) $A(2;1)$ et $B(1;-1)$

2) $A(-1;1)$ et $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3) $A(-2;2)$ et $B(-3;3)$

15 Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur directeur de la droite (D) définie par sa représentation paramétrique ; puis indiquer si le point A appartient (ou non) à la droite (D) :

1) (D): $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-t \end{cases}$ $(t\in IR)$; $A(1;2)$

2) (D): $\begin{cases} x=2\lambda \\ y=5+\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in IR)$; $A(3;-1)$

3) (D): $\begin{cases} x=2-3k \\ y=-2+2k \end{cases}$ $(k\in IR)$; $A\left(\frac{1}{2};-1\right)$

Equation cartésienne d'une droite

16 Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A(-1;1)$ et $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$
2) $A(2;-3)$ et $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$
3) $A(1;0)$ et $\vec{u}(-3;2)$
4) $A\left(0;\frac{-3}{2}\right)$ et $\vec{u}(1;-1)$

17 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

1) $A(1;1)$ et $B(2;-1)$.
2) $A\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et $B(1;2)$.
3) $A(0;\sqrt{3})$ et $B\left(-\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
4) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

18 1) Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) passant par A(3 ; –2) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2)$.

2) Les points B(1; 2), C(3; 5) et E(–1; 6) appartiennent-ils à la droite (D) ?

3) Déterminer :

a) le point I, de la droite (D), d'abscisse –3.

b) le point J, de la droite (D), d'ordonnée 3.

Equation réduite d'une droite

19 Ecrire l'équation réduite de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur m dans chacun des cas suivants :

1) $A(1;3)$ et $m=2$
2) $A(1;\sqrt{3})$ et $m=\sqrt{2}$
3) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $m=-\frac{2}{3}$
4) $A(0;4)$ et $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$

20 Déterminer le coefficient directeur de la droite (D) définie par son équation cartésienne, dans chacun des cas suivants :

1) (D) : $2x-3y+5=0$ 3) (D) : $\sqrt{3}x-2y+3=0$
2) (D) : $\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y+1=0$ 4) (D) : $3x-7y+1=0$

21 Déterminer le coefficient directeur de la droite (D) passant par les deux points A et B, dans chacun des cas suivants :

1) $A(-1;2)$ $B(3;5)$
2) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $B(1;2)$
3) $A(1;2)$ $B\left(-\frac{1}{2};-1\right)$

Positions relatives de deux droites

22 Etudier la position relative des deux droites (D) et (D'), dans chacun des cas suivants en déterminant leur point d'intersection s'il existe :

1) (D): $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \end{cases}$ $(t\in IR)$ et (D'): $\begin{cases} x=1-k \\ y=-1+2k \end{cases}$ $(k\in IR)$

2) (D): $\begin{cases} x=2-\frac{1}{2}t \\ y=1+t \end{cases}$ $(t\in IR)$ et (D'): $\begin{cases} x=k \\ y=-3-2k \end{cases}$ $(k\in IR)$

3) (D): $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \end{cases}$ $(t\in IR)$ et (D'): $2x-y+3=0$

4) (D): $\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \end{cases}$ $(t\in IR)$ et (D'): $x+y-2=0$

5) (D): $2x+y-3=0$ et (D'): $x-y+1=0$

6) (D): $x-\sqrt{3}y-3=0$ et (D'): $\sqrt{3}x-3y=0$

23 On considère les deux points A(2 ; 4) et B(–4 ; 2).

1) Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2)$.
2) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}(1;-3)$.
3) Déterminer l'intersection des deux droites (D) et (Δ).

Exercices de renforcement des apprentissages

Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

24 On considère les deux points A(1 ; 2) et B(–5 ; 2).

1) Calculer les coordonnées du point I milieu du segment [AB].
2) Déterminer les coordonnées du point C tel que :
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$
3) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :
$$\vec{u}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

25 Soient A, B et C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$.

I et J sont les points, du plan $\mathcal{P}$, tels que
$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AC}$$
On rapporte le plan $\mathcal{P}$ au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

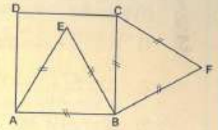
1) a) Calculer les coordonnées de chacun des points I et J.
b) Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment [IJ].
2) Déterminer les coordonnées du point L d'intersection de (IJ) et (BC).

Alignement

26 Soient A, B, C trois points non alignés, E et F les points définis par :
$$\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
En rapportant le plan au repère $\left(C;\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$:

1) Déterminer le couple de coordonnées de chacun des points C, A, B, E et F.
2) Montrer que les points C, E et F sont alignés.

27 Soient ABCD un carré de côté de longueur 1, ABE et BCF deux triangles équilatéraux (voir figure).



On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

1) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Déterminer les coordonnées des points D, E et F.
3) Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

28 Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) définie par une représentation paramétrique, dans chacun des cas suivants :

1) (D) : $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \end{cases}$ $(t\in IR)$

2) (D) : $\begin{cases} x=-2t \\ y=\frac{5}{2}+3t \end{cases}$ $(t\in IR)$

3) (D) : $\begin{cases} x=3\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in IR)$

29 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) définie par son équation cartésienne, dans chacun des cas suivants :

1) $3x-2y+2=0$; 2) $2x-5=0$
3) $x+y=0$; 4) $y-1=0$
5) $3x+2y-14=0$; 6) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-1=0$

Parallélisme de deux droites

30 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et parallèle à la droite (D), dans chacun des cas suivants :

1) (D) : $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$ $(t\in IR)$ et $A(2;3)$

2) (D) : $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in IR)$ et $A(-1;1)$

3) (D) : $\begin{cases} x=1 \\ y=2-k \end{cases}$ $(k\in IR)$ et $A(4;-3)$

4) (D) : $\begin{cases} x=3-t \\ y=1 \end{cases}$ $(t\in IR)$ et $A(2;-3)$

31 Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A et parallèle à la droite (D), dans chacun des cas suivants :

1) (D): $x-2y+3=0$ et $A(2;3)$

2) (D): $2x+5y-1=0$ et $A(1;-2)$

3) (D): $x+4=0$ et $A(3;3)$

4) (D): $5x+3y-4=0$ et $A(0;0)$

32 Etudier le parallélisme des deux droites (D) et (D') dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases}(D): \ 3x+2y-5=0\\(D'): \ 0,75x+0,5y-5=0\end{cases}$

2) $\begin{cases}(D): \ x-1,2y+3=0\\(D'): \ -0,5x+0,6y+1=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}(D): \ \left(2+\sqrt{2}\right)x-y+1-\sqrt{2}=0\\(D'): \ x\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}-1\right)y+3=0\end{cases}$

33 Déterminer le nombre réel m pour que les deux droites (D) et (D') soient parallèles, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases}(D): \ x-2y+3=0\\(D'): \ (m+3)x+3y+5=0\end{cases}$

2) $\begin{cases}(D): \ (m+4)x+(m+1)y+1=0\\(D'): \ 3x+4y-7=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}(D): \ (m-3)x-3y+2=0\\(D): \ -3x+(2m-3)y+1=0\end{cases}$

Exercices de synthèse

34 On considère que les trois droites suivantes sont les supports des côtés d'un triangle.

Déterminer les sommets de ce triangle.

$(D_1) : 2x-3y-6=0$

$(D_2) : x-6y-2=0$

$(D_3) : x+3y=0$

35 Montrer que les trois droites suivantes, définies par leurs équations cartésiennes, sont concourantes en un point dont on déterminera le couple de coordonnées :

$(D_1) : x+3y-3=0$

$(D_2) : 2x-y-4=0$

$(D_3) : 5x+22y-17=0$

36 Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

$$(x+y+1)^2-(5x-3y+10)^2=0$$

37 Soit OAB un triangle.

A l'intérieur du triangle OAB, on considère une droite (Δ) parallèle à (AB) et coupant les droites (OA) et (OB) respectivement en E et F.

On considère les deux points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EN}=k\overrightarrow{EF}$$

On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}=\vec{j}$ et on considère le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Ecrire une équation cartésienne de la droite (OM).

2) Soit a l'abscisse du point E.

Calculer les coordonnées du point N.

3) Montrer que les points O, M et N sont alignés.

38 On considère les points A(4; –5), B(1; 4), C(9; –6) et la droite (D) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=9-8k\\y=-6+10k\end{cases} \quad (k\in IR)$$

1) a) Vérifier que les points B et C appartiennent à la droite (D).

b) Montrer que $5x+4y-21=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

2) Soit (D) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Montrer que $4x-y-21=0$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

3) Déterminer le couple de coordonnées du point I d'intersection des deux droites (D) et (Δ).

39 On considère les deux points A(1; 1) et B(2 ; –1).

On pose : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

2) Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda-3\end{cases} \quad (\lambda\in IR)$

Montrer que (Δ) est parallèle à (D).

3) Soit (D') la droite d'équation : $x-4y+3=0$.

Montrer que (Δ) et (D') se coupent en un point C dont on déterminera les coordonnées.

4) a) On considère le point E tel que ABCE est un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées du point E.

b) Vérifier que E appartient à la droite (D).

40 On considère les points :

A(1 ; 2), B(–1 ; 0), C(2 ; 1), D(1 ; 4)

1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

2) Vérifier que les deux points C et D appartiennent à la droite d'équation $3x+y-7=0$.

3) a) Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases}x-y=-1\\3x+y=7\end{cases}$

b) En déduire le couple de coordonnées du point I d'intersection des droites (AB) et (CD).

c) Montrer que : $-5\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0}$

41 On considère les points A(3 ; 2), B(0 ; –2) et C(8 ; –2).

I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [BI].

La droite passant par J et parallèle à la droite (AI), coupe (AB) et (AC) respectivement en K et L.

1) Déterminer une équation cartésienne de chacun des droites (AC) et (JK).

2) Déterminer les coordonnées du point L.

42 Soient EFGH un parallélogramme, A, B et L les points définis par :

$$\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \quad , \quad \overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AL}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Choisir un repère convenable et montrer que les points E, G et L sont alignés.

43 Soit ABCD un trapèze de bases [BC] et [AD].

On suppose que (AB) et (CD) se coupent en O.

On considère les deux points E et F définie par :

$$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}$$

où k est un nombre réel non nul et différent de 1.

1) Montrer qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\overrightarrow{OA}=a\overrightarrow{OB}$$

2) On considère le repère $\left(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées des points E et F (en fonction de k et a).

b) Montrer que O, E et F sont alignés.

c) Soit G le point d'intersection de (AC) et (EF).

Déterminer k pour que G soit un point de (BD).

44 Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD].

Soit M un point de [BC].

(Δ_1) est la droite passant par B et parallèle à (MD).

(Δ_2) est la droite passant par C et parallèle à (MA).

(Δ_1) et (Δ_2) se coupent en N.

Choisir un repère convenable et montrer que les points A, D et N sont alignés.

45 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère un point M de la droite (AD).

Soit N le point tel que : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$

On rapporte le plan au repère $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ où :

$$\vec{i}=\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \vec{j}=\overrightarrow{AB}.$$

Soit m l'abscisse du point M (dans ce repère).

1) Déterminer le couple de coordonnées du point N.

2) Ecrire une équation cartésienne de la droite (MN).

3) Montrer que, quelle que soit la position du point M sur (AD), la droite (MN) passe par un point fixe P indépendant de M, et déterminer le couple de coordonnées de P.

9 EXERCICES ET PROBLÈMES

Problèmes

46 On considère les deux points B(–1 ; 1) et C(–4 ; 2).

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

2) Soit A un point du plan tel que $x - 2y + 8 = 0$ soit une équation de (AC).

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et parallèle à la droite (AC).

b) Déterminer le couple de coordonnées du point A sachant que $4x - y + 5 = 0$ est une équation de la droite (AB).

3) Résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x-2y+8\geqslant 0 \\ x+y+2\geqslant 0 \\ 4x-y+5\leqslant 0 \end{cases}$$

4) Parmi les solutions de (S), déterminer le couple (x ; y) pour lequel l'expression $3x + y$ prend sa valeur maximale.

47 Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) suivantes :

$(D_1) : x-y+1=0$

$(D_2) : x-5y-3=0$

$(D_3) : x+3y-3=0$

sont les supports des côtés d'un triangle.

1) Déterminer le couple de coordonnées de chaque sommet de ce triangle.

2) Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} x-y+1\geqslant 0 \\ x-5y-3\leqslant 0 \\ x+3y-3\leqslant 0 \end{cases}$$

48 On considère, dans le plan P, les points :
A(–2 ; 1); B(2 ; 3) et C(1 ; 1).

I. 1) Ecrire une représentation paramétrique de la droite passant par A et B.

2) Ecrire une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-1)$.

3) Montrer que les droites (AB) et (Δ) se coupent en un point E dont on déterminera les coordonnées.

II. A chaque nombre réel m, on associe la droite (D_m) définie par l'équation cartésienne : $(D_m) : x + my + m - 2 = 0$.

1) Déterminer la valeur du nombre réel m dans chacun des cas suivants :

a) La droite (D_m) passe par le point A.

b) La droite (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées.

c) La droite (D_m) est parallèle à la droite (Δ).

2) Montrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe F dont on déterminera les coordonnées.

49 Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère les deux points A(4 ; 0) et B(0 ; 4).

Soit (D) la droite d'équation : $x + 2y - 6 = 0$.

1) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

b) Déterminer le couple de coordonnées du point C d'intersection des droites (D) et (AB).

2) Les deux points E et F sont respectivement les points d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Déterminer les coordonnées de chacun des points E et F.

3) Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [OC], [AF] et [EB].

a) Déterminer le couple de coordonnées de chacun des points I, J et K.

b) Montrer que les points I, J et K sont alignés.

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $H\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ et parallèle à la droite (D).

5) Soit (D_m) la droite d'équation :

$$(m-1)x + 2my + 3 - 2m = 0$$

où m est un paramètre réel.

a) Déterminer la valeur du réel m pour laquelle les droites (D_m) et (D) sont parallèles.

b) Déterminer la valeur du réel m pour laquelle le point H est un point de (D_m).

Calcul trigonométrique

10

Capacités attendues

- Emploi de la trigonométrie dans des situations et des problèmes relatifs au triangle.
- Représentation des nombres réels sur le cercle trigonométrique en utilisant la notion d'abscisse curviligne et application des différentes relations.
- Résolutions des équations et inéquations trigonométriques fondamentales et représentation des solutions sur le cercle trigonométrique.
- Capacité de tracer la courbe de chacune des fonctions sin et cos et l'exploiter dans la compréhension et la consolidation des notions de périodicité, de parité, de monotonie...

Contenu

Activités préparatoires

- Longueur d'un arc de cercle - mesure d'un angle géométrique en radians
- Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique
- Rapports trigonométriques d'un nombre réel
- Relations entre les rapports trigonométriques de deux nombres dont la somme ou la différence est $2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$
- Equations et inéquations trigonométriques
- Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles
- La relation $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$
- La relation $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$
- La relation $S = pr$

Définitions et règles

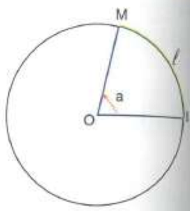
- Unités de mesure des angles
- Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique
- Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine et ses mesures
- Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures
- Rapports trigonométriques d'un nombre réel
- Fonction tangente
- Equations et inéquations trigonométriques fondamentales

Points essentiels

Exercices résolus

Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 Longueur d'un arc de cercle – Mesure d'un angle géométrique en radians



Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R.
On sait que la longueur du cercle (c'est-à-dire son périmètre) est égale à $2\pi R$, et que la longueur d'un demi-cercle est πR.
Soient I et M deux points de (C) et a la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOM}$: $\widehat{IOM} = a°$ et $0 \leq a \leq 360$

1) Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.
On sait que ℓ est proportionnelle à la mesure a de l'angle $\widehat{IOM}$.
Montrer que : $\ell = a \times \frac{\pi R}{180}$

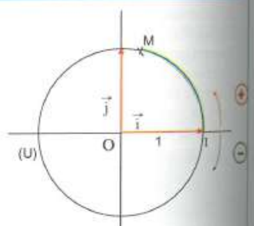
2) Il existe une autre unité de mesure des angles, appelée **radian** de sorte que la mesure de l'angle plat en radians est π et que les mesures en radians et en degrés sont proportionnelles.
Soit α la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$; on écrit : $\widehat{IOM} = \alpha$ rad
Vérifier que : $\frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$. En déduire que : $\ell = \alpha R$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

3) Recopier et compléter le tableau suivant :

Mesure de $\widehat{IOM}$ en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Mesure de $\widehat{IOM}$ en degrés									

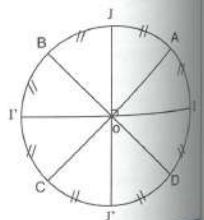
Dans le cas où R = 1, on a $\ell = \alpha$ c'est-à-dire que la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ est égal à la longueur ℓ de l'arc $\widehat{IM}$.

ACTIVITE 2 Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique



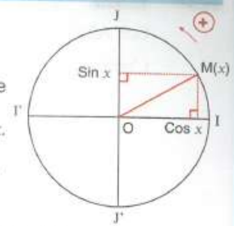
1) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1. Soit I un point de (U).
Lorsqu'un point mobile M part du point I et tourne autour du cercle (en décrivant le cercle) dans le sens de la flèche rouge, on dit qu'il tourne dans le sens positif ou direct, en revanche, le sens de la flèche verte est appelé sens négatif ou indirect.
Lorsqu'on choisit un point I sur (U) et on opte pour un sens positif de rotation autour du cercle, on dit que l'on a orienté le cercle une orientation positive, **(U) est** alors **appelé le cercle trigonométrique**.

2) Soient (U) le cercle trigonométrique de centre O et x un nombre réel.
Lorsque le point M par du point I et tourne autour du cercle (U) dans un sens positif parcourant la distance x si $x \geq 0$ (ou dans le sens négatif parcourant la distance $-x$ si $x < 0$), on dit que x est une **abscisse curviligne** du point M sur (U) et on écrit M(x).
Ainsi, on a effectué un repérage du point M sur (U).
Par exemple, lorsque M tourne dans le sens positif et s'arrête en J, alors $x = \frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne de M c'est-à-dire de J.
Lorsque M tourne dans le sens négatif et s'arrête en J', alors $x = -\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne de J'.



a) Donner une explication du résultat suivant :
Si x est une abscisse curviligne du point M sur (U), alors $x + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) est aussi une abscisse curviligne de M. En d'autres termes M(x) et M'($x + 2k\pi$) sont deux points confondus de (U).
b) Déterminer, sur la figure, les points d'abscisses curvilignes :
$\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; π ; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{4}$; 25π ; $\frac{31\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{19\pi}{2}$; $-\frac{37\pi}{4}$; -4π.

ACTIVITE 3 Rapports trigonométriques d'un nombre réel



Soit (U) un cercle trigonométrique de centre O.
I et J sont deux points de (U) tels que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires.
Le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormal.
Soient x un nombre réel et M le point d'abscisse curviligne x sur le cercle trigonométrique (U).
- L'abscisse de M, dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, s'appelle **cosinus** x et se note $\cos x$.
- L'ordonnée de M, dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, s'appelle **sinus** x et se note $\sin x$.

1) Déterminer le cosinus et le sinus de chacun des nombres suivants :
0 ; $\frac{\pi}{2}$ π ; 2π ; $-\frac{\pi}{2}$; $-\pi$; -2π.
2) Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI) et soit K le projeté orthogonal de M su (OJ).
a) Dans le cas où $x = \frac{\pi}{6}$, montrer que OMJ est un triangle équilatéral.
En déduire $\sin\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{6}$.
b) Dans le cas où $x = \frac{\pi}{4}$, montrer que OMH est un triangle rectangle isocèle.
En déduire $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.
c) Dans le cas où $x = \frac{\pi}{3}$, montrer que OIM est un triangle équilatéral. Calculer $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\text{Sin}\,\frac{\pi}{3}$.
3) Montrer que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (c'est-à-dire $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$).

ACTIVITE 4 Relations entre les rapports trigonométriques de deux nombres dont la somme ou la différence est $2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$

Soient M(x) un point de (U), d'abscisse curviligne x, et k un nombre entier relatif.
1) Sur (U), représenter les points $M_1(x + k(2\pi))$, $M_2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $M_3\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $M_4(\pi - x)$, $M_5(\pi + x)$ et $M_6(-x)$.
2) Montrer que : $\cos(x + k(2\pi)) = \cos x$ et $\sin(x + k(2\pi)) = \sin x$.
3) Montrer que M_6 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
En déduire que : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
4) Soit H_2 le projeté orthogonal de M_2 sur (OI). Montrer que les triangles OMH et OM_2H_2 sont isométriques (H étant le projeté orthogonal de M su (OI)).
En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
5) Montrer que M_3 est le symétrique de M_2 par rapport à l'axe des ordonnées.
En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
6) Montrer que M_4 est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées et que M_5 est le symétrique de M par rapport à O. En déduire $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$.

ACTIVITE 5 Equations et inéquations trigonométriques

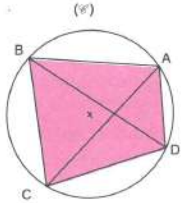
Soit $L =]-\pi ; \pi]$ et $x \in L$.
1) a) Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points dont l'abscisse curviligne x vérifie : $\cos x = \frac{1}{2}$.
b) Indiquer, sur le cercle trigonométrique, les points dont l'abscisse curviligne x vérifie $\cos x \leq \frac{1}{2}$.
En utilisant une couleur différente, dessiner les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse curviligne x vérifier : $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
c) Déterminer dans L les solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ et de chacune des deux inéquations $\cos x \leq \frac{1}{2}$ et $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
2) a) Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points dont l'abscisse curviligne x vérifie : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) Indiquer, par deux couleurs differentes, les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse curviligne x vérifie $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et ceux tels que : $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) Déterminer dans L les solutions de l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puis les solutions de chacune des inéquations $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ACTIVITE 6 Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles

Soit ABCD un quadrilatère inscriptible c'est-à-dire inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$).

L'objectif de cette activité d'établir que :

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\pi \quad \text{et} \quad \widehat{B}+\widehat{D}=\pi$$



1) a) Montrer que : $\widehat{A}=\widehat{DAC}+\widehat{BDC}$ et $\widehat{C}=\widehat{DCA}+\widehat{ADB}$

b) En déduire que : $\widehat{A}+\widehat{C}=\pi$ et $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{C}$

2) Montrer de même que : $\widehat{B}+\widehat{D}=\pi$ et $\sin\widehat{B}=\sin\widehat{D}$

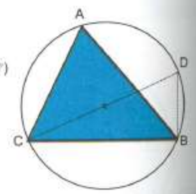
ACTIVITE 7 La relation $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$

Soit ABC un triangle. On pose BC = a, CA = b et AB = c.

1) Montrer que si <u>ABC est un triangle rectangle en A</u>, alors $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$

2) On suppose, à présent, que <u>tous les angles de ABC son aigus</u>.

Soient ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC, et D le point de ($\mathscr{C}$) diamétralement opposé à C (voir figure)



a) Montrer que $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{BDC}$ et $\sin\widehat{BDC}=\frac{a}{DC}$

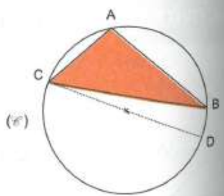
b) Soit R le rayon du cercle ($\mathscr{C}$).

Déduire de la question 2) a) que $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=2R$

c) Montrer la relation : $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R$

3) On suppose, maintenant, que l'un des angles du triangle ABC est obtus, soit $\widehat{A}$ cet angle.

a) En utilisant les résultats de l'activité précédente, montrer que $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{BDC}$ (où D est le point diamétralement opposé à C).



b) Montrer que : $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R$

4) Applications :

a) Calculer $\widehat{A}$, b et c sachant que : a = 6, $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{C}=\frac{3\pi}{4}$.

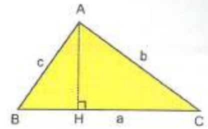
b) Calculer c, $\widehat{B}$ et, $\widehat{C}$ sachant que : a = 4, b = 5 et $\widehat{A}=\frac{2\pi}{3}$.

ACTIVITE 8 La relation $S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$

ABC est un triangle, a = BC, b = CA, c = AB et S est l'aire du triangle ABC.

1) On suppose que les angles de ABC sont aigus.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).



a) Montrer que : $AH=\frac{2S}{a}=b\sin\widehat{C}$

En déduire que : $S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

b) Montrer de même que : $S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ et $S=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$

c) En déduire que : $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{abc}{2S}$ et $abc=4RS$

(où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC).

2) Etudier les question a), b) et c) dans le cas où ABC est rectangle en C, puis dans le cas où l'angle $\widehat{A}$ est obtus.

3) Applications :

a) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté de longueur 5.

b) Calculer l'aire de ABC sachant que : b = 3, c = 5 et $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$.

c) Calculer l'aire d'un parallélogramme ABCD tel que : AB = 3, AD = 5 et $\widehat{BAD}=\frac{2\pi}{3}$.

d) Calculer l'aire et le périmètre d'un parallélogramme de centre O tel que :

$$AC = 8,\ BD = 5 \text{ et } \widehat{BOC}=\frac{\pi}{3}.$$

ACTIVITE 9 La relation S = pr

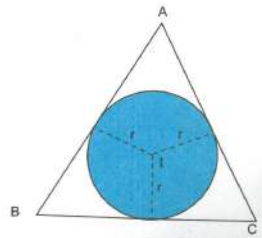
Soient ABC un triangle, I et r le centre et le rayon de son cercle inscrit.

Soit S l'aire du triangle ABC.

On pose : a = BC, b = CA et c = AB.

Soit p le demi-périmètre du triangle ABC $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$

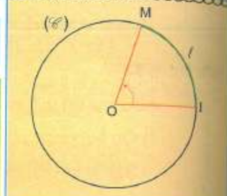
Montrer que : S = pr



1 Unités de mesure des angles

Définition Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon 1.

Soient I et M deux points de $(\mathscr{C})$.
La mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ en **radians** est la longueur l de l'arc $\widehat{IM}$ (voir figure ci-contre).



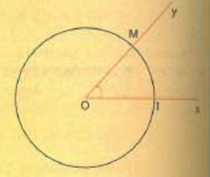
Proportionnalité des unités de mesure

- La mesure d'un angle plat en degrés est 180° tandis que sa mesure en radians est π (longueur d'un demi-cercle de rayon 1).
- Il existe une autre unité de mesure des angles qui est le **grade**, noté gr ; la mesure d'un angle plat en grades est 200 grades.
- Si a, α et β sont les mesures respectives d'un angle géométrique en degrés, radians et grades, alors a, α et β sont proportionnelles respectivement à 180, π et 200

c'est-à-dire : $\dfrac{a}{180}=\dfrac{\alpha}{\pi}=\dfrac{\beta}{200}$

Rappel

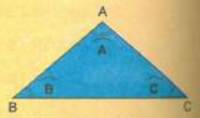
La mesure de l'angle géométrique $\widehat{xOy}$ déterminé par les demi-droites [Ox) et [Oy) est la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.



Exemples et applications

- La mesure d'un angle droit en degrés est a = 90° ; donc sa mesure en radians est $\alpha=\frac{a}{180}\times\pi$ c'est-à-dire $\alpha=\frac{\pi}{2}$ rad ; tandis que sa mesure en grades est $\beta=\frac{a}{180}\times 200$ c'est-à-dire β = 100gr.
- Si la mesure d'un angle en radians est a = 1rad, alors sa mesure en degrés est $a=\frac{\alpha}{\pi}\times 180$ c'est-à-dire $a\simeq 57,32^\circ$ (en prenant $(\pi\simeq 3,14)$) et sa mesure en grades est $\beta=\frac{\alpha}{\pi}\times 200$ c'est-à-dire $\beta\simeq 63,69\,gr$

Calculer en radians les mesures des angles
a) d'un triangle équilatéral ;
b) d'un triangle ABC rectangle en A tel que : $\widehat{ABC}=60^\circ$.
c) d'un parallélogramme sachant que la mesure de l'un de ses angles est 45°.



$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$

La somme des mesures en radians des angles d'un triangle est égale à π.

2 Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique

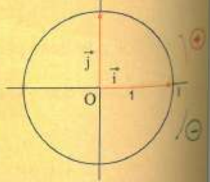
2-1 Cercle trigonométrique

Définition Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On appelle cercle trigonométrique le cercle orienté de centre O, de rayon 1 et muni d'une origine I. Sur ce cercle, on définit deux sens :

- Le sens positif (ou direct) est le sens de rotation autour du cercle en partant de I dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- Le sens négatif (ou indirect) est le sens des aiguilles d'une montre.

sens positif ou direct

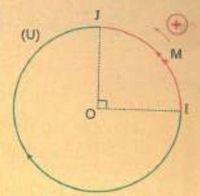


sens négatif ou indirect

2-2- Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique

Définition Soit (U) un cercle trigonométrique de centre O, d'origine I.
Soit x un nombre réel.

- Dans le cas où $x \geq 0$, on considère le point M de (U) tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est x lors du déplacement sur (U) dans le sens positif..
- Dans le cas où $x < 0$, on considère le point M de (U) tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est $-x$ lors du déplacement sur (U) dans le sens négatif.
- Dans les deux cas x s'appelle abscisse curviligne du point M sur (U) et on écrit M(x).
Si x appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, d'amplitude 2π, on dit que x est **l'abscisse curviligne principale** du point M. L'abscisse curviligne principale est unique.
- Noter que si x est une abscisse curviligne du point M sur (U), alors $x + k(2\pi)$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, est aussi une abscisse curviligne de M (c'est-à-dire que les points de (U) d'abscisses curvilignes x et $x + k(2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont confondus.

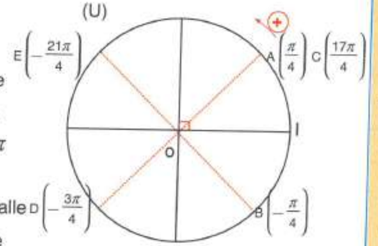


- Lors du déplacement de I vers J dans le sens positif, la mesure de l'arc $\widehat{IJ}$ est $\frac{\pi}{2}$; donc $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
en ajoutant un tour complet, ou deux tours ou plus, alors $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$ ou $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ sont aussi des abscisses curvilignes du point J.
- On peut aussi "aller" de I vers J dans le sens négatif ; dans ce cas la longueur de l'arc $\widehat{IJ}$ est $\frac{3\pi}{2}$; on dit que $-\frac{3\pi}{2}$ est une abscisse curviligne de J.
Les nombres $-\frac{3\pi}{2}-2\pi$, $-\frac{3\pi}{2}-4\pi,\ldots;-\frac{3\pi}{2}+k(2\pi)$ sont aussi des abscisses curvilignes de J.
Notons, par exemple, que $-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k(2\pi)$ avec k = –1.
- Chaque nombre réel x dépend d'un point unique M(x) de (U). Cependant, un point M(x) dépend d'une infinité de nombres réels, à savoir les réels $x + k(2\pi)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exemples et applications

Représentons sur le cercle trigonométrique les point A, B, C, D et E d'abscisses curvilignes respectives $\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{17\pi}{4},-\frac{3\pi}{4},-\frac{21\pi}{4}$.

- Noter que : $\widehat{IOA}=\frac{\pi}{4}\,\text{rad}=45^\circ$
- Noter que : $\frac{17\pi}{4}=\frac{16\pi+\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$
donc $\frac{\pi}{4}$ est aussi une abscisse curviligne du point C ; d'où C est confondu avec A.
- Noter que : $-\frac{21\pi}{4}=\frac{3\pi-24\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}-6\pi$
donc $\frac{3\pi}{4}$ est une abscisse curviligne du point E. Comme $\frac{3\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, alors $\frac{3\pi}{4}$ est l'abscisse curviligne principale du point E.



Remarquer aussi la méthode suivante pour déterminer l'abscisse curviligne principale α du point E :

On a : $-\frac{21\pi}{4}=\alpha+2k\pi$ avec $-\pi<\alpha\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

c'est-à-dire : $\alpha=-\frac{21\pi}{4}-2k\pi$, $-\pi<-\frac{21\pi}{4}-2k\pi\leqslant\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ou encore : $\alpha=-\frac{21\pi}{4}-2k\pi$, $-1<-\frac{21\pi}{4}-2k\leqslant 1$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\alpha=-\frac{21\pi}{4}-2k\pi$, $-\frac{25}{8}\leqslant k<-\frac{17}{8}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Or $k\in\mathbb{Z}$; donc : k = – 3 ; d'où $\alpha=-\frac{21\pi}{4}+6\pi=\frac{3\pi}{4}$

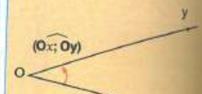
1) Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes
$\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3},-\frac{2\pi}{3},-\frac{11\pi}{3}$.

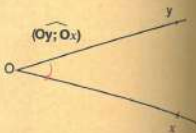
2) Déterminer l'abscisse curviligne principale du point admettant $\frac{2005\pi}{4}$ comme abscisse curviligne ; représenter ce point sur le cercle trigonométrique.

3 Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine et ses mesures

Définition Soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites ayant même origine O.

- Le couple ([Ox) ; [Oy)) détermine un angle orienté de deux demi-droites que l'on note : $(\widehat{Ox,Oy})$.
- Le couple ([Oy) ; [Ox)) détermine un angle orienté de deux demi-droites que l'on note : $(\widehat{Oy;Ox})$.

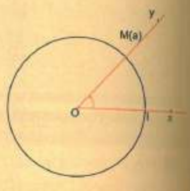


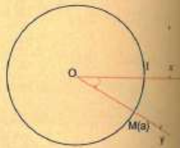


Mesures d'un angle orienté de deux demi-droites

Définition Soit $(\widehat{Ox;Oy})$ un angle orienté de deux demi-droites de même origine O.
Soit (U) un cercle trigonométrique de centre O.
Les deux demi-droites (Ox) et [Oy) coupent le cercle (U) respectivement en I et M.
On considère I comme origine de (U) et soit a une abscisse curviligne du point M sur (U).

- Le nombre réel a est appelé mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$.
- On sait que a + k(2π), avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M.
Ainsi a + k(2π), avec $k \in \mathbb{Z}$, est aussi une mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$.
- Si on note l'une de ces mesures par $(\overline{Ox;Oy})$, on peut écrire : $(\overline{Ox;Oy}) = a + k(2\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$.





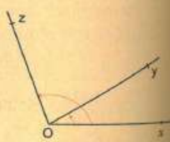
Propriétés Soient [Ox), [Oy) et [Oz) trois demi-droites de même origine O.

On a les relations suivantes :

- $(\overline{Ox;Ox}) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $(\overline{Oy;Ox}) = -(\overline{Ox;Oy}) + k(2\pi)$
- $(\overline{Ox;Oy}) + (\overline{Oy;Oz}) = (\overline{Ox;Oz}) + k(2\pi)$

Cette relation s'appelle relation de Chasles (pour les mesures d'angles orientés).

• **L'une des mesures de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Ox})$ est 0.**



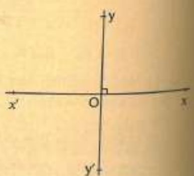
Remarque : • Parmi les mesures d'un angle orienté de deux demi-droites, il existe une mesure unique qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ appelée mesure principale de cet angle orienté.

• Cette mesure principale est l'abscisse curviligne principale du point M sur (U) (définition 2.2) et on a : $(\overline{Ox;Oy}) = (\overline{OI;OM}) + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemples et applications

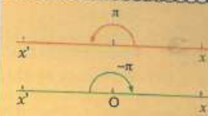
■ Sur la figure ci-conte : ($x'x$) et (y'y) sont perpendiculaires en O.

$$\text{On a : } \begin{cases} (\overline{Ox;Oy}) = \dfrac{\pi}{2} + k(2\pi) \\ (\overline{Oy';Ox'}) = -\dfrac{\pi}{2} + k(2\pi) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



• $(\overline{Ox;Ox'}) = \pi + k(2\pi)$ et $(\overline{Ox';Ox}) = -\pi + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$

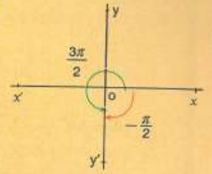
• On a : $(\overline{Ox;Oy'}) = \dfrac{3\pi}{2} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$. Pour k = –1, on trouve que $-\dfrac{\pi}{2}$ est aussi une mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy'})$; on peut donc écrire $(\overline{Ox;Oy'}) = -\dfrac{\pi}{2} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$.



■ Soient $(\widehat{Ox;Oy})$ et $(\widehat{Oy;Oz})$ deux angles orientés de mesures principales respectives $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$. Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oz})$.

D'après la relation de Chasles pour les mesures d'angles orientés, on a :

$$(\overline{Ox;Oz}) = (\overline{Ox;Oy}) + (\overline{Oy;Oz}) + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + k(2\pi)$$
$$(\overline{Ox;Oz}) = \frac{7\pi}{6} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

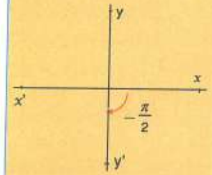


$\dfrac{7\pi}{6}$ n'appartient pas à $]-\pi , \pi]$ (car $\dfrac{7\pi}{6} > \pi$).

$\dfrac{7\pi}{6}$ n'est pas la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oz})$

Soit$(k \in \mathbb{Z})$. $\dfrac{7\pi}{6} + k(2\pi)$est la mesure principale de l'angle $(\widehat{Ox;Oz})$ si et seulement si $-\pi < \dfrac{7\pi}{6} + k(2\pi) \leqslant \pi$ c'est-à-dire si $-\dfrac{13}{12} < k \leqslant -\dfrac{1}{12}$ ou encore si k = –1 car $(k \in \mathbb{Z})$.

Donc la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oz})$ est $\dfrac{7\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

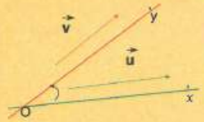


■ 1) Dans chacun des cas suivants, tracer un angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$ qui admet l'un des nombres suivants comme mesure : $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{17\pi}{3}$; $-\dfrac{25\pi}{6}$; $-\dfrac{2005\pi}{6}$.

2) Soient $\dfrac{13\pi}{12}$ une mesure de l'angle $(\widehat{Ox;Oy})$ et $\dfrac{29\pi}{12}$ une mesure de l'angle $(\widehat{Oy;Oz})$.

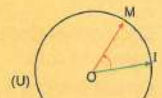
Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{Ox;Oy})$, $(\widehat{Oy;Oz})$ et $(\widehat{Ox;Oz})$.

4 Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures



Définition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, O un point du plan.
On considère les deux demi-droites [Ox) et [Oy) telles que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de [Ox) et $\vec{v}$ est un vecteur directeur de [Oy).

- L'angle orienté des deux vecteurs déterminé par le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$; on le note $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.
- Les mesures de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ sont, par définition, les mesures de $(\widehat{Ox;Oy})$ et sont notées $(\overline{\vec{u};\vec{v}})$.



$\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}.\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}.\vec{v}$

$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = a + k(2\pi)$ où a est une abscisse curviligne de M.

5 Rapports trigonométriques d'un nombre réel

5-1- Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition Soient (U) un cercle trigonométrique d'origine I, de centre O et J le point de (U) tel que $\frac{\pi}{2}$ soit la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$.

Soit x un nombre réel. On considère le point M de (U) dont x est l'une des abscisses curvilignes.

- L'abscisse x_M du point M, dans le repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, est appelée cosinus x et on écrit $\cos x = x_M$.
- L'ordonnée y_M du point M, dans le repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, est appelée sinus x et on écrit $\sin x = y_M$.

Propriétés Pour tout réel x, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ [c'est-à-dire $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$]
- Tableau de signes de $\cos x$ et $\sin x$ où $x \in]-\pi ; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		−	0	+		+	0	−	
$\sin x$		−		−	0	+		+	0

Exemples et applications

■ On a le tableau de valeurs usuelles suivant (voir activités préparatoires).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ Soit x un nombre réel tel que $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ et $\sin x = \frac{2}{5}$

Calculons $\cos x$.

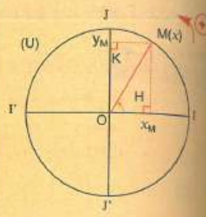
On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Ainsi $\cos^2 x = 1 - \frac{4}{25}$ c'est-à-dire $\cos^2 x = \frac{21}{25}$; donc $\left(\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$

Or $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$; par conséquent $\cos x \leq 0$. D'où : $\cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

■ 1) Calculer $\sin\alpha$ sachant que $\cos\alpha = \frac{3}{10}$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$.

2) Calculer $\cos\beta$ sachant que $\sin\beta = 0{,}6$ et $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$.



- (I'I) est l'axe des abscisses et (J'J) est l'axe des ordonnées.

Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, on a : I(1 ; 0), I'(−1 ; 0), J(0 ; 1) et J'(0 ; −1).

- Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

On a : $-1 \leq x_M \leq 1$ et $-1 \leq y_M \leq 1$.

Par ailleurs, le triangle OMH est rectangle en H ; donc :

$$OH^2 + MH^2 = OM^2$$

c'est-à-dire $x_M^2 + y_M^2 = 1^2$

ou encore : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

- $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$

- Si l'angle $\widehat{HOM}$ est aigu, alors dans le triangle OMH rectangle en H, on a :

$\cos x = \cos\widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = OH$

$\sin x = \sin\widehat{HOM} = \frac{MH}{OM} = MH$

5-2- Relations trigonométriques

Propriétés Soient x un nombre réel et k un nombre entier relatif.

On a les relations suivantes :

- $\cos(x+k(2\pi)) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\sin(x+k(2\pi)) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$

Notons attentivement les interprétations géométriques de ces relations sur la figure ci-contre.

Exemples et applications

■ Calculons les cosinus et les sinus des nombres réels suivants : $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{15\pi}{4}$.

- On a : $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$; donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

On a aussi $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$; donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

- On on a : $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$; donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- On a : $\frac{15\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$; donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

■ Calculer les cosinus et les sinus des nombres réels :

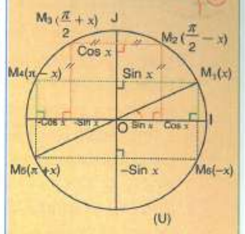
$\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{8\pi}{3}$, $-\frac{29\pi}{6}$, $-\frac{2005\pi}{3}$.

Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(On distinguera deux cas $|k|$ pair ou $|k|$ impair)

Remarque : Le cosinus et le sinus d'un angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ est, par définition, le cosinus et le sinus d'un réel x qui est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ c'est-à-dire :

$\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \cos x$, $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \sin x$ où $\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)} = x + k(2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$



- La fonction qui à chaque nombre réel x associe $\cos x$, est appelée fonction cosinus et est notée Cos :

$\cos : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$
$x \mapsto \cos x$

De même, on définit la fonction sin :

$\sin : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$
$x \mapsto \sin x$

- On a : $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$

On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

- On a, pour tout réel x,

$\cos(-x) = \cos x$

et $\sin(-x) = -\sin x$

La fonction cos est paire tandis que la fonction Sin est impaire.

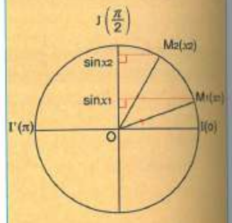
5.3- Représentation des fonctions sin et cos

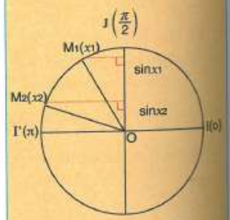
5.3.1- Etude de la fonction sin

- Soit x un nombre réel ; on sait que $\sin(x + k(2\pi)) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Pair ailleurs x est associé au point du cercle trigonométrique dont l'un des abscisses curvilignes est x. L'abscisse curviligne principale de ce point, appartient à l'intervalle $I_0 =]-\pi ; \pi]$.
On suppose que $x \in I_0$ (x décrit I_0) et soit $(\mathscr{C}_0)$ la courbe de la fonction sinus sur I_0.
Si $x \in I_0$, alors $x + k(2\pi) \in I_k =]-\pi + 2k\pi ; \pi + 2k\pi]$.
Soit $(\mathscr{C}_k)$ la courbe de la fonction sinus sur I_k.
Soient $M_0(x ; \sin x)$ et $M_k(x + 2k\pi ; \sin x)$
Comme $\sin(x + k(2\pi)) = \sin x$, alors $M_0 \in (\mathscr{C}_0)$ et $M_k \in (\mathscr{C}_k)$;
et $\overrightarrow{M_0M_k} = k(2\pi)\vec{i}$ (dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$).
Donc M_k est l'image de M_0 par la translation de vecteur $k(2\pi)\vec{i}$.
Il en découle qu'il suffit d'étudier les variations de la fonction sinus sur l'intervalle $I_0 =]-\pi ; \pi]$.

- **Variations de la fonction sin**
Puisque la fonction sin est impaire, on peut se contenter d'étudier ses variations sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
En se référant aux deux figures ci-contre, on a :
  - Si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $x_1 < x_2$, alors $\sin x_1 < \sin x_2$.
  - Si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tels que $x_1 > x_2$, alors $\sin x_1 > \sin x_2$.

Ce qui signifie que la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et qu'elle est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

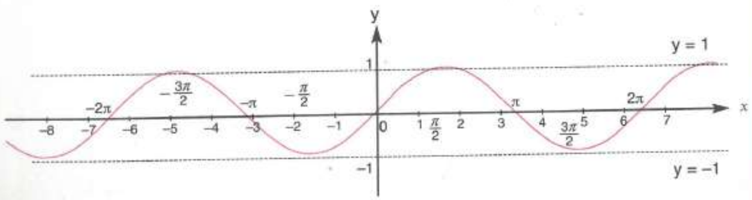




On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

- **Courbe de la fonction sin**



- Les points $M_0(x ; \cos x)$ et $M_k(x + k(2\pi) ; \cos x)$ appartiennent à la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction cos.

5.3.2- Etude de la fonction cos

- On sait que $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel x. Puisque $\cos x = \cos(x + k(2\pi))$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ (2π est une période de la fonction cos), on peut se restreindre à étudier la fonction cos sur l'intervalle $I_0 =]-\pi ; \pi]$, d'amplitude 2π. Comme la fonction cos est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), on peut se limiter à l'étudier sur $[0 ; \pi]$.

- Utilisons l'étude des variations de la fonction sin sur chacun des intervalles $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

– Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $x_1 < x_2$;
On a $\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2$, $\frac{\pi}{2} - x_1$ et $\frac{\pi}{2} - x_2$ appartiennent à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction sin étant strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$ c'est-à-dire $\cos x_1 > \cos x_2$.
D'où la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

– Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tels que $x_1 < x_2$; on a $\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2$, $\frac{\pi}{2} - x_1$ et $\frac{\pi}{2} - x_2$ appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ sur lequel la fonction sin est strictement croissante ; donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$ c'est-à-dire $\cos x_1 > \cos x_2$.
D'où la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant -x \leqslant 0$ c'est-à dire $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

- Si $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, alors $-\pi \leqslant -x \leqslant -\frac{\pi}{2}$ c'est-à dire $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - x \leqslant 0$.

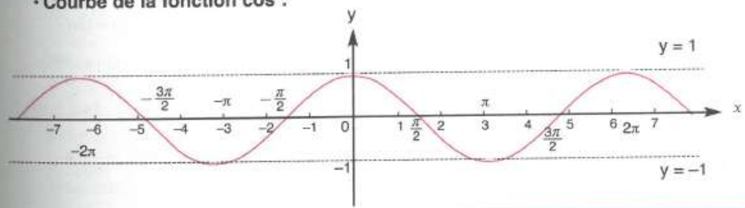
Conclusion : La fonction cos est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$. Comme elle est paire, elle est strictement croissante sur $]-\pi ; 0]$.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

- On obtient la courbe de la fonction cos en translatant la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction cos sur $]-\pi ; \pi]$ par des translations de vecteurs $k(2\pi)\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- **Courbe de la fonction cos :**



6 Fonction tangente

Définition Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Le nombre réel $\frac{\sin x}{\cos x}$ s'appelle tangente de x et s'écrit $\tan x$ c'est-à-dire : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Le fonction, qui à chaque réel x (différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$) associe sa tangente, est appelée fonction tangente et se note tan.

$\cos x = 0$ signifie que : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble de définition de la fonction tan est :
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Interprétation géométrique du nombre tan$x$

Soient M un point du cercle trigonométrique (U), distinct de J et de J', et x une abscisse curviligne de M.
($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ car M ≠ J et M ≠ J').
Soit (Δ) l'axe tangent à (U) en I.

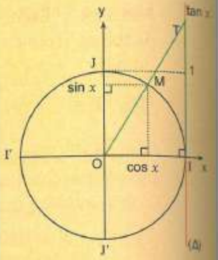
10 DEFINITIONS ET REGLES

On considère (Δ) gradué d'origine I et a même unité de mesure OI = 1

On sait que M(cos$x$; sin$x$) dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$; donc l'équation de la droite (OM) est $Y=\frac{\sin x}{\cos x}X$ c'est-à-dire Y = (tan$x$)X.

Soit T le point d'intersection de (OM) et (Δ). Donc T(1 ; tan$x$).

D'où tan$x$ est l'abscisse de T sur (Δ) et on a : $|\tan x| = IT$.



Propriétés Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On a les relations suivantes :

- $\tan(-x)=-\tan x$ (la fonction tan est impaire)
- $\tan(x+\pi)=\tan x$ (la fonction tan est périodique de période π)
- $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

· **On a le tableau de valeurs remarquables suivant :**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

· **tan (x + kπ) = tan$x$ pour tout k de $\mathbb{Z}$.**

$\cdot\tan(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}$

$=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$

$\tan(\pi+x)=\tan x$

$.1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Exemples et applications

■ Calculons $\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$.

- On a : $\frac{13\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+3\pi$; donc $\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$
- On a $-\frac{16\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}-5\pi$; donc $\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Or $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$; d'où $\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

■ Sachant que tan$x$ = −2 et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, calculer cos$x$ et sin$x$.

■ Donner le tableau de signe de la fonction tan sur [−π ; π].

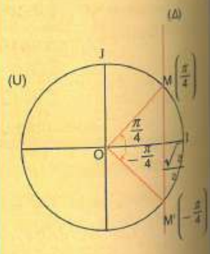
7 Equations et inéquations trigonométrique fondamentales

7.1- Equations du type cos$x$ = a et inéquations cos$x$ ≤ a ou cos$x$ ≥ a

*** Equations du type cos$x$ = a**

- **Introduction** : Résolvons dans IR l'équation (E) : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit (Δ) la droite d'équation $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (Δ) coupe le cercle trigonométrique (U) en deux point M et M′ d'abscisses curvilignes principales respectives $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$ (voir figure ci-contre).



On sait que toutes les abscisses curvilignes du point M sont les nombres réels $\frac{\pi}{4}+k(2\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$. On sait aussi que toutes les abscisses curvilignes du point M′ sont les nombres réels $-\frac{\pi}{4}+k(2\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$. Par ailleurs :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)$$

D'où : L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans IR est :

$$S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k(2\pi)/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k(2\pi)/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

10 DEFINITIONS ET REGLES

- **Remarque : Solutions sur un intervalle L**

Résolvons l'équation (E) sur l'intervalle L = [−2π ; 2π].

Ce qui revient à déterminer les nombres réels x tels que : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in L$.

$\left[\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x\in L\right]$ équivaut à : $\left[\left(x=\frac{\pi}{4}+k(2\pi);k\in\mathbb{Z}\right)\text{ou}\left(x=-\frac{\pi}{4}+k(2\pi);k\in\mathbb{Z}\right)\right]$ et $x\in L$

Le solutions de l'équation (E) dans (L) sont les nombres de la forme $\frac{\pi}{4}+k(2\pi);(k\in\mathbb{Z})$ ou $-\frac{\pi}{4}+k(2\pi);(k\in\mathbb{Z})$ avec $-2\pi\leqslant\frac{\pi}{4}+k(2\pi)\leqslant2\pi$ ou $-2\pi\leqslant-\frac{\pi}{4}+k(2\pi)\leqslant2\pi$

→ $-2\pi\leqslant\frac{\pi}{4}+k2\pi\leqslant2\pi$ équivaut à $-\frac{9}{8}\leqslant k\leqslant\frac{7}{8}$ c'est-à-dire k ∈ {−1 ; 0} (car $k\in\mathbb{Z}$).

Si k = −1 ; on a : $\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$

Si k = 0 ; on a : $\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{4}$

Donc $-\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont des solutions de (E) dans L.

→ $-2\pi\leqslant-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant2\pi$ équivaut à $-\frac{7}{8}\leqslant k\leqslant\frac{9}{8}$ c'est-à-dire k ∈ {0 ; 1} (car $k\in\mathbb{Z}$)

Si k = 0 ; on a : $\frac{\pi}{4}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}$

Si k = 1 ; on a : $-\frac{\pi}{4}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$

Donc : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ sont des solutions de (E) dans L.

→ En conclusion l'ensemble des solutions de (E) dans L est $S'=\left\{-\frac{7\pi}{4};-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

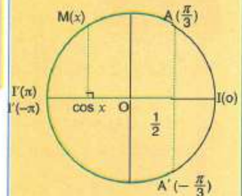
· **Si x = α + 2kπ est une solution de l'équation x ∈ L, et cos$x$ = a, il faut encadrer les valeurs de k dans $\mathbb{Z}$ et les déterminer en utilisent la condition x ∈ L.**

Propriété On considère l'équation : cos$x$ = a où a ∈ IR.

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation dans IR.

- Si (a > 1 ou a < −1, alors : S = ∅.
- Si a = 1, alors : S = {2kπ/k ∈ $\mathbb{Z}$}.
- Si a = −1, alors : S = {π + 2kπ/ k ∈ $\mathbb{Z}$}
- Si −1 < a < 1, alors il existe un nombre réel α de]0 ; π[tel que cosα = a et on a : S = {−α + 2kπ/ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∪ {α + 2kπ/k ∈ $\mathbb{Z}$}

· **On sait que −1 ≤ cos$x$ ≤ 1 pour tout réel x. Donc l'équation cos$x$ = a admet des solutions seulement si −1 ≤ a ≤ 1.**



*** Inéquations du type cos$x$ ≤ a ou cos$x$ ≥ a**

- Résolvons dans l'intervalle L = [−π ; π] l'inéquation $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$

On sait que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

Sur le cercle trigonométrique, soient les deux points $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $A'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

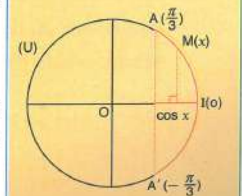
Notons qu'en se référant à la figure ci-contre, l'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curvilignes des points M(x) représentés sur l'arc vert du cercle trigonométrique (U) tel que $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

Donc l'ensemble des solutions sur [−π ; π] est $S=\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

- Résolvons dans L l'inéquation $\cos x>\frac{1}{2}$.

En se basant sur la même figure, on note que l'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curvilignes des points M(x) représentés sur l'arc rouge du cercle (U) telles que $\cos x>\frac{1}{2}$ excepté A et A′ (car $\cos x>\frac{1}{2}$).

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x>\frac{1}{2}$ sur L est $S'=\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$.



7.2- Equations du type sin$x$ = a et inéquations sin$x$ ≤ a ou sin$x$ ≥ a

*** Equations du type sin$x$ = a**

• **Introduction** : Résolvons dans IR l'équation (E) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Soit M le point de (U) d'abscisse curviligne principale $-\frac{\pi}{6}$.

La droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}$ coupe (U) en M et en un autre point M' dont l'une des abscisses curviligne est $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

Comme toutes les abscisses curvilignes du point M sont les réels $-\frac{\pi}{6} + k(2\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$ et toutes les abscisses curvilignes du point M' sont les réels $\frac{7\pi}{6} + k(2\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$, et puisque

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{6} + k(2\pi)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6} + k(2\pi)\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

alors l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans IR est :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

• **Remarque** : L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle L = [−π ; π] est $S' = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right\}$.

Propriété On considère l'équation sin$x$ = a où a ∈ IR.

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation dans IR.

• Si (a > 1 ou a < −1) alors : S = ∅.

• Si a = 1, alors : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• Si a = −1, alors : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

• Si −1 < a < 1, alors il existe un nombre réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que sinα = a et on a :

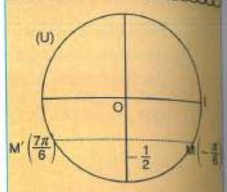
$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

*** Inéquations du type sin$x$ ≤ a ou sin$x$ ≥ a**

Résolvons dans l'intervalle L = [−π ; π] chacune des deux inéquations :

(1) $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$

(2) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$



• **Soit k ∈ $\mathbb{Z}$**

→ $-\pi \leqslant -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi$ signifie que $-\frac{5}{12} \leqslant k \leqslant \frac{7}{12}$ c'est-à-dire k = 0 ; on a alors $-\frac{\pi}{6} + k2\pi = -\frac{\pi}{6}$

→ $-\pi \leqslant \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi$ signifie que $-\frac{13}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{1}{12}$ c'est-à-dire k = −1 ; on a alors $-\frac{7\pi}{6} + k2\pi = -\frac{5\pi}{6}$

• **Pour tout x de IR, on a : −1 ≤ sinx ≤ 1. Donc l'équation sinx = a admet des solutions seulement si −1 ≤ a ≤ 1.**

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

pour tout k de $\mathbb{Z}$.

• **Pour tout k ∈ $\mathbb{Z}$, on a :**

$\sin(\alpha + k(2\pi)) = \sin\alpha$

$\sin(\pi - \alpha + k(2\pi)) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

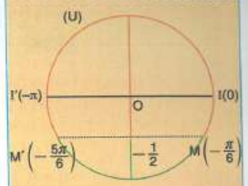
• Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans L sont $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

• A partir de la figure ci-contre, les solutions de l'inéquation (1) sont les abscisses curvilignes des point M(x) représentés sur l'arc vert de (U) telles que $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$

Donc l'ensemble des solutions dans L de l'inéquation (1) est : $S_1 = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$

• A partir de la figure ci-contre, les solutions de l'inéquation (2) sont les abscisses curvilignes des points M(x) représentés sur l'arc rouge de (U) telles que $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$

Donc l'ensemble des solutions dans L de l'inéquation (2) est : $S_2 = \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$



7.3- Equations du type tan$x$ = a et inéquations tan$x$ ≤ a ou tan$x$ ≥ a

*** Equations du type tan$x$ = a**

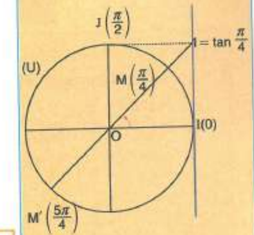
Résolvons dans IR l'équation (E) : tan$x$ = 1

On sait que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ pour tout k de $\mathbb{Z}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(voir interprétation géométrique ci-contre).



Propriété On considère l'équation tan$x$ = a où a ∈ IR.

Soit S son ensemble de solutions.

Il existe un nombre réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que tanα = a et on a : $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

*** Inéquations du type tan$x$ ≤ a ou tan$x$ ≥ a**

Résolvons dans l'intervalle L = [−π ; π] chacune des deux inéquations :

(1) tan x ≤ 1

(2) tan x ≥ 1

• Les solutions de l'équation tan$x$ = 1 dans IR sont les réels $\frac{\pi}{4} + k\pi$ où k ∈ $\mathbb{Z}$ et l'ensemble de ses solutions dans L est $\left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$.

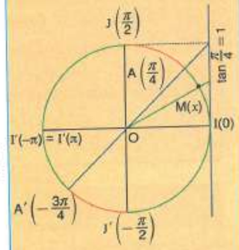
(de l'encadrement $-\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant \pi$, on tire (k = −1 ou k = 0))

• L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) sont les abscisses curvilignes des points M(x) représentés sur l'un des deux arcs verts de (U) excepté J et J' et telles que tan$x$ ≤ 1.

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_1 = \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

• L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) sont les abscisses curvilignes des points M(x) de (U) représentés par l'un des deux arcs rouges excepté J et J' et telles que tan$x$ ≥ 1.

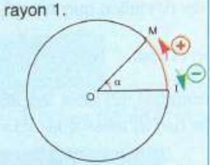
Donc l'ensemble des solutions de (2) est : $S_2 = \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$



10 POINTS ESSENTIELS

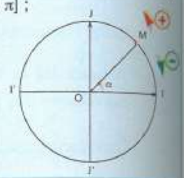
Unités de mesure des angles

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et de rayon 1.
Soient I et M deux points de ($\mathscr{C}$).
Si a, α et β sont les mesures respectives de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ en degrés, radians et grades,
on a : $\frac{\alpha}{180}=\frac{\beta}{\pi}=\frac{\gamma}{200}$;
α représente la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.



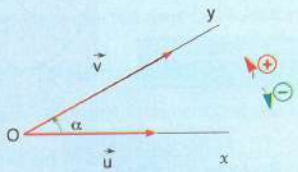
Abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

- Tout point M du cercle trigonométrique (U) représente un nombre unique α de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$;
  α s'appelle l'abscisse curviligne principale de M et on écrit M(α).
- Les nombres $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, sont les abscisses curvilignes du point M ;
  On écrit aussi M($\alpha + 2k\pi$) pour tout k de $\mathbb{Z}$.



Angle orienté de deux demi-droites – Angle orienté de deux vecteurs

- Soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites ayant même origine O, $\vec{u}$ un vecteur directeur de [Ox) et $\vec{v}$ un vecteur directeur de [Oy). (voir figure).

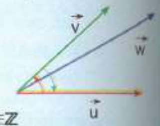


$(\widehat{Ox;Oy})$ est l'angle orienté des deux demi-droites [Ox) et [Oy) (dans cet ordre).
$(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le nombre réel α s'appelle (une) mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$ et de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Soit $(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$; on a :
$$(\overline{\vec{u};\vec{v}})=\alpha+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls du plan. On a :
- $(\overline{\vec{u};\vec{u}})=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
- $(\overline{\vec{v};\vec{u}})=-(\overline{\vec{u};\vec{v}})+2k\pi$
- $(\overline{\vec{u};\vec{v}})=(\overline{\vec{u};\vec{w}})+(\overline{\vec{w};\vec{v}})+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

(relation de Chasles)



Cas particuliers

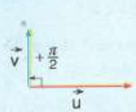
Angle plat

$(\overline{\vec{u};\vec{v}})=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

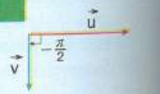
Angle nul

$(\overline{\vec{u};\vec{v}})=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Angle droit



$(\overline{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$



$(\overline{\vec{u};\vec{v}})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Cosinus et sinus d'un nombre réel

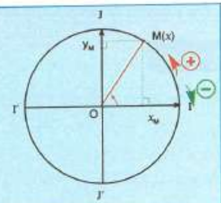
Soit $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$ un repère orthonormal.
Soit (U) le cercle trigonométrique de centre O, d'origine I tel que
$$(\overline{\vec{OI};\vec{OJ}})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
Soient x un nombre réel et M le point de (U), dont l'une des abscisses curvilignes est x.

Tangente d'un réel différent de $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$

Soient x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ et M le point du cercle (U) d'abscisse curviligne x.
Soient (Δ) la tangente à (U) au point I et T le point d'intersection de (OM) et (Δ).

10 POINTS ESSENTIELS

- L'abscisse x_M du point M est appelée cosinus x et on écrit $\cos x = x_M$
- L'ordonnée y_M du point M est appelée sinus x et on écrit $\sin x = y_M$
- M($\cos x$; $\sin x$)



- Le nombre $\frac{\sin x}{\cos x}$ est appelé tangente x, et on écrit :
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$
- $|\tan x|=\text{IT}$

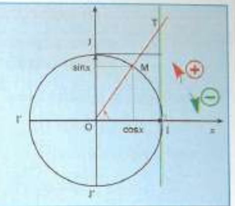
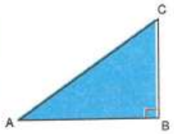


Tableau de valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

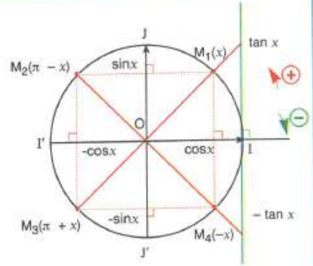


$\cos\widehat{A}=\frac{AB}{AC}$

$\sin\widehat{A}=\frac{BC}{AC}$

$\tan\widehat{A}=\frac{BC}{AB}$

Relations trigonométriques



- Pour tout réel x :
  $-1 \le \cos x \le 1$
  $-1 \le \sin x \le 1$
  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
  $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
  $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

- Pour tous x de $\mathbb{R}$ et k de $\mathbb{Z}$:
  $\cos(x+2k\pi)=\cos x$
  $\sin(x+2k\pi)=\sin x$
  $\cos(-x)=\cos x$
  $\sin(-x)=-\sin x$
- Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
  $\tan(x+k\pi)=\tan x$
  $\tan(-x)=-\tan x$

- La fonction $\cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos x$ est une fonction périodique de période 2π et paire.
- La fonction $\sin : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sin x$ est une fonction périodique de période 2π et impaire.
- La fonction tangente est une fonction périodique de période π et impaire.

Relations entre les rapports trigonométriques de deux nombres dont la somme ou la différence est 0 ; $\frac{\pi}{2}$ ou π

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$
$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$
$\tan(\pi-x)=-\tan x$
$\tan(\pi+x)=\tan x$

10 POINTS ESSENTIELS

Equations trigonométriques

(1) $\cos x = a$

- Si $a \notin [-1\ ;\ 1]$, l'équation (1) n'a pas de solution dans IR.
- $\cos x = 1$ équivaut à :

$$x = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- $\cos x = -1$ équivaut à :

$$x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- Si $a \in]-1\ ;\ 1[$, alors il existe un nombre réel unique α appartenant à $]0\ ;\ \pi[$ tel que $\cos\alpha = a$; l'équation (1) s'écrit $\cos x = \cos\alpha$.

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

$S_1 = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

(2) $\sin x = a$

- Si $a \notin [-1\ ;\ 1]$, l'équation (2) n'a pas de solution dans IR.
- $\sin x = 1$ signifie que :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- $\sin x = -1$ signifie que :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- Si $a \in]-1\ ;\ 1[$, alors il existe un nombre réel unique α appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha = a$; l'équation (2) s'écrit $\sin x = \sin\alpha$.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est :

$S_2 = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

(3) $\tan x = a$

Il existe un réel unique α de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = a$; l'équation (3) s'écrit alors $\tan x = \tan\alpha$.

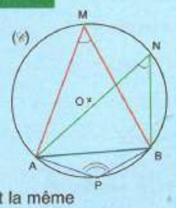
L'ensemble des solutions de l'équation (3) est : $S_3 = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles

Angles inscrits

Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O,

[AB] une corde de $(\mathscr{C})$ et M un point de $(\mathscr{C})$, distinct de A et B.

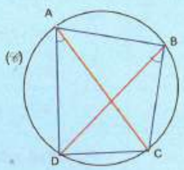


- L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit interceptant la corde [AB] sur le cercle $(\mathscr{C})$.
- Deux angles inscrits, sur $(\mathscr{C})$ interceptant la même corde sont isométriques ou supplémentaires (voir figure).

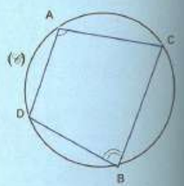
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} \quad \text{et} \quad \widehat{AMB} + \widehat{APB} = \pi$$

Par ailleurs : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Quadrilatères inscriptibles



ABCD quadrilatère inscriptible



ACBD quadrilatère inscriptible

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} \quad \text{ou} \quad \widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \pi$$

Dans le triangle

Soit ABC un triangle. $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

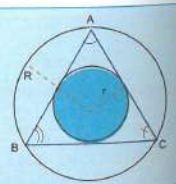
S est l'aire du triangle ABC et p son demi-périmètre (c'est-à-dire $2p = a + b + c$)

R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

r est le rayon du cercle inscrit dans ABC.

On a : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c} = \dfrac{1}{2R} = \dfrac{2S}{abc}$

$S = \dfrac{abc}{4R}$ et $S = pr$



10 EXERCICES RESOLUS

1 Relations trigonométriques

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Montrer que $\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\widehat{A}$

2) Quelle est la nature du triangle ABC si $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$?

3) Montrer que : $\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B} = \dfrac{a-b}{2R}$

4) En déduire que :

$$a\left(\sin\widehat{B} - \sin\widehat{C}\right) + b\left(\sin\widehat{C} - \sin\widehat{A}\right) + c\left(\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B}\right) = 0$$

Commentaire

Pour prouver une relation métrique, dans un triangle, faisant intervenir les longueurs des côtés et les angles, on utilise le plus souvent la formule des sinus :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$$

Solution

1) Montrons que $\sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\widehat{A}$

On sait que : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c}$

Donc : $\sin\widehat{B} = \dfrac{b}{a}\sin\widehat{A}$ et $\sin\widehat{C} = \dfrac{c}{a}\sin\widehat{A}$

On en déduit : $\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \dfrac{b^2}{a^2}\sin^2\widehat{A} + \dfrac{c^2}{a^2}\sin^2\widehat{A}$

c'est-à-dire $\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\widehat{A}$

2) Supposons que $\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \sin^2\widehat{A}$

D'après la relation précédente, on aura :

$\sin^2\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\widehat{A}$ c'est-à-dire $\dfrac{b^2+c^2}{a^2} = 1$

ou encore $b^2 + c^2 = a^2$

Par la réciproque du théorème de Pythagore, cela signifie que le triangle ABC est rectangle en A.

3) On sait que $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{1}{2R}$

Donc : $\sin\widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$ et $\sin\widehat{B} = \dfrac{b}{2R}$. D'où $\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B} = \dfrac{a-b}{2R}$

4) On établit de même que :

$\sin\widehat{B} - \sin\widehat{C} = \dfrac{b-c}{2R}$ et $\sin\widehat{C} - \sin\widehat{A} = \dfrac{c-a}{2R}$

Donc : $a\left(\sin\widehat{B} - \sin\widehat{C}\right) = \dfrac{ab-ac}{2R}$;

$b\left(\sin\widehat{C} - \sin\widehat{A}\right) = \dfrac{bc-ab}{2R}$; $c\left(\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B}\right) = \dfrac{ac-bc}{2R}$

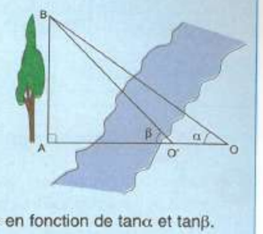
D'où : $a\left(\sin\widehat{B} - \sin\widehat{C}\right) + b\left(\sin\widehat{C} - \sin\widehat{A}\right) + c\left(\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B}\right) = 0$

2 Calcul de longueurs

Une personne veut calculer la hauteur d'un arbre se trouvant sur l'autre rive d'une rivière.

Du point O, on voit l'arbre sous un angle de mesure α.

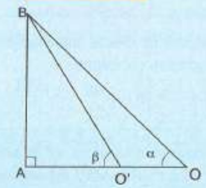
D'un autre point O', distant de deux mètres du point O, on voit l'arbre sous un angle de mesure β. (voir figure).



1) Calculer la hauteur de l'arbre en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$.

2) préciser cette hauteur si $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$.

Solution



1) Détermination de la hauteur AB de l'arbre

Dans le triangle ABO rectangle en A, on a : $\tan\alpha = \dfrac{AB}{AO}$

Dans le triangle ABO' rectangle en A, on a : $\tan\beta = \dfrac{AB}{AO'}$

Donc : $AO = \dfrac{AB}{\tan\alpha}$ et $AO' = \dfrac{AB}{\tan\beta}$

Par ailleurs : $OO' = AO - AO' = \dfrac{AB}{\tan\alpha} - \dfrac{AB}{\tan\beta}$

Donc : $OO' = \dfrac{AB}{\tan\alpha} - \dfrac{AB}{\tan\beta} = AB \times \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha \times \tan\beta}$

D'où $AB = \dfrac{\tan\alpha \times \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} \times OO'$

Or $OO' = 2$m, par suite : $AB = \dfrac{2\tan\alpha \times \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

2) Calcul de AB

On a $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$

On sait que $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$

Donc : $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tan\beta = \sqrt{3}$

Ainsi $AB = \dfrac{2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$ D'où : $AB = \sqrt{3}$ m

Exercices d'application

Unités de mesure des angles

1 Compléter le tableau suivant :

Degré α	150°			90°			260°
Radian β		$\frac{7\pi}{3}$ rad			$\frac{11\pi}{6}$ rad		
Grade γ			25gr			6 gr	

Cercle trigonométrique

2 Déterminer le quadrant contenant l'extrémité d'un arc de mesure l'une des meures suivantes :

1) 260°   2) $-300°$ 3) 460°

4) $\frac{7\pi}{3}$ rad   5) $-\frac{\pi}{4}$ rad   6) $-\frac{23\pi}{6}$ rad

7) 40gr   8) 6gr   9) 150gr

3 Représenter sur le cercle trigonométrique d'origine I les points d'abscisses curvilignes.

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{4}$; π ; $\frac{14\pi}{12}$; $\frac{2006\pi}{3}$

4 Les deux nombres réels α et B sont-ils des abscisses curvilignes d'un même point du cercle trigonométrique ?

1) $\alpha=-\frac{469\pi}{3}$ et $\beta=\frac{874\pi}{3}$

2) $\alpha=\frac{45\pi}{4}$ et $\beta=-\frac{3\pi}{4}$

3) $\alpha=\frac{123\pi}{5}$ et $\beta=\frac{337\pi}{5}$

4) $\alpha=\frac{5\pi}{12}$ et $\beta=-\frac{43\pi}{12}$

Angle orienté de deux vecteurs

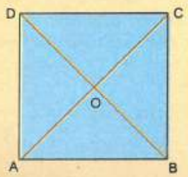
5 Soit ABCD un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}+k(2\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}})$

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}})$

$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}})$

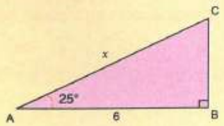
$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$

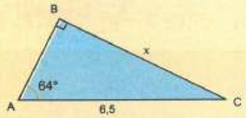


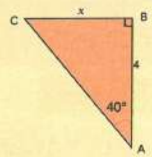
où O est le centre du carré ABCD.

Rapports trigonométriques

6 Déterminer la valeur de x dans chaque cas suivant :







7 Calculer la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

1) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$

2) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

3) $2\sin\frac{\pi}{3}-\cos\pi+\tan^2\frac{\pi}{4}$

4) $\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{3}$

5) $\frac{\tan 45°+\tan 60°}{1-\tan 45°\times\tan 60°}$

8 Sans utiliser la calculatrice, calculer α dans chacun des cas suivants :

1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ et $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

3) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$

5) $\tan\alpha=\sqrt{3}$ et $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

6) $\tan\alpha=-1$ et $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

Calculatrice

9 En utilisant la calculatrice, calculer chacun des nombres suivants à 10^{-3} près par défaut :

1) $\sin 37°$; 2) $\cos 213°$

3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$; 4) $\cos\frac{\pi}{7}$

5) $\tan 15°$; 6) $\tan\frac{3\pi}{5}$

10 En utilisant la calculatrice, trouver une valeur approchée en degrés du nombre α dans chacun des cas suivants :

1) $\sin\alpha=0,3$; 2) $\cos\alpha=-0,4$

3) $\sin x=-\frac{1}{3}$; 4) $\cos\alpha=\frac{1}{5}$

5) $\tan\alpha=25$; 6) $\tan\alpha=-65$

Relations trigonométriques

11 1) Soit α un nombre réel appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha=0,6$.
Calculer $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

2) β est un nombre appartenant à $[0;\pi]$ tel que $\cos\beta=-\frac{1}{3}$
Calculer $\sin\beta$ et $\tan\beta$.

3) γ est un nombre réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma=-\frac{2}{5}$
Calculer $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$.

4) a est un nombre réel de $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $\cos a=-\frac{12}{13}$
Calculer tana et sina.

Simplification

12 En utilisant les relations trigonométriques, calculer ce qui suit :

1) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

2) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$; $\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

3) $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$; $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\tan\left(-\frac{57\pi}{6}\right)$

4) $\cos\left(\frac{2005\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\frac{2006\pi}{4}\right)$; $\tan\left(\frac{2006\pi}{2}\right)$

13 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\sin(4\pi+x)$; 2) $\cos(x-2\pi)$

3) $\cos(x-\pi)$; 4) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

5) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)$

14 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)$

2) $\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

15 Simplifier les expressions suivantes :

1) $3\cos x-2\cos(\pi-x)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos(\pi+x)$

2) $\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)+\sin(3\pi+x)+\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos(2\pi-x)$

Equations et inéquations

16 Résoudre dans IR les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x=-\frac{1}{2}$

5) $\tan x=\sqrt{3}$; 6) $\tan x=-1$

17 Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1) $\cos x\leq\frac{1}{2}$; $I=[0,2\pi]$

2) $2\cos x+\sqrt{3}\geqslant 0$; $I=[-\pi,\pi]$

3) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; $I=[0,2\pi]$

4) $2\sin x+1<0$; $I=[-\pi,\pi]$

5) $\tan x\geqslant\sqrt{3}$; $I=[0,2\pi]$

6) $\tan x+1<0$; $I=[-\pi,\pi]$

18 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\cos x=\cos\frac{\pi}{7}$; 2) $\sin x=\sin\frac{\pi}{8}$

3) $\cos x=-\cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin x=-\sin\frac{\pi}{8}$

5) $\tan x=\tan\frac{\pi}{12}$; 6) $\tan x=-\tan\frac{\pi}{5}$

7) $\sin 2x=\sin x$; 8) $\cos 2x=\sin x$

9) $\tan 2x=\tan x$; 10) $\tan 2x=\frac{1}{\tan x}$

Exercices de renforcement des apprentissages

Cercles et cercle trigonométrique

19 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de rayon 4cm.

Compléter le tableau suivant où l est la longueur en cm d'un arc, du cercle ($\mathscr{C}$), de mesure β en radians.

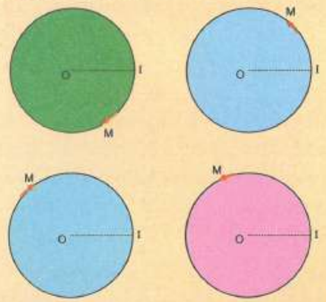
Longueur l de l'arc (en cm)		7		11,6		1,25
Mesure β (en rad)	$\frac{6\pi}{13}$		$\frac{\pi}{12}$		16π	

20 La longueur d'un arc de cercle est 3cm.

Calculer le rayon du cercle si la mesure de l'angle au centre interceptant l'arc est :

a) 1,2 rad ; b) 18°

21 Parmi les cercles suivants, déterminer ceux qui sont orientés positivement :

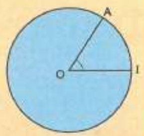


On suppose que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\vec{OI};\vec{OM}}\right)$ est positive.

22 Soit $\widehat{IA}$ l'arc de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad .

L'extrémité de l'arc de mesure α coïncide-elle avec l'extrémité A dans chacun des cas suivants ?

(α en rad).



1) $\alpha=\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

3) $\alpha=\frac{7\pi}{3}$; 4) $\alpha=-\frac{5\pi}{3}$

5) $\alpha=-\frac{35\pi}{3}$; 6) $\alpha=\frac{19\pi}{3}$

23 Soient A et B deux points du plan tels que : AB = 5.
Construire les points M, P, Q et R tels que :

1) AM = 3 et $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AM}}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

2) AP = 5 et $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AP}}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

3) AQ = 6 et $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AQ}}\right)=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

4) AR = 2 et $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AR}}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

24 Déterminer la mesure principale de chacun des angles de mesure :

π ; $-\frac{7\pi}{32}$; $-\frac{11\pi}{2}$; $\frac{22\pi}{4}$; -7π $\frac{44\pi}{12}$;

3105° ; − 1680° ; 2120°

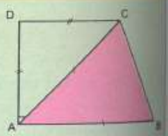
25 k est un nombre entier relatif.
Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes les nombres réels suivants :

$a=\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $b=\pi+2k\pi$

$c=\frac{2k\pi}{3}$; $d=-\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{3}$

Angle orienté de deux vecteurs

26 On considère la figure suivante :



Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\vec{DC};\vec{AB}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{DA};\vec{DC}}\right)$

$\left(\widehat{\vec{BA};\vec{BC}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{AD};\vec{AC}}\right)$

Rapports trigonométriques

27 Sachant que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{2\pi}{5}$.

2) En déduire les valeurs exactes des réels

$\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$; $\sin\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$

28 Sachant que : $\tan\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{9\pi}{10}$ et $\sin\frac{3\pi}{10}$.

29 Soit α le réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1) Calculer Cosα et tanα.

2) Calculer $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

30 Calculer A et B où :

$A=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}+3\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$

$B=5\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}+7\tan\frac{3\pi}{4}$

31 Sachant que : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

1) Montrer que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et calculer $\sin\frac{\pi}{8}$.

2) Calculer $\cos\frac{7\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

Simplification

32 Simplifier les expressions suivantes :

1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

2) $\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$

3) $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

33 Montrer que pour x de IR :

1) $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x\cos x$

2) $\sin^4 x+\cos^4 x+2\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x=1$

34 Soient x et y deux nombres réels. Montrer que :

$\cos^2 x-\cos^2 y=\sin^2 y-\sin^2 x$

35 Montrer que, pour tout réel x tel que $\cos x\neq 0$, on a :

$\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

36 Soit t un réel tel que cost ≠ 0.

Montrer que : $\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}$ et $\sin^2 t=\frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$

37 1) Exprimer $\frac{\sin^3 t-\cos^3 t}{\sin t-\cos t}$ en fonction de tan t.

2) Exprimer $\cos^2 t-\sin t\cos t$ en fonction de tan t.

3) Exprimer $\frac{\sin^2 t+\sin t\cos t}{\sin^2 t-\cos^2 t}$ en fonction de tan t.

Relations trigonométriques

38 Sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs numériques des expressions suivantes :

1) $\sin^2 9°+\sin^2 81°+\cos^2 45°$

2) $\sin^2 91°+\sin^2 1°$

3) $\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 18°+\sin^2 72°$

4) $\sin^2 10°+\cos^2 16°+\sin^2 80°+\cos^2 74°$

5) $5\sin 270°-\tan 80°\tan 10°\tan 40°\times\tan 50°$

39 Sans l'aide de la calculatrice, calculer ce qui suit :

$A=\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{2\pi}{10}+\cos^2\frac{3\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}$.

$B=\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}+\cos\frac{13\pi}{14}$.

$C=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}$.

$D=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$.

40 Calculer la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

$A=1-\cos^2\left(\frac{27\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{1+\tan^2(17\pi-\alpha)}$

$B=\sin^2 24°-\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2 66°+\tan^2 18°\times\tan^2 72°$

$C=\frac{\cos^2 410°-\sin 210°+\cos^2 760°-\cos 120°}{\tan^2 240°\times\tan^2 390°\times\tan^2 315°}$

41 Soit x un nombre réel tel que : $\cos x+\sin x=\frac{5}{6}$.

Calculer ce qui suit :

1) $\sin x\cos x$; 2) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

3) $\tan x+\frac{1}{\tan x}$; 4) $\sin^3 x+\cos^3 x$

42 Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose : $A=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x$

1) Calculer A en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, puis montrer que $A=(2-\cos^2 x)^2$

2) Déterminer la valeur de A sachant que $\tan x=\sqrt{3}$.

Equations et inéquations trigonométriques

43 Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose :

$B=3\cos(\pi-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)+2$

1) Montrer que : $B=-3+2\cos^2 x$

2) Montrer que : $B=\dfrac{-1-3\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

3) Déterminer les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $B=-\frac{3}{2}$ puis en déduire la valeur de x (en radians).

44 Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

1) Calculer $\tan x$ sachant que :

$$\cos\frac{2\pi}{3}+\tan(\pi+x)+\sin\frac{3\pi}{2}=0$$

2) Calculer, en fonction de $\sin x$, l'expression suivante :

$$\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

3) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

4) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$2\sin x-\sqrt{2}\leqslant 0$$

Exercices de synthèse

45 Montrer que :

$$\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$$

$$2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$$

$$\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=2$$

(où $\cos x\neq\sin x$ et $\cos x\neq-\sin x$)

46 Soit x un nombre réel. On considère l'expression :

$$P(x)=\cos^4 x-\sin^4 x.$$

1) Montrer que : $P\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-P(x)$

2) Calculer P(x) en fonction de $\cos x$.

3) Calculer P(x) en fonction de $\tan x$.

pour tout x de $IR\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

47 Soit x un nombre réel.

On pose : $f(x)=1-4\cos^2 x+2\sin x\times\cos x$.

1) Montrer que $f(\pi+x)=f(x)$.

2) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{31\pi}{6}\right)$ et $f(2006\pi)$.

3) Soit x un nombre réel tel que : $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

On pose : $t=\tan x$

Calculer f(x) en fonction de t.

48 Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}$$

Montrer que : $\sin x=\cos x$. En déduire la valeur de x.

Opérations sur les mesures des angles orientés

49 Donner la mesure principale $(\widehat{\vec{u};\vec{t}})$ dans chacun des cas suivants :

1) $\overline{(\vec{u};\vec{v})}=\frac{\pi}{4}$; $\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\frac{2\pi}{3}$; $\overline{(\vec{w};\vec{t})}=\frac{5\pi}{6}$

2) $\overline{(\vec{u};\vec{v})}=\frac{\pi}{4}$; $\overline{(-\vec{u};-\vec{w})}=\frac{2\pi}{3}$; $\overline{(\vec{t};\vec{w})}=\frac{5\pi}{6}$

3) $\overline{(2\vec{u};-2\vec{v})}=\frac{\pi}{4}$; $\overline{(\vec{v};3\vec{w})}=\frac{2\pi}{3}$; $\overline{(-\vec{w};\vec{t})}=\frac{5\pi}{6}$

50 Soit α un nombre réel tel que :

$$\frac{4\sin\alpha+2\cos\alpha}{6\sin\alpha-3\cos\alpha}=\frac{10}{3}\quad\text{et}\quad\tan\alpha\neq\frac{1}{2}$$

1) Montrer que $\dfrac{4\tan\alpha+2}{6\tan\alpha-3}=\dfrac{10}{3}$

2) Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$

Equations trigonométriques

51 Montrer que, quel que soit $x\in IR$:

$$(\cos x+\sin x)^2=2-(\cos x-\sin x)^2$$

2) a) Ecrire, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, l'expression suivante :

$$A(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(-5\pi+x)-\cos\left(-\frac{9\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$$

b) Calculer $A\left(\frac{29\pi}{4}\right)$ et $A\left(\frac{-11\pi}{4}\right)$

c) Trouver le réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $A(x)=\sqrt{2}$

(On pourra utiliser le résultat de la question 1))

52 1) Résoudre dans IR l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$.

2) On déduire, dans l'intervalle $[-\pi ; 2\pi]$, les solutions de l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$

53 1) Montrer que pour tout réel x :

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+5\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$$

2) Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+5\pi)-1=0$$

3) Représenter les solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique (dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$).

4) Soient M_1, M_2 et M_3 les points obtenus.

Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Trigonométrie et calcul d'aires

54 Soit ABC un triangle d'aire S.

1) Calculer S dans le cas où : $\begin{cases}\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}\\ AB=3\\ AC=4\end{cases}$

2) a) Dans le cas général, montrer que :

$$S=\frac{BC^2\times\sin\widehat{B}\times\sin\widehat{C}}{2\sin\widehat{A}}$$

b) Application : Calculer S sachant que :

$BC=2\sqrt{3}$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{C}=\frac{3\pi}{4}$

55 Soit ABC un triangle tel que :

$BC=4$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=120°$

Calculer AB, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

56 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$BC=10$ et $\tan\widehat{ABC}=\frac{3}{4}$

On pose $\widehat{ABC}=\alpha$.

1) Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

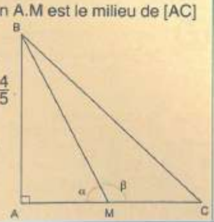
2) Calculer les distances AB et AC.

3) La médiatrice du côté [BC] coupe les deux droites (AB) et (AC) respectivement en E et F.

Calculer les distances BE et CF.

Problèmes

57 Soit ABC un triangle rectangle en A.M est le milieu de [AC] (voir figure)



On pose $\widehat{AMB}=\alpha$ et $\widehat{BMC}=\beta$.

On suppose $AC=3$ et $\sin\beta=\frac{4}{5}$.

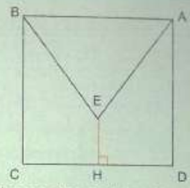
1) Montrer que :

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ et $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

2) Montrer que AB = 2.

3) Calculer $\sin\widehat{MBC}$.

58 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté de longueur 1 et ABE est un triangle équilatéral. H est le projeté orthogonal de E sur (CD).



1) Déterminer une mesure de chacun des angles suivants : $\widehat{EAD}$, $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ADH}$

2) Calculer EH. En déduire $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

3) En déduire $\tan\frac{11\pi}{12}$, $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

59 Soit ABC un triangle tel que : $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) Vérifier que : $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$ et $\tan\left(\widehat{BAC}\right)=\sqrt{2}$.

2) Soit D le projeté orthogonal de B sur (AC).

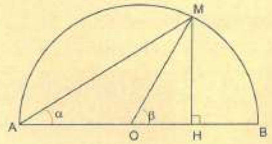
On suppose que AD = 1 et CD = 4.

a) Montrer que : $BD=\sqrt{2}$ et $BC=3\sqrt{2}$.

b) Déterminer les valeurs de $\sin\left(\widehat{ACB}\right)$ et $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

Calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$

60 La figure ci-dessous représente un demi-cercle de centre O, de diamètre [AB] et de rayon 1.



1) Calculer $\cos\alpha$ en utilisant chacun des deux triangles HAM et MAB.

2) Montrer que : $AH=1+\cos\beta$.

3) En déduire que : $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos\beta}{2}$

4) Comparer α et β. En déduire que si $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, alors $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

5) Application

a) Montrer que : $\cos^2\frac{\pi}{12}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

b) Vérifier que : $\cos\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

c) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

10 EXERCICES ET PROBLÈMES

Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$

61 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$$BC = 2a \quad \text{et} \quad \widehat{ABC}=\frac{\pi}{8}.$$

1) Soit O le milieu de [BC].
Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
a) Montrer que : $\widehat{AOH}=\frac{\pi}{4}$.
b) En déduire que : $OH=HA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $AB=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
2) Dans le triangle rectangle AHB, calculer :
$\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

62 Sachant que $\sin t - \cos t = a$, montrer que :

$$\cos^3 t-\sin^3 t=\frac{a}{2}(3-a^2)$$

Equations et inéquations trigonométriques

63 1) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation : $\sin x+\frac{1}{2}=0$

2) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation : $\sin x+\frac{1}{2}>0$

64 Résoudre dans l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$ l'équation :

$$4\cos^2 x-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{6}=0$$

65 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ l'équation :

$$\sin^2 x-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$$

66 Résoudre dans IR l'équation :

$$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$$

67 Pour tout réel x, on pose $A(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
1) Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)$.
2) Montrer que pour tout x de $IR\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
On a : $A(x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
3) Résoudre dans IR l'équation : $A(x)=\frac{1}{2}$

68 Soit x un nombre réel. On pose :
$B(x) = \sin(4x-\pi) + 3\sin 4x + \sin(4x+\pi)$
1) Montrer que : $B(x) = \sin 4x$ pour tout x de IR.
2) a) Montrer que : $B(-x) + B(x) = 0$
b) Montrer que pour tous x de IR et k de $\mathbb{Z}$,
on a : $B\left(x-k\frac{\pi}{2}\right)=B(x)=B\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$
c) Calculer $B\left(\frac{2001\pi}{16}\right)$.
3) Résoudre dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation : $\sqrt{2}\,B(x)=1$

69 1) a) Montrer que quel que soit x de IR :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

b) Résoudre dans IR l'équation :

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi[$ le système :

$$\begin{cases}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin x\times\cos x\geq 0\end{cases}$$

70 Pour tout réel x, on pose :

$$C(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

1) Calculer C(0).
2) Montrer que pour tout x de IR : $C(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
3) Résoudre dans IR l'équation : $C(x)=-\sqrt{3}$
4) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ l'inéquation :

$$C(x)<-\sqrt{3}$$

71 Soient ABC un triangle inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R, H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
La demi-droite [OH) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en I.
On pose $\widehat{BAC}=\alpha$.
1) Montrer que : $IC=2R\sin\frac{\alpha}{2}$ et $CH=2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$
2) En déduire que : $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

72 1) Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases}x+y=\frac{1}{2}\\ xy=-\frac{1}{4}\end{cases}$

2) Sachant que : $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{1}{4}\end{cases}$,

calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.

3) Montrer que : $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$.

73 Dans un triangle ABC, on pose a = BC, b = CA, c = AB et 2p = a + b + c. Soit S l'aire du triangle ABC.

1) Montrer que : $\begin{cases}a=c\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{C}\\ b=a\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{A}\\ c=b\cos\widehat{A}+a\cos\widehat{B}\end{cases}$

2) En déduire que :

$$a\cos\widehat{A}+b\cos\widehat{B}+c\cos\widehat{C}=2p(\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}-1)$$

Statistique

11

Capacités attendues

- Organisation de données statistiques.
- Lecture de graphiques statistiques et son interprétation.
- Interprétation des caractéristiques de position et de dispersion.
- Distinguer les différentes caractéristiques de position.
- Distinguer les différentes caractéristiques de dispersion.

Contenu

• Activités préparatoires

- Organisation des données - effectifs et effectifs cumulés - fréquences et fréquences cumulées - représentations graphiques
- Caractéristiques de position d'une série statistique
- Caractéristiques de dispersion
- Calcul des caractéristiques d'une série statistique - Emploi de la calculatrice
- Utilisation des caractéristiques de position et de dispersion

• Définitions et règles

- Vocabulaire et notation
- Graphiques statistiques
- Caractéristiques de position d'une série statistique
- Caractéristiques de dispersion d'une série statistique

• Points essentiels

• Exercices résolus

• Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 — Organisation des données - effectifs et effectifs cumulés - Fréquences et fréquences cumulées - Représentations graphiques

Le relevé suivant donne les notes obtenues par les élèves d'une classe en mathématiques.

4,5	8	11	19,5	10,5	15	9,5	11	10	11
13,5	13,5	15	17	6	8	15	12	13,5	7
10,5	19	11	19	13	13,5	10,5	17	10	12
12	16	9,5	17	10,5	11	13,5	9,5	12	7

1) a) Former un tableau statistique des effectifs et des effectifs cumulés

b) Quel est le nombre d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 10 ?

c) Construire un diagramme en bâtons de cette série statistique et le polygone des effectifs cumulés.

2) a) Dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées.

b) Quel est le pourcentage des élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 12 ?

3) a) Grouper ces notes par intervalles d'amplitude 5 en commençant par l'intervalle [0, 5[.

Former alors un autre tableau statistique d'une série statistique exprimée en classes.

b) Construire l'histogramme de la série statistique obtenue.

Tableau statistique d'une série statistique

Note x_i	x_1	...	x_i	...	x_p
Effectif n_i	n_1	...	n_i	...	n_p
Effectif cumulé N_i	N_1	...	N_i	...	N_p

- **L'effectif n_i est le nombre d'élèves ayant obtenu la note x_i**
- **L'effectif cumulé N_i correspondant à la note x_i est le nombre d'élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à x_i :**

$$N_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$$

- **La fréquence de la note x_i est le nombre $f_i = \frac{n_i}{N}$**
- **N est l'effectif total : $N = n_1 + n_2 + ... + n_p$**

ACTIVITE 2 — Caractéristiques de position d'une série statistique

Les poids (en kilogrammes) de 25 enfants sont donnés ci-dessus :

31; 48; 40; 45; 46; 34; 42; 40; 35; 48; 45; 42; 52;
49; 45; 42; 48; 37; 39,5; 54,5; 40; 35; 40; 31; 44

1) a) Former un tableau des effectifs et des effectifs cumulés.

b) Quel est le mode de la série statistique obtenue ?

c) Déterminer la médiane et la moyenne arithmétique des poids de ces enfants.

2) a) Le tableau suivant donne une répartition des enfants en classes d'amplitude 5 kg (chacune).

Classe I_i	[30; 35[	[35; 40[	[40; 45[	[45; 50[	[50; 55[
Effectif n_i					
Effectif cumulé					

Recopier et compléter ce tableau.

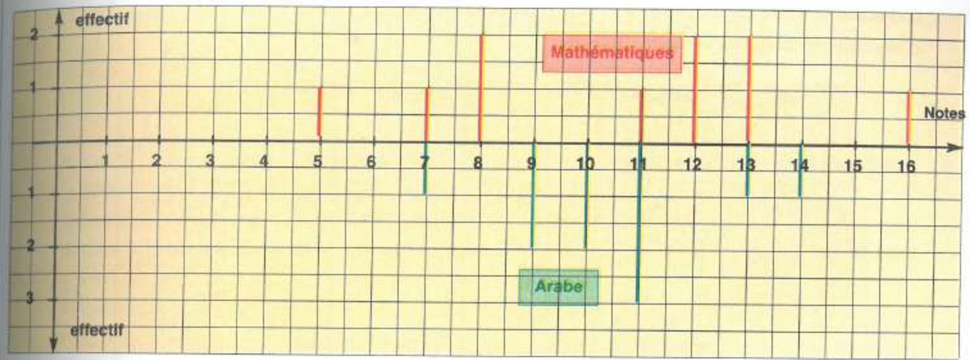
b) Quelle est la classe modale de cette série statistique ?

c) Déterminer une valeur médiane de cette série et calculer sa moyenne arithmétique.

3) Vérifier que pour les deux séries statistiques précédentes, la valeur médiane est la plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est inférieur ou égal à la moitié de l'effectif total.

ACTIVITE 3 — Caractéristiques de dispersion

Les deux graphiques suivants représentent deux séries statistiques associées aux notes obtenues par 10 élèves en arabe et en mathématiques.



1) Dresser un tableau statistique pour chacun des deux matières.

2) Vérifier que les moyennes (arithmétiques) des élèves dans les deux matières sont égales.

3) Calculer la différence entre la plus grande note et la plus petite note pour chaque matière. Quelles sont les notes les plus dispersées par rapport à la moyenne ? Est-ce les notes d'arabe ou celles des mathématiques ? Comment expliquer ce résultat en utilisant le graphique ?

4) Pour mesurer la dispersion des notes x_i autour de la moyenne arithmétique $\bar{x}$, on calcule la moyenne des distances $|x_i - \bar{x}|$ entre x_i et $\bar{x}$ c'est-à-dire la moyenne de la série statistique $(|x_i - \bar{x}|; n_i)$.

Le nombre réel $|x_i - \bar{x}|$ est appelé écart entre x_i et $\bar{x}$ et la moyenne de ces écarts est appelée écart moyen et est notée e.

Calculer l'écart moyen de chacune des séries statistiques associées à la langue arabe et aux mathématiques.

Quelle est la série qui a la plus grande dispersion ? Est-ce celle qui a le plus grand écart moyen ou le contraire.

5) On peut aussi mesurer la dispersion en utilisant la moyenne de la série $((x_i - \bar{x})^2; n_i)$ appelée variance et notée V. Le nombre $\sigma = \sqrt{V}$ est appelé écart type de la série statistique (x_i, n_i).

Calculer la variance et l'écart type de chacune des séries statistiques précédentes.

Comparer les deux variances et les deux écarts types.

ACTIVITE 4 — Calcul des caractéristiques d'une série statistique - Emploi de la calculatrice

La liste suivante représente les notes obtenues par 10 élèves dans l'un des devoirs du contrôle continu :

8 - 11 - 13 - 7 - 12 - 12 - 6 - 13 - 7 - 16

1) Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ de cette série statistique de notes.

2) Recopier et compléter le tableau suivant :

Note x_i	Effectif n_i	$n_i \times x_i$	Ecart $\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:
	Total N = ...	Total A = ...		Total B = ...	Total C = ...

3) Activer une calculatrice scientifique et la régler sur le mode STAT ou SD.
Généralement, pour saisir les données numériques, on appuie sur la touche $\boxed{\text{DATA}}$ ou $\boxed{\text{ENT}}$ (ou voir le manuel d'utilisation de la calculatrice).
Calculer l'écart moyen $e=\frac{B}{N}$, la variance $V=\frac{C}{N}$ et l'écart type $\sigma=\sqrt{V}$, puis vérifier les calculs en utilisant les touches suivantes :

Touche	$\boxed{n}$	$\boxed{\Sigma x}$	$\boxed{\Sigma x^2}$	$\boxed{\sigma.n}$	$\boxed{\bar{x}}$
Résultat sur l'écran	N	A	D	σ	$\bar{x}$

4) Autre méthode de calcul de la variance
Recopier ce tableau et le compléter

Note x_i	Effectif n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
			Total D =

Dans cet exemple, vérifier que $V=\frac{D}{N}-\bar{x}^2$.

Pour vérifier les calculs en utilisant la calculatrice, employer le tableau des tâches ci-dessus.

ACTIVITE 5 — Utilisation des caractéristiques de position et de dispersion

Un professeur veut comparer les résultats de deux classes du même niveau, dans la matière qu'il enseigne, en recourant aux moyennes observées dans 12 devoirs effectués pendant l'année scolaire.

Moyennes de la classe A :
10 - 11,3 - 10,8 - 8,7 - 10,2 - 9,8 - 7,1 - 7,9 - 11,7 - 13,1 - 9,3 - 10,7

Moyennes de la classe B :
9 - 10,1 - 9,8 - 8,6 - 11,2 - 8,8 - 9,1 - 9,7 - 10,5 - 10,3 - 11,5 - 9,6

4) Calculer les moyennes arithmétiques $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ des notes de chacune des deux classes (valeurs approchées à 10^{-2} près).

2) Les deux classes ont-elles le même niveau dans la matière considérée ?

3) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de chacun des deux écarts types σ_A et σ_B des notes des deux classes.

4) Quelle est la classe ayant le plus de régularité dans son travail pendant l'année scolaire ?
Justifier la réponse en comparant σ_A et σ_B .

5) Déterminer pour chaque classe le pourcentage des notes appartenant à l'intervalle $[\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma]$, puis à l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma,\bar{x}+2\sigma]$.
Que peut-on déduire des résultats conjugués des questions 4) et 5) ?

11 DEFINITIONS ET REGLES

1 Vocabulaire et notation

- L'ensemble sur lequel va porter l'étude statistique est appelé **la population statistique** ; tout élément de cet ensemble s'appelle **individu ou unité statistique**.
- La propriété (ou le phénomène) qui fait l'objet de l'étude s'appelle **caractère** (ou variable) ; ce caractère est soit qualitatif, soit quantitatif.

  Le **caractère quantitatif** est celui que l'on peut mesurer, c'est-à-dire que l'on peut traduire par des mesures ou des nombres (taille ; poids ; résultat numérique ; grandeur ; quantité...).

  Le **caractère qualitatif** est celui que l'on ne peut pas exprimer par des nombres (marque d'un produit ; couleur ; ...).
- On considère une population statistique dont le caractère étudié est quantitatif et prend les valeurs numériques x_1 ; x_2 ; ... , x_p .
- Le nombre d'unités de la population correspondant à la valeur x_i s'appelle **l'effectif** correspondant (ou associé) à x_i et se note n_i où $1 \leq i \leq p$.
- Le nombre d'unités pour lesquelles la valeur du caractère est inférieure ou égale à x_i , s'appelle **l'effectif cumulé** correspondant à N_i et se note $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$.
- La somme de tous les effectifs correspondants à toutes les valeurs du caractère s'appelle **l'effectif total** et se note **N**.
- L'ensemble des couples $(x_i ; n_i)$ est appelé **série statistique** ; ses données sont présentées et consignées dans un **tableau statistique** comme suit :

Caractère x_i	x_1	......	x_i	......	x_p
Effectif n_i	n_1	......	n_i	......	n_p
Effectif cumulé N_i	N_1	......	N_i	......	N_p

- Si le caractère prend beaucoup de valeurs, on groupe ces valeurs dans des intervalles, de même amplitude, de la forme $I_i = [a_i, a_{i+1}[$ qui sont appelés **classes**.

  Le nombre d'unités pour lesquelles le caractère prend une valeur appartenant à la classe I_i s'appelle **effectif de la classe** I_i et note n_i.

  Ainsi, on obtient une série statistique (I_i , n_i) exprimée en classes que l'on présente dans un tableau statistique comme suit :

Classe I_i	$[a_0; a_1[$	......	$[a_i; a_{i+1}[$	......	$[a_{p-1}; a_p[$
Effectif n_i	n_1	......	n_i	......	n_p
Effectif cumulé N_i	N_1	......	N_i	......	N

Introduction

La statistique désigne l'ensemble des méthodes mathématiques qui ont pour objet la collecte d'un ensemble de données et d'informations, le traitement et l'interprétation de ces données.

L'activité statistique semble exister depuis très longtemps. Diverses civilisations ont eu recours à des procédés statistiques comme le recensement des terres, des productions agricoles, de la composition et la richesse des sociétés.

Aujourd'hui, la statistique devient un instrument très efficace pour établir des prévisions.

- On considère une série statistique $(x_i; n_i)$ ou $(I_i; n_i)$ dont l'effectif total est N $(1 \leq i \leq p)$.

  Le rapport $\boxed{f_i = \frac{n_i}{N}}$ est appelé **fréquence** de la valeur x_i ou de la classe I_i. Le nombre $\boxed{P_i = 100 \times f_i}$ est appelé **pourcentage** de x_i ou de I_i.

  La fréquence cumulée correspondant à x_i ou à I_i est le nombre :

$$\boxed{F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i}$$

Exemples et applications

Le relevé suivant contient les notes obtenues par les élèves d'une classe en mathématiques.

4	11	6	10	12	15	10	9
7	13	11	8	13	5	14	8
12	10	12	10	8	10	9	12
7	14	11	4	8	12	6	10
7	14	8	6	10	11	6	9

- La population statistique est l'ensemble des élèves ; chaque élève est une unité statistique.
- Le caractère est la note qui est quantitative.
- Présentons la série statistique $(x_i; n_i)$ en dressant le tableau statistique des effectifs et affectifs cumulés.

Caractère	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	1	4	3	5	3	7	4	5	2	3	1
Effectif cumulé	2	3	7	10	15	18	25	29	34	36	39	40

- Les valeurs du caractère sont $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; ... ; $x_{12} = 15$.
- Le nombre d'élèves qui ont obtenu la note $x_6 = 9$ et $n_6 = 3$; c'est l'effectif de la valeur x_6.
- Le nombre d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 9 est : $N_6 = n_1 + n_2 + \dots + n_6 = 18$; c'est l'effectif cumulé correspondant à la valeur $x_6 = 9$.
- L'effectif total est N = 40 : c'est le nombre d'élèves de la classe.
- La fréquence de la note $x_7 = 10$ est $f_7 = \frac{n_7}{N} = \frac{7}{40}$ et son pourcentage est $p_7 = 100f_7 = 17{,}5$. Ce qui signifie que 17,5 % d'élèves ont obtenu une égale à 10.
- Groupons les notes dans des classes d'amplitude 5 : $I_1 = [0; 5[$, $I_2 = [5; 10[$, $I_3 = [10; 15[$ et $I_4 = [15; 20[$. On obtient la série statistique $(I_i; n_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ présentée dans le tableau statistique suivant :

· On dit que n_i individus (de la population) sur N sont favorables à la valeur x_i du caractère.

· On dit que le pourcentage des individus favorables à la valeur x_i et P_i %.

· Pour organiser les données sur le tableau, on ordonne les valeurs du caractère puis on recense le nombre d'apparitions de chaque valeur sur la liste.

Classe	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15 ;20[
Effectif	2	16	21	1
Effectif cumulé	2	18	39	40

- L'effectif $n_2 = 16$ signifie que 16 élèves ont eu une note supérieure ou égale à 5 et inférieure à 10.

On a relevé les tailles de 35 élèves d'un établissement scolaire.
Les résultats sont donnés (en cm) dans la liste suivante :

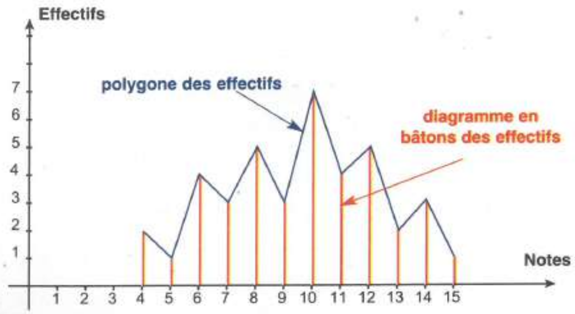
151 - 169 - 165 - 170 - 165 - 170 - 153 - 168 - 169 - 155 - 174 - 164
157 - 169 - 174 - 153 - 168 - 162 - 172 - 172 - 169 - 170 - 152 - 169
168 - 169 - 165 - 172 - 154 - 174 - 165 - 151 - 169 - 157 - 174.

1) Former un tableau statistique des effectifs et effectifs cumulés, puis calculer les fréquences et les fréquences cumulées.
2) Grouper les élèves par classes de longueur 5 cm à partir de la classe [150; 155[. Donner le tableau des effectifs et effectifs cumulés de la série statistique obtenue, et calculer les fréquences et les fréquences cumulées.

2 Graphiques statistiques

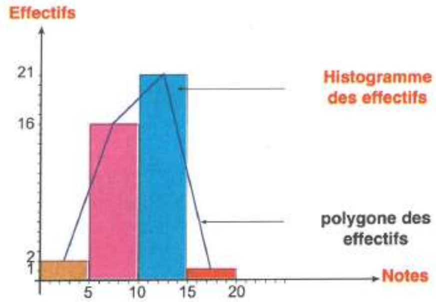
Si les tableaux statistiques nous fournissent des données numériques utiles pour avoir des informations, la traduction de ces tableaux par des représentations graphiques nous permet de présenter ces données de manière plus suggestive et de se faire une idée globale du phénomène étudié.

- Représentons la série statistique $(x_i; n_i)$ citée dans l'exemple précédent (x_i est la note et n_i le nombre d'élèves).



- Représentons la série statistique définie par les classes $(I_i; n_i)$ dans le même exemple (I_i classe de notes et n_i nombre d'élèves).

- Dans un repère orthogonal, on construit les points de coordonnées (x_i, n_i) puis on construit les segments d'extrémités les points de coordonnées $(x_i, 0)$ et (x_i, n_i) ; on obtient ainsi le diagramme en bâtons de la série statistique (x_i, n_i).
- En joignant les points de coordonnées (x_i, n_i), on obtient le polygone des effectifs.
- De même, on peut représenter le diagramme en bâtons des effectifs cumulés.



Remarque

Le polygone est la ligne brisée obtenue en joignant par des segments les milieux des bases supérieures des rectangles de l'histogramme.

Représenter les deux séries statistiques $(x_i; n_i)$ et $(I_i; n_i)$ relatives aux tailles des élèves proposées à l'application précédente.

3 Caractéristiques de position d'une série statistique

3.1 - Le mode

Définition Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

Exemples

- Dans le cas de la série statistique précédente relative aux notes des élèves, le mode est la note 10 qui a le plus grand effectif, à savoir 7.
- En ce qui concerne la série $(I_i; n_i)$ associée aux classes de notes dans le même exemple, la classe modale est [10; 15[qui a le plus grand effectif, à savoir 21.

- Le mode est la note obtenue par le plus grand nombre d'élèves.

3.2 - La médiane

Définition On considère une série statistique dont les valeurs du caractère sont rangés par ordre croissants.
Toute valeur M du caractère qui partage l'effectif total en deux parties de même effectif et appelée médiane de la série statistique.

Exemples

Considérons la série statistique

Caractère	4	5	7	8	8,5	9	10	11
effectif	2	1	3	1	2	2	3	1

Noter que : 4 - 4 - 5 - 7 - 7 - 7 - 8 - 8,5 - 8,5 - 9 - 9 - 10 - 10 - 10 - 11
somme des effectifs 7 médiane M somme des effectifs 7

Remarquer que l'effectif de toute valeur inférieure (et supérieure) à M ne dépasse pas la moitié de l'effectif total.

■ On considère la série statistique :

Caractère	4	6	6,5	7	8	10	11	12
effectif	1	2	1	1	1	3	2	1

Noter que : 4 - 6 - 6 - 6,5 - 7 - 8 - 10 - 10 - 10 - 11 - 11 - 12

somme des effectifs 6 — médiane M — somme des effectifs 6

Dans ce cas tout nombre M compris entre 8 et 10 est une médiane de cette série statistique. On prend, par exemple, le centre de l'intervalle [8, 10[c'est-à-dire 9.

Propriété La plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total est une médiane de la série statistique.

Exemple et application

■ Le tableau statistique suivant se rapporte au nombre d'enfants dans certaines familles :

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5
Nombre de familles	50	35	15	10	10

Déterminons la médiane de cette série statistique.
On dresse d'abord le tableau des effectifs cumulés.

Nombre d'enfants x_i	1	2	3	4	5
Nombre de familles - Effectif n_i	50	35	15	10	10
Effectif cumulé	50	85	100	110	120

L'effectif total est N = 120 ; sa moitié est $\frac{N}{2} = 60$.
La plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieure ou égal à la moitié de l'effectif total (c'est-à-dire à 60) est 2. Donc M = 2 est la médiane.

■ Déterminer la valeur médiane de la série statistique suivante :

Classes	[140; 150[	[150; 160[	[160; 170[	[170; 180[	[180; 190[
Effectifs	4	7	11	8	5

Construire l'histogramme des effectifs cumulés puis déterminer la médiane graphiquement.

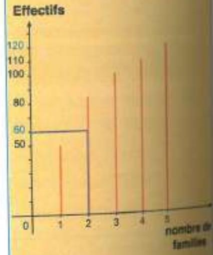
3.3 - La moyenne arithmétique

Définition Soit $(x_i; n_i)$ une série statistique $(1 \le i \le p)$ d'effectif total N. La moyenne arithmétique de cette série statistique est le nombre :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + ... + n_p \times x_p}{N}$$

· **Remarquer que dans l'exemple précédent, l'effectif total est impair tandis que dans cet exemple, l'effectif total est pair.**

· **Remarquer graphiquement comment on reconnait la médiane en utilisant le diagramme en bâtons des effectifs cumulés**



Remarque : Dans le cas d'une série statistique $(I_i; n_i)$ définie par les classes $I_i = [a_i; a_{i+1}[$, on applique la même formule, mais x_i représente le centre de la classe I_i c'est-à-dire : $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$

Exemples et applications

■ Soit la série statistique :

caractère	2	7	4	10	11
effectif	3	2	10	25	12

L'effectif total est : N = 3 + 2 + 10 + 25 + 12 = 52.
La moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{2\times3+7\times2+4\times10+10\times25+11\times12}{52} = \frac{442}{52} = 8,5$$

■ Soit la série statistique :

Classes	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[
Effectifs	2	1	3	4

L'effectif total est : N = 2 + 1 + 3 + 4 = 10.
Les centres des classes sont 1,5 ; 2,5 ; 3,5 et 4,5.
La moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{1,5\times2+2,5\times1+3,5\times3+4,5\times4}{10} = 3,4$$

■ Le diagramme circulaire ci-contre représente les catégories d'élèves d'une classe selon la note S obtenue dans l'un des devoirs du contrôle continu.
Calculer de deux façons différentes la moyenne des notes de cette classe sachant qu'elle est composée de 40 élèves.

4 Caractéristiques de dispersion d'une série statistique

4.1 - Ecart moyen, variance et écart type

Définitions Soit (x_i, n_i) une série statistique d'effectif total N, de moyenne arithmétique $\bar{x}$ $(1 \le i \le p)$.

· **L'écart moyen** de cette série statistique est le nombre e tel que :

$$e = \frac{n_1|x_1-\bar{x}| + n_2|x_2-\bar{x}| + ... + n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$$

· **La variance** de la série statistique est le nombre positif V tel que :

$$V = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + ... + n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$$

· **L'écart type** de cette série statistique est le nombre positif σ tel que $\sigma = \sqrt{V}$.

Noter que :

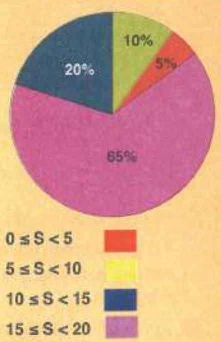
$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + ... + \frac{n_p}{N} x_p$$

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p$$

où f_i est la fréquence de la valeur x_i.

diagramme circulaire



· **Dans le cas d'une série statistique répartie en classes $(I_i; n_i)$,**
On prend x_i égal au centre de I_i.
· **Ces caractéristiques permettent de mesurer la dispersion des valeurs x_i autour de la moyenne $\bar{x}$.**
· **e et la moyenne de la série**

$$\left(|x_i-\bar{x}|; n_i\right)$$

· **V est la moyenne de la série**

$$\left((x_i-\bar{x})^2; n_i\right)$$

11 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et application

- Le tableau suivant donne les notes obtenues par 10 élèves en langue française et en mathématiques.

Notes de français	14	11	10	9	9	10	11	7	13	11
Notes de mathématiques	8	11	13	7	12	12	6	13	7	16

Etudions la dispersion des notes de chaque matière autour de la moyenne.

- Vérifier que la moyenne de chacune des matières vaut $\overline{x}=10,5$.
- Calculons l'écart moyen de chacune des séries statistiques constituées des notes de chacune des deux matières.

Français

x_i	n_i	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i-\overline{x}\rvert$
7	1	3,5	3,5
9	2	1,5	3
10	2	0,5	1
11	3	0,5	1,5
13	1	2,5	2,5
14	1	3,5	3,5

Mathématiques

x_i	n_i	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i-\overline{x}\rvert$
6	1	4,5	4,5
7	2	3,5	7
8	1	2,5	2,5
11	1	0,5	0,5
12	2	1,5	3
13	2	2,5	5
16	1	5,5	5,5

L'écart moyen du français est : $e_F=\frac{3,5+3+1+1,5+2,5+3,5}{10}=1,5$

L'écart moyen des mathématiques est : $e_M=\frac{4,5+7+2,5+0,5+3+5+5,5}{10}=2,8$

Les deux séries ont la même moyenne ; cependant $e_M > e_F$.

Ce qui signifie que les notes de mathématiques sont plus dispersées autour de la moyenne tandis que celles du français sont relativement concentrées autour de la moyenne.

- Vérifier que la variance du français est $V_F = 3,65$, que son écart type est $\sigma_F \simeq 1,9$ et que la variance des mathématiques est $V_M = 9,85$, que sont écart type est $\sigma_M \simeq 3,1$.

4.2 - Autre formule de la variance

Propriété La variance de la série statistique (x_i, n_i) $(1 \le i \le p)$ d'effectif total N et de moyenne arithmétique $\overline{x}$ est :

$$V=\frac{1}{N}\left(n_1x_1^2+n_2x_2^2+......n_px_p^2\right)-\overline{x}^2$$

Les études statistiques utilisent souvent les deux intervalles $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$ et $[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma]$ comme critères techniques permettant d'émettre un jugement sur le caractère et la dispersion de ses valeurs autour la moyenne. A cet effet, on détermine le pourcentage des valeurs du caractère se trouvant dans l'un des intervalles précités. Par exemple, pour la série statistique des notes du français, on a :

$[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]=[8,6;12,4]$

cet intervalle comporte 7 notes sur 10 c'est-à-dire 70 % de l'effectif total.

11 POINTS ESSENTIELS

1 Série statistique : Effectif et effectif cumulé - Fréquence et fréquence cumulée - Pourcentage

On considère une série statistique discrète $(x_i; n_i)$ ou continue $(I_i; n_i)$ exprimée en classes $I_i = [a_i; a_{i+1}[$ où $1 \le i \le p$.

- Le nombre n_i est **l'effectif** de la valeur x_i du caractère étudié ou l'effectif de la classe I_i.
- **L'effectif cumulé** de la valeur x_i ou de la classe I_i est $N_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$
- La **fréquence** de la valeur x_i ou de la classe I_i est : $f_i=\frac{n_i}{N}$

 où N est **l'effectif total** : $N = n_1 + n_2 + ... + n_p$
- La **fréquence cumulée** de la valeur x_i ou de la classe I_i est : $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$
- Le **pourcentage** de la valeur x_i ou de la classe I_i est : $p_i = 100 \times f_i$

2 Caractéristiques de position d'une série statistique

- Le **mode** d'une série statistique est toute valeur du caractère ou toute classe (du caractère) qui a le **plus grand effectif**.
- La **médiane** d'une série statistique est toute valeur M telle que la moitié de l'effectif total a une valeur de caractère inférieure à M et l'autre moitié de l'effectif a une valeur de caractère supérieure à M.

La plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total est une médiane de la série statistique.

- La **moyenne arithmétique** d'une série statistique $(x_i; n_i)$ $(1 \le i \le p)$ est le nombre :

$$\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_px_p}{N}$$

Si la série est exprimée en classes I_i, alors x_i est le centre de la classe I_i.

3 Caractéristiques de dispersion d'une série statistique

- **L'écart moyen** : $e=\frac{n_1\lvert x_1-\overline{x}\rvert+...+n_p\lvert x_p-\overline{x}\rvert}{N}$
- **La variance** : $V=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+...+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}$

On a aussi $V=\frac{n_1x_1^2+...+n_px_p^2}{N}-\overline{x}^2$

- **L'écart type** : $\sigma=\sqrt{V}$

11 EXERCICES RESOLUS

Une machine produit des tiges métalliques de 25 mm de diamètre.

Afin de contrôler la production de la machine, on a effectué une étude statistique sur un échantillon de 100 tiges choisies au hasard.

Les résultats obtenus sur les mesures des diamètres (en mm) sont consignés dans le tableau suivant :

Classe du diamètre	Effectif
[24,2 ; 24,4 [	5
[24,4 ; 24,6 [	14
[24,6 ; 24,8 [	23
[24,8 ; 25 [	19
[25 ; 25,2 [	15
[25,2 ; 25,4 [	10
[25,4 ; 25,6 [	9
[25,6 ; 25,8 [	5

Commentaire

Des experts du contrôle de la qualité de production déclarent que : la production est bonne si les critères suivants sont satisfaits :

- La moyenne $\bar{x}$ apparient à l'intervalle [24, 9 ; 25, 1].
- L'écart type σ est inférieur strictement à 0,4.
- 95 % au moins des diamètres appartiennent à l'intervalle

$$\left[\bar{x}-2\sigma ; \bar{x}+2\sigma\right]$$

Question : La production de cette machine peut-elle être considéré comme bonne ?

Utilisons le tableau suivant pour calculer $\bar{x}$ et la variance V :

x_i centres de classes	Effectif n_i	$n_i\ x_i$	$n_i\ x_i^2$
24,3	5	121,5	2952,45
24,5	14	343	8403,50
24,7	23	568,1	14032,07
24,9	19	473,1	11780,19
25,1	15	376,5	9450,15
25,3	10	253	6400,90
25,5	9	229,5	5852,25
25,7	5	128,5	3302,45
Total	N = 100	S = 2493,2	C = 62173,96

On a : $\bar{x}=\dfrac{S}{100}=24,932$

$$V=\frac{C}{100}-\bar{x}^2=621,7396-(24,932)^2$$

$$V=0,134976$$

$$\sigma=\sqrt{V}\simeq 0,3673908$$

On prend des valeurs approchées à 10^{-2} près c'est-à-dire :

$$\bar{x}=24,93\,\text{mm} \quad \text{et} \quad \sigma=0,37\,\text{mm}$$

Les critères de qualité sont-ils réalisés ?

- On a : $24,93\in\left[24,9;25,1\right]$

  et $\sigma \langle 0,4$

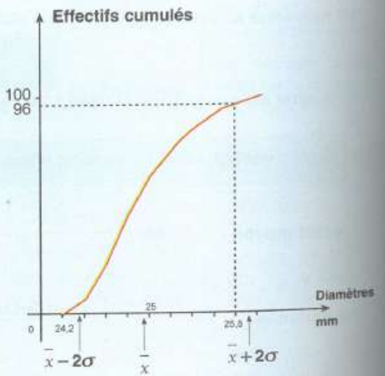
- L'intervalle $\left[\bar{x}-2\sigma , \bar{x}+2\sigma\right]$ qui est [24, 19 ; 25, 67] contient l'intervalle [24, 20 ; 25, 66]

  (car $\bar{x}+2\sigma>25,66$ et $\bar{x}-2\sigma<24,20$)

  et ce dernier contient 96 diamètres c'est-à-dire 96 % des diamètres appartiennent à l'intervalle [24,20 ; 25,66]

  Donc **la production de la machine est bonne**.

Remarque : On peut déterminer le nombre de tiges dont les diamètres appartiennent à cet intervalle en utilisant le polygone des effectifs cumulés croissants.



L'effectif correspondant à 24,2 est 0 et l'effectif correspondant à 25,66 est 96.

Donc entre 24,20 et 25,66, il y a 96 tiges de diamètre compris entre ces deux valeurs.

11 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Tableaux statistique - Représentations graphiques

1 La liste suivante représente les notes obtenues par 40 élèves en mathématiques dans une classe.

5,5	8	11	20	10,5	15	9,5	11	10	11
13,5	13,5	15	17	6	8	15	12	13,5	7
10,5	19	11	19	13	13,5	11,5	17	10	12
12	16	9,5	17	10,5	11	13,5	9,5	12	7

1) Déterminer la population statistique et le caractère étudié. Ce caractère est-il qualitatif ou quantitatif ? Est-il continu ou discret ?
2) Dresser un tableau statistique des effectifs et des effectifs cumulés de cette série statistique.
3) Représenter graphiquement les effectifs par un diagramme en bâtons, et les effectifs cumulés par un polygone.
4) Grouper ces notes par intervalles dont chacun a une amplitude de 3 à partir de l'intervalle [5; 8[. Construire l'histogramme de la série statistique obtenue.

2 Le tableau statistique suivant donne des renseignements à propos des tailles d'un échantillon de personnes.

Taille en cm	$140 \leq T < 150$	$150 \leq T < 160$	$160 \leq T < 170$	$170 \leq T < 180$	$180 \leq T < 190$
Effectif	4	7	11	8	5

1) Quelle est la population statistique ? Quel est le caractère ? Est-il qualitatif ou quantitatif ? Est-il discret ou continu ?
2) Représenter cette série statistique par un histogramme et tracer le polygone des effectifs.
3) Dresser le tableau des effectifs cumulés.
   Quel est le nombre de personnes dont la taille est inférieure à 160 cm ?
4) Dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées. Déterminer alors le nombre de personnes de taille inférieure à 160 cm.

3 Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'un lycée selon les sections :

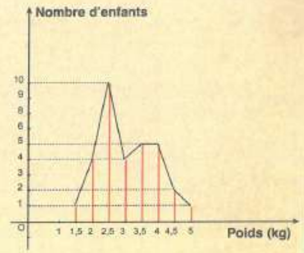
Section	Lettres modernes	Sciences expérimentales	Sciences économiques	Sciences mathématiques	Sections techniques
Nombre d'élèves	202	152	120	70	56

1) Quelle est la population statistique ? Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?
2) Représenter cette série statistique par un histogramme et par un diagramme circulaire mettant les pourcentages en évidence.

Lecture des représentations graphiques et extraction des données

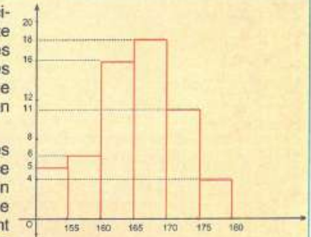
4 Ce graphique représente les renseignements à propos des poids des nouveau-nés dans un hôpital.

1) Recopier les données du graphique dans un tableau statistique.
2) Déterminer les effectifs, les effectifs cumulés, les fréquences et les pourcentages.



5 Le graphique ci-contre représente des données relatives aux tailles d'un échantillon de personnes lors d'un sondage.

1) Recopier les données de ce graphique sur un tableau statistique en mettant en évidence les effectifs et les effectifs cumulés.
2) Déterminer les pourcentages de cette série statistique et les représenter par un diagramme circulaire.



Caractéristiques de position d'une série statistique

6 On considère le relevé suivant qui fournit les données concernant la durée, en minutes, qu'il faut pour un ensemble de 20 élèves pour aller de leurs domiciles à l'établissement.

15 - 10 - 15 - 20 - 10 - 25 - 20 - 15 - 10 - 5
15 - 15 - 5 - 15 - 25 - 10 - 20 - 15 - 15 - 20

1) Former un tableau des effectifs et représenter le diagramme en bâtons des effectifs.
2) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne arithmétique de cette série statistique.

7 La liste suivante donne le nombre d'années passées par un nombre d'élève au collège avant de rejoindre l'enseignement secondaire qualifiant.

3 - 5 - 4 - 4 - 5 - 3 - 3 - 4 - 3 - 3 - 5 - 4 - 4 - 3 - 4 - 4 - 3 - 5 - 4 - 4 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 4 - 3 - 5 - 4 - 3 - 4 - 3 - 5 - 4 - 3 - 3 - 5 - 4 - 3 - 3

1) Dresser un tableau statistique des effectifs.
   Représenter cette série statistique par un diagramme en bâtons.
2) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne arithmétique de cette série statistique.

8 La direction de la météorologie a enregistré les températures quotidiennes dans une ville pendant le mois de décembre.

Voici la répartition de ces températures :

Températures	0	1	3	5	8	10	15
Nombre de jours	2	4	9	5	8	2	1

1) Déterminer la température médiane.
2) Déterminer la température moyenne pendant le mois de décembre dans cette ville.

9 Le tableau suivant donne la répartition de 30 jeunes adhérents à un club selon leurs âges :

Age	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[
Nombre de jeunes	10	4	11	7

1) Représenter graphiquement cette série statistique.
2) Calculer la moyenne des âges de ces jeunes.
3) Déterminer l'âge médian de ces jeunes.

Caractéristiques de dispersion d'une série statistique

10 Le tableau suivant donne le nombre d'accidents de la circulation par jour dans une ville donnée pendant 50 jours.

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Nombre de jours	20	19	7	3	2

Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

11 Le tableau suivant donne la répartition des montants (en DH) déposés dans une banque par 100 clients :

Montant déposé (en DH)	1000	2000	3000	5000	10000
Nombre de clients	15	25	30	10	20

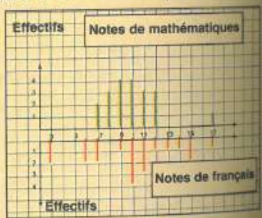
1) Calculer le mode, la médiane et la moyenne arithmétique de cette série statistique.
2) Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série.

12 Le tableau suivant donne les notes de 8 élèves, dans une classe, en langue arabe et en anglais.

Noms des élèves	Notes d'arabe	Notes d'anglais
Omar	16	10
Khalid	3	12
Zineb	10	9
Omaïma	15	10
Mohamed	6	11
Kawtar	14	12
Basma	7	12
Ahmed	17	12

1) Calculer la moyenne des notes de chaque matière.
2) Représenter graphiquement par un diagramme en bâtons les notes de chaque matière.
3) Calculer les caractéristiques de dispersion de chacune de ces deux séries statistiques.
4) Quelles sont les notes les moins dispersées autour de la moyenne ?

13 Les deux graphiques ci-contre représentent les notes de 20 élèves en langue française et en mathématiques.



1) Recopier les données des deux graphiques dans un tableau statistique.
2) Calculer la moyenne des notes de chaque matière.
3) Calculer les caractéristiques de dispersion de chacune de ces deux séries statistiques.
4) Quelle est la série la plus dispersée autour de la moyenne ?

Exercices de renforcement des apprentissages

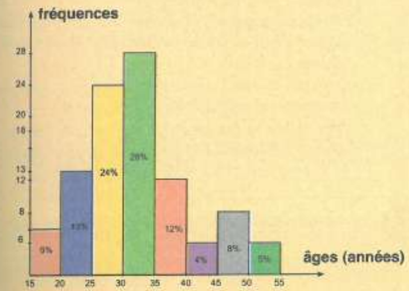
14 Les données suivantes concernent les poids (en kg) de 25 enfants :

31 - 48 - 40 - 45 - 46 - 34 - 42 - 40 - 35 - 48 - 45 - 42 - 52 - 44 - 49 - 45 - 42 - 48 - 37 - 39,5 - 54,5 - 40 - 35 - 40 - 31.

1) Former un tableau statistique des effectifs et des effectifs cumulés de cette série statistique.
2) Calculer la moyenne arithmétique de cette série statistique.
3) a) Grouper ces poids par intervalles d'amplitude 5 (chacun) à partir de [30; 35[, puis dresser un tableau statistique pour la série obtenue.
   b) Calculer la moyenne arithmétique de la dernière série statistique.

Représenter cette série par un histogramme.

15



Le graphique ce-dessus représente la répartition des lecteurs d'une revue selon leurs âges. Le sondage a été effectué sur un échantillon de 200 personnes.

1) Former un tableau statistique composé de classes, leurs centres et les effectifs correspondants.
2) Déterminer la classe modale et la classe médiane de cette série statistique.
3) Calculer la moyenne d'âge des lecteurs de cette revue.

16 Le tableau suivant présente des données relatives aux accidents de la circulation enregistrés pendant chaque mois dans l'un des périmètres urbains.

Mois	Nombre d'accidents
Janvier	20
Février	25
Mars	45
Avril	50
Mai	15
Juin	10
Juillet	35
Août	40
Septembre	10
Octobre	55
Novembre	45
Décembre	30

1) Calculer la moyenne mensuelle des accidents de la circulation dans ce périmètre urbain.
2) Représenter graphiqement cette série statistique.
3) Déterminer les pourcentages de cette série statistique et les représenter par un diagramme circulaire.

17 Les élèves d'un tronc commun scientifique ont obtenu les notes suivantes dans l'un des devoirs de mathématiques :

7 - 8 - 10 - 12 - 9 - 7 - 15 - 10 - 8 - 12 - 7 - 12 - 11 - 14 - 15 - 12 - 8 - 15 - 7 - 10 - 8 - 14 - 11 - 10 - 12 - 13 - 13 - 14 - 8 - 12 - 10 - 9 - 14 - 13 - 11 - 7 - 8 - 10 - 10 - 9

1) Former un tableau statistique faisant apparaître les effectifs, les fréquences et les pourcentages.
2) Représenter par un diagramme en bâtons et par un polygone statistique cette série statistique.
3) Calculer le mode, la médiane et la moyenne des notes des élèves de cette classe.

18 Ce tableau donne les poids de 160 nouveau-nés.

Poids en kg	Nombre d'enfants
De 2,2 à moins de 2,5	5
De 2,5 à moins de 2,8	10
De 2,8 à moins de 3,1	24
De 3,1 à moins de 3,4	40
De 3,4 à moins de 3,7	42
De 3,7 à moins de 4	20
De 4 à moins de 4,3	13
De 4,3 à moins de 4,6	6

1) Construire le polygone des effectifs cumulés.
2) Calculer les caractéristiques de position de cette série statistique.
3) Calculer les caractéristiques de dispersion de cette série statistique.

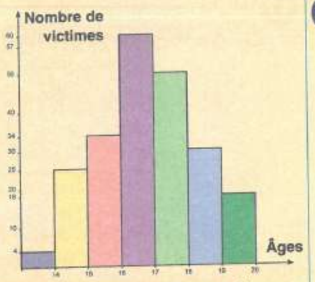
Exercices de synthèse

19 Le tableau suivant nous renseigne sur le nombre de visiteurs à un magasin de confection pendant les jours de la semaine. Ce tableau est incomplet :

Jours	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Effectif (nombre de visiteurs)	10	...	35	...	...	...	...
Effectif cumulé	...	28	...	...	...	156	200
Fréquence (%)	...	...	...	8,5	...	...	...
Fréquence cumulée	...	...	...	...	47	...	...

1) Compléter les données de ce tableau.
2) Calculer la moyenne des visiteurs par jour.

20 Le graphique statistique ci-contre représente le nombre de victimes parmi les cyclistes et les motocyclistes, dans une ville, réparties selon leurs âges.
(Les données sont recueillies en un an).



1) Quel est le nombre de victimes dont l'âge ne dépasse pas 16 ans ?
2) Quel est le nombre de victimes dont l'âge est supérieur ou égal à 17 ?
3) Quel est le nombre de victimes durant toute l'année ? Quelle est la moyenne d'âge de ces victimes ?
4) Quel est le pourcentage des victimes d'âge inférieur à 17 ?

21 Les notes de Hassan et Ali en sciences physiques pendant une année scolaire se répartissent de la façon suivante :

Notes		12	14	15	16	17	18
Nombre de devoirs	Ali	3	1	1	1	3	13
	Hassan	0	2	6	2	0	0

1) Vérifier que Hassan et Ali ont la même moyenne $\overline{x}$.
2) Dresser un tableau de la forme suivante pour chaque élève.

Effectif n_i	Note x_i	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
⋮	⋮	⋮	⋮

3) Calculer l'écart moyen pour chaque élève et les comparer. Quelles sont les notes les moins dispersées ? Est-ce celles de Hassan ou d'Ali.

22 Le relevé suivant donne la durée de validité de deux types L_1 et L_2 de lampes :

Type L_1	Durée x_i (en h)	400	600	800	1000	1200
	Effectif n_i	1	2	3	2	1

Type L_1	Durée x_i (en h)	780	790	800	810	820
	Effectif n_i	1	2	3	2	1

1) Calculer la moyenne arithmétique de chaque série.
2) Calculer l'écart moyen de chaque série statistique.
3) Déterminer le type de lampes le plus homogène ?

23 Un technicien en électricité a examiné 500 lampes électriques pour déterminer leurs durées de validité. Il obtient les résultats du tableau ci-contre :

Durée de validité en heures	Nombre de lampes
[300; 400[	65
[400; 500[	70
[500; 600[	120
[600; 700[	45
[700; 800[	20
[800; 900[	100
[900; 1000[	80

1) Construire l'histogramme et le polygone des effectifs de cette série.
2) Dresser le tableau des pourcentages et déterminer le pourcentage des lampes dont la durée de validité ne dépasse pas 700 heures.
3) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ de cette série statistique et calculer son écart type σ.
4) Déterminer le pourcentage de lampes dont la durée de validité appartient à chacun des deux intervalles :
$$[\overline{x}-2\sigma\,;\overline{x}+2\sigma] \text{ et } [\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$$

24 Le tableau suivant donne la répartition des tailles (en cm) d'un ensemble d'élèves :

Classe	[80; 90[	[90; 100[	[100; 110[	[110; 120[	[120; 130[	[130; 150[
Effectif	4	5	12	20	15	10

1) Construire l'histogramme de cette série statistique.
2) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne arithmétique $\overline{x}$ de la série statistique.
3) Calculer l'écart type σ de la série.
4) Déterminer le pourcentage des élèves dont la taille est comprise entre $\overline{x}-\sigma$ et $\overline{x}+\sigma$.

25 Une machine produit des boules de fer sphérique de diamètre théorique 24 mm.
Afin de contrôler la production de l'appareil, on a effectué une étude sur 100 boules.
Cette étude aboutit aux résultats consignés dans le tableau ci-contre.

Classe (diamètre)	Effectif
[23 ; 23,2[	0
[23,2 ; 23,4[	6
[23,4 ; 23,6[	10
[23,6 ; 23,8[	25
[23,8 ; 24[	20
[24 ; 24,2[	12
[24,2 ; 24,4[	12
[24,4 ; 24,6[	8
[24,6 ; 24,8[	5
[24,8 ; 25[	2

1) Construire l'histogramme de cette série statistique.
2) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ et l'écart type σ.
3) On considère que la production est bonne si les critères suivants sont réalisés :
- $\overline{x} \in [23,9\,;24,1]$ et $\sigma < 0,4$.
- 90 % des diamètres appartiennent à $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$.

La machine satisfait-elle les critères de qualité ?

Transformations usuelles

12

Capacités attendues

- Utilisation de la translation, de l'homothétie et de la symétrie dans la résolution de problèmes géométriques.
- Reconnaître l'isométrie et la similitude de figures. Utiliser la translation, l'homothétie et la symétrie.

Contenu

Activités préparatoires
- Symétrie axiale
- Alignement de points
- Symétrie centrale
- Conservation de l'aire
- Translation
- Homothétie
- Droite d'Euler

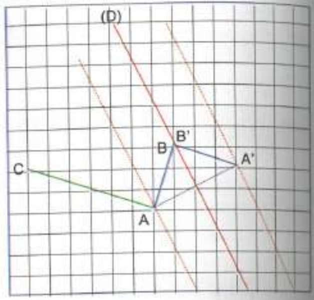
Définitions et règles
- Symétrie axiale - symétrie centrale - translation
- Homothétie

Points essentiels

Exercices résolus

Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 Symétrie axiale



Recopier la figure ci-contre.

L'image du point A par la symétrie axiale $S_{(D)}$ d'axe (D) est le point A′ tel que (D) soit la médiatrice du segment [AA′].

Le point B appartient à la droite (D) ; donc le point B′ image de B par la symétrie axiale $S_{(D)}$ est confondu avec B ; donc B′ = B.

1) Déterminer la nature du triangle AA′B. En déduire que AB = A′B′.

2) Construire le point C′ image de C par la symétrie axiale $S_{(D)}$.

Les droites parallèles à la droite (D) passant par A et A′ coupent la droite (CC′) respectivement en H et H′.

a) Déterminer la nature du quadrilatère AA′H′H. En déduire que H′est l'image de H par la symétrie axiale $S_{(D)}$.

b) Montrer que A′H′ = AH et C′H′ = CH.

Que peut-on dire des deux triangles AHC et A′H′C′ ? En déduire que : A′C′ = AC.

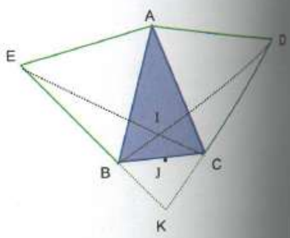
3) Soit E un point du plan et soit E′ son image par la symétrie axiale $S_{(D)}$.

Montrer que : $\widehat{C'A'E'} = \widehat{CAE}$

La symétrie axiale conserve la distance c'est-à-dire : A'B' = AB

La symétrie axiale conserve la mesure des angles géométriques c'est-à-dire : $\widehat{C'A'E'} = \widehat{CAE}$

ACTIVITE 2 Alignement de points



Soient ABC un triangle isocèle en A, et J le milieu du segment [BC].

A l'extérieur du triangle ABC, on construit deux triangles équilatéraux ACD et ABE.

Les droites (BD) et (CE) se coupent en un point I.

Les droites (BE) et (CD) se coupent en un point K.

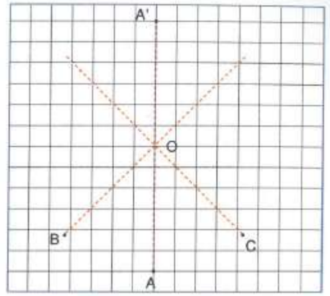
1) Montrer que la droite (AJ) est un axe de symétrie du triangle ABC.

2) a) Montrer que [AJ) est une bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$.

b) En déduire que la droite (AJ) est la médiatrice du segment [DE].

3) En utilisant la symétrie axiale $S_{(AJ)}$, montrer que les points A, I, J et K sont alignés.

ACTIVITE 3 Symétrie centrale



Recopier la figure ci-contre.

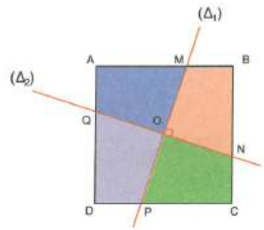
L'image du point A par la symétrie centrale S_O est le point A′ tel que O soit le milieu de [AA′].

1) Construire B′ image du point B par la symétrie centrale S_O.
Déterminer la nature du quadrilatère ABA′B′.
En déduire que : AB = A′B′ (1)

2) On remarque que A′ est défini par la relation $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.
Définir de même le point B′ et prouver que $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.
Vérifier de nouveau l'égalité (1).

3) Construire C′ l'image du point C par la symétrie centrale S_O.
Montrer que : $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

ACTIVITE 4 Conservation de l'aire



Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = a (où a > 0)

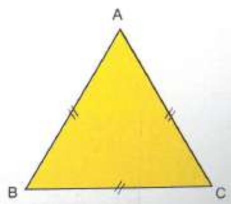
Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites perpendiculaires en O et coupant les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] en M, N, P et Q (voir figure).

1) Montrer que les quadrilatères OMAQ et ONCP sont symétriques par rapport au point O.

2) Montrer que les quadrilatères OQDP et OMBN sont symétriques par rapport au point O.

3) En déduire que les quadrilatères OMAQ, OMBN, ONCP, OQDP ont la même aire et calculer l'aire du quadrilatère OMAQ en fonction de a.

ACTIVITE 5 Translation



Soit ABC un triangle équilatéral.

1) Construire le point D image de B par la translation t_1 de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2) Construire les points E, F, G images respectives des points A, C, D par la translation t_2 de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

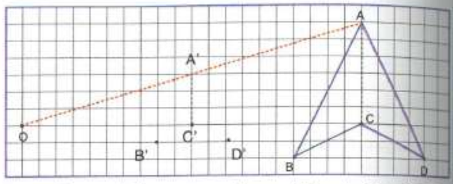
3) a) Montrer que les points B, D, G, E et F appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$) de centre C et qui passe par A.

b) Montrer que l'hexagone ABDGFE est régulier.

12 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 6 Homothétie

Soit (T) une représentation du quadrilatère ABCD (voir figure).



1) Construire ce dessin sur du papier quadrillé.
Soit (T′) une représentation de (T) à l'échelle de $\frac{1}{2}$:
A′, B′, C′ et D′ sont les images respectives de A, B, C et D.
Représenter les deux A′ et C′ comme sur la figure de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ soient colinéaires de même sens et déterminent respectivement deux axes de symétrie de (T) et (T′) ;
puis construire avec précision les droites (AA′), (BB′), (CC′) et (DD′).

2) Montrer qu'il existe un réel k que l'on déterminera tel que $\overrightarrow{A'C'}=k\overrightarrow{AC}$.
On suppose que tout côté dans (T) est parallèle au côté homologue dans (T′) c'est-à-dire : (A′C′) // (AC) et (A′B′) // (AB).
Montrer les deux égalités vectorielles : $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{BC}$

3) Soit O le symétrique de A par rapport au point A′.
a) Montrer que : $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$.
En déduire que $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$.
Que peut-on en déduire pour les points O, B et B′ ?
b) Montrer que les droites (AA′), (BB′), (CC′) et (DD′) sont concourantes en O.
En déduire que A′ est l'unique point tel que : $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$ et que B′ est l'unique point tel que : $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$.
Définir de même les points C′ et D′.

La transformation qui transforme les points A, B, C et D respectivement en A′, B′, C′ et D′ est appelée homothétie de centre O et de rapport k.

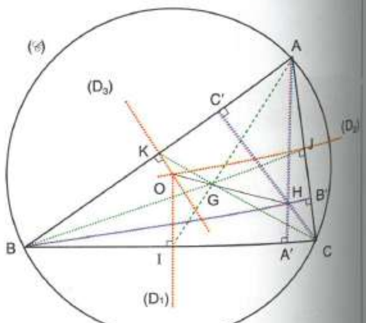
L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à cette droite.

ACTIVITE 7 Droite d'Euler

Soient ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

On sait que :

- Les médianes (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes au point G centre de gravité du triangle ABC.
- Les médiatrices (D_1), (D_2) et (D_3) des segments [BC], (AC] et [AB] (respectivement) sont concourantes au point O centre du cercle (𝒞) circonscrit au triangle ABC.

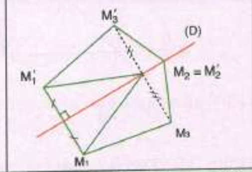
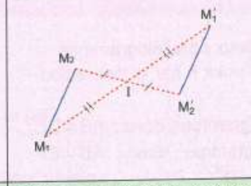
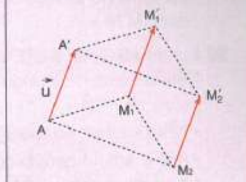
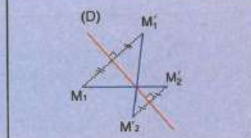
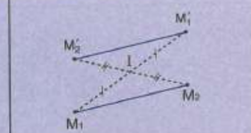
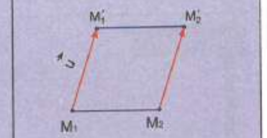
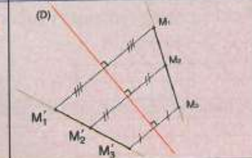
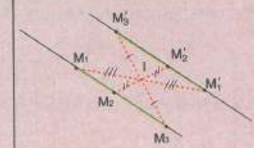
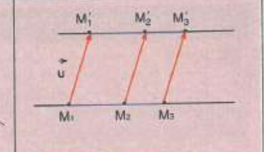
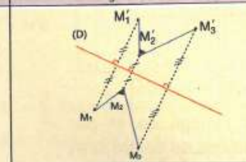
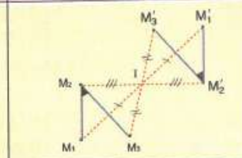
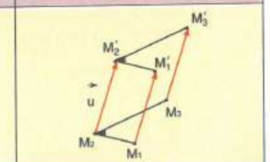
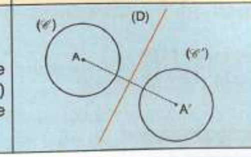
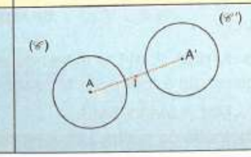
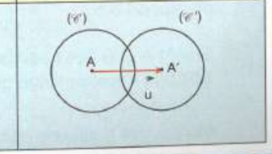


Soit h l'homothétie de centre G et de rapport –2.

1) Déterminer les images des points A, B, C par l'homothétie h.
2) a) Montrer que l'image de la droite (D_1) par l'homothétie h est la hauteur (AA′) du triangle ABC.
b) Déterminer les images de deux droites (D_2) et (D_3) par l'homothétie h.
3) En déduire que les hauteurs (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes au point H orthocentre de ABC.
4) Montrer que les point O, G et H sont alignés et que : $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$

12 DEFINITIONS ET REGLES

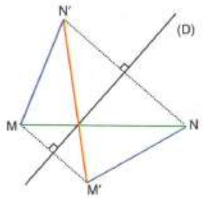
1 Symétrie axiale - Symétrie centrale - Translation

Transformation	La symétrie axiale	La symétrie centrale	La translation
Configuration	Symétrie axiale $S_{(D)}$ d'axe la droite (D) 	Symétrie centrale S_I de centre I. 	Translation t de vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$ 
Définition	M′ image de M par la symétrie axiale $S_{(D)}$ est définie par : • Si M ∈ (D), alors M′ = M • Si M ∉ (D), alors (D) est la médiatrice du segment [MM′]	M′ image de M par la symétrie centrale S_I est définie par : $\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$ ou I est le milieu du segment [MM′]	M′ image de M par la translation t de vecteur $\vec{u}$ est définie par : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
Conservation de la distance $M'_1M'_2=M_1M_2$			
Conservation du coefficient de colinéarité Si $\overrightarrow{M_1M_3}=k\overrightarrow{M_1M_2}$ alors $\overrightarrow{M'_1M'_3}=k\overrightarrow{M'_1M'_2}$			
Conservation de la mesure d'un angle géométrique $\widehat{M'_1M'_2M'_3}=\widehat{M_1M_2M_3}$			
Image d'un cercle L'image d'un cercle (𝒞) de centre A et de rayon R est (𝒞′) le cercle de centre A′ et de même rayon R.			

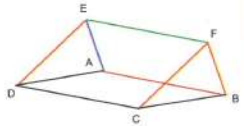
12 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples

- Soient (D) une droite, M et N deux points n'appartenant pas à (D) tels que MN = 5.
  Soient M′ et N′ les images respectives de M et N par la symétrie axiale $S_{(D)}$.
  - On a (MM′) ⊥ (D) et (NN′) ⊥ (D) ;
    donc (MM′) // (NN′)
  - La symétrie axiale conserve la distance, or MN = 5
    donc M′N′ = 5



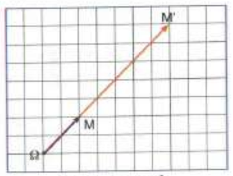
- Soient ABCD et ABFE deux parallélogrammes.
  Déterminons l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{ED}$.
  - ABCD est un parallélogramme ; donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
  - ABFE est un parallélogramme ; donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$.
  - Il en découle que : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}$.
    Ce qui signifie que EFCD est un parallélogramme ;
    donc : $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$.
    Ainsi C est l'image de F par la translations de vecteur $\overrightarrow{ED}$.



2 Homothétie

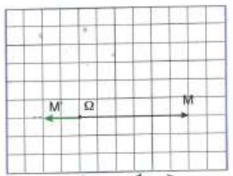
Définition Soient Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est la transformation plane qui à tout point M du plan associe le point M′ défini par : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$
On écrit h(M) = M′.

Exemples et application



$\overrightarrow{\Omega M'}=3,5\overrightarrow{\Omega M}$

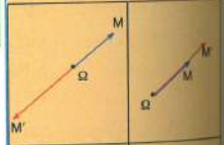
M′ est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport 3,5.



$\overrightarrow{\Omega M'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$

M′ est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{3}$.

- Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, et I le milieu du segment [AB].
  Soit h la transformation plane qui à tout point M associe le point M′ tel que :
  $$\overrightarrow{MM'}=5\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$$
  Monter que h est une homothétie de centre I et déterminer son rapport.



$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ (k < 0)	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ (k > 0)

Les points Ω, M et M′ sont alignés.
- **Si k = 1, alors M′ = M.**
- **Si k = −1, alors Ω est le milieu du segment [MM′] c'est-à-dire que h est la symétrie centrale de centre Ω.**
- **h(Ω) = Ω.**
  Donc Ω est un point invariant par l'homothétie h.
- **Si k ≠ 1, alors l'homothétie admet un unique point invariant.**

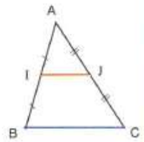
12 DEFINITIONS ET REGLES

2.1- Propriété caractéristique de l'homothétie

Propriété Soit k un nombre réel non nul et différent de 1.
Pour qu'une transformation h soit une homothétie de rapport k il faut et il suffit que quels que soient les point M et N d'images respectives M′ et N′ par h, on ait : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$.

Exemple

- Soit ABC un triangle.
  Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
  On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
  Donc I et J sont les images respectives de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
  D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, on a :
  $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; donc (IJ) // (BC).

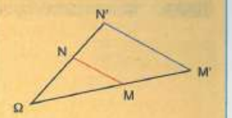


2.2- L'homothétie et la distance

Propriété 1 Soit h un homothétie de centre Ω et de rapport k.
Si M′ et N′ sont les images respectives de M et N par l'homothétie h, alors : $M'N'=|k|MN$

Exemple et application

- Soit A, B deux points distincts et M ∈ [AB].
  Soient A′, B′ et M′ les images respectives des points A, B et M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $-\frac{3}{2}$.
  Montrons que : A′M′ + M′B′ = A′B′.
  A′, B′ et M′ sont les images respectives des points A, B et M par l'homothétie h de rapport $-\frac{3}{2}$.
  Donc : $A'M'=\left|-\frac{3}{2}\right|AM$, $M'B'=\left|-\frac{3}{2}\right|MB$ et $A'B'=\left|-\frac{3}{2}\right|AB$
  c'est-à-dire : $A'M'=\frac{3}{2}AM$, $M'B'=\frac{3}{2}MB$ et $A'B'=\frac{3}{2}AB$
  On en déduit : $A'M'+M'B'=\frac{3}{2}AM+\frac{3}{2}MB=\frac{3}{2}(AM+MB)$
  Or M ∈ [AB], par conséquent AM + MB = AB.
  Donc = $A'M'+M'B'=\frac{3}{2}AB$. Comme $A'B'=\frac{3}{2}AB$, alors A′M′ + M′B′ = A′B′.
  Il s'ensuit que M′ ∈ [A′B′].
- Soient ABCD un carré et h une homothétie de centre Ω et de rapport k.
  Soient A′, B′, C′, D′ les images respectives des points A, B, C, D par l'homothétie h.
  1) Montrer que A′B′C′D′ est un carré.
  2) On pose AB = a. Calculer l'aire du carré A′B′C′D′ en fonction de a et k.



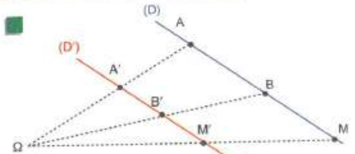
Remarque

Si A′, B′, C′ et D′ sont les images respectives des points A, B, C et D par une homothétie h, alors :
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$$
(pourvu que CD ≠ 0)

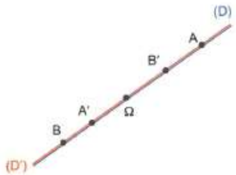
2.3- Homothétie et alignement – Image d'une droite par une homothétie

Propriété 2 Soient A, B et M trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.
Si A′, B′ et M′ sont les images respectives des points A, B et M par une homothétie, alors : $\overrightarrow{A'M'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.
- L'homothétie conserve le coefficient de colinéarité.
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.

Exemples

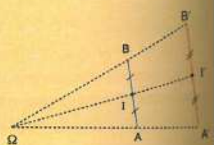


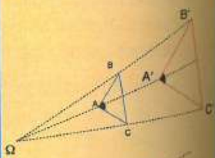
La droite (D) ne passe pas par Ω.
La droite (D′) ne passe pas par Ω.
Les droites (D) et (D′) sont strictement parallèles.

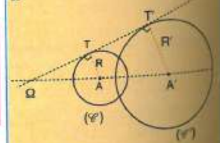


La droite (D) passe par Ω.
Les droites (D) et (D′) sont confondues.

Si A est le point d'intersection de deux droites (D) et (Δ), alors l'image de A par une homothétie h est le point d'intersection des images des droites (D) et (Δ) par l'homothétie h.







2.4- Image d'un segment par une homothétie

Propriété 3
- L'image d'un segment [AB] par une homothétie h est le segment [A′B′] où A′ et B′ sont les images respectives de A et B par l'homothétie h.
- L'image du milieu I du segment [AB] par h est le milieu du segment [A′B′].

2.5- Image d'un angle géométrique par une homothétie

Propriété 4 Si A′, B′, C′ sont les images respectives des points A, B, C par une homothétie h, alors : $\widehat{B'A'C'}=\widehat{BAC}$.
On dit que l'homothétie conserve la mesure des angles géométriques.

2.6- Image d'un cercle par une homothétie

Propriété 4 L'image d'un cercle (𝒞) de centre A et de rayon R par une homothétie h de rapport k est le cercle (𝒞′) de centre A′ et de rayon $R'=|k|R$ où A′ est l'image de A par l'homothétie H.

Exemple et application

- Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{3}{2}$.
L'image du cercle (𝒞) de centre A et de rayon 4 par l'homothétie h est le cercle (𝒞′) de centre A (car h(A) = A) et de rayon $4\times\left|-\frac{3}{2}\right|=6$.
- Déterminer le rapport d'une homothétie h de centre Ω qui transforme le cercle de centre Ω et de rayon 1 au cercle de centre Ω et de rayon 4.

Transformation T	Symétrie axiale $S_{(D)}$	Symétrie centrale S_Ω	Translation de vecteur non nul $\vec{u}$	Homothétie de centre Ω et de rapport k
Points invariants	la droite (D)	le point Ω	aucun point invariant	le point Ω
Relation (vectorielle)	(D) Médiatrice de [MM′]	$\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$
Propriété caractéristique			$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ $(k\neq1)$
Alignement	Si $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ (T conserve le coefficient de colinéarité)			
Parallélisme	Si $(\Delta_1)\,//\,(\Delta_2)$, alors $(\Delta'_1)\,//\,(\Delta'_2)$ (T conserve le parallélisme)			
Orthogonalité	Si $(\Delta_1)\perp(\Delta_2)$, alors $(\Delta'_1)\perp(\Delta'_2)$ (T conserve l'orthogonalité)			
Milieu	Si I est le milieu de [AB], alors I′ est le milieu de [A′B′] (T conserve le milieu)			
Distance	Les transformations $S_{(D)}$, S_Ω et t conservent la distance A′B′ = AB			$A'B'=\|k\|AB$
Mesure des angles géométriques	$\widehat{B'A'C'}=\widehat{BAC}$ (T conserve la mesure des angles géométriques)			
Intersection de deux figures	Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux figures sécantes. Si $A\in\mathcal{E}\cap\mathcal{F}$, alors $A'\in\mathcal{E}'\cap\mathcal{F}'$			
Image d'un droite	L'image d'une droite par une transformation T (symétrie, translation ou homothétie) est une droite parallèle sauf dans le cas d'une symétrie axiale.			
Image d'un segment	L'image d'un segment [AB] par une transformation T est le segment [A′B′].			
Image d'un cercle	L'image d'un cercle (𝒞) de centre A et de rayon R par les transformations $S_{(D)}$, S_Ω et t est le cercle (𝒞′) de centre A′ et de rayon R.			L'image d'un cercle (𝒞) de centre A et de rayon R par une homothétie h de rapport k est le cercle de centre A′ et de rayon $R'=R\|k\|$

1 Ensemble de points

Soient ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD] où les points A et B sont fixes et AB = 2, et les points C et D sont variables tels que AD = 3 et DC = 4.

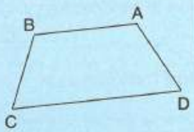
1) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points D.

2) Déterminer l'ensemble (Γ) des points C lorsque D varie dans l'ensemble ($\mathscr{C}$).

3) Construire les deux ensembles ($\mathscr{C}$) et (Γ).

Solution

1) Déterminons l'ensemble ($\mathscr{C}$)



$D \in (\mathscr{C})$ signifie que AD = 3

Donc : ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre A et de rayon 3.

2) Déterminons l'ensemble (Γ)

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] où AB = 2 et DC = 4

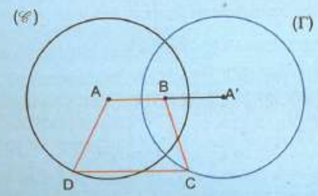
Donc : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $D \in (\mathscr{C})$

Donc : C est l'image de D par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

Comme D décrit le cercle ($\mathscr{C}$), alors l'ensemble des points C est l'image du cercle ($\mathscr{C}$) par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

d'où : (Γ) est le cercle de centre A' et de rayon 3 où $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$.

3) Construction de ($\mathscr{C}$) et (Γ).



2 Alignement de points

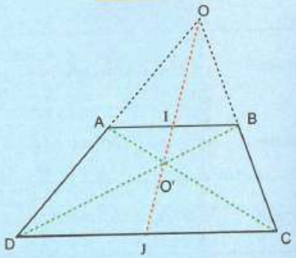
Soit ABCD un trapèze tel que (AB) // (CD).

Soient O le point d'intersection des droites (AD) et (BC), et O' le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Montrer que les points O, O', I et J sont alignés.

Solution



- Il existe un réel k_1 tel que $\overrightarrow{OD} = k_1\overrightarrow{OA}$ (car O, A et D sont alignés). Cela signifie que D est l'image de A par l'homothétie H_1 de centre O et de rapport k_1.

B est le point d'intersection des droites (AB) et (BC).

Donc $H_1(B)$ est le point d'intersection des droites $H_1((AB))$ et $H_1((BC))$.

$H_1((BC)) = (BC)$ (car le centre O appartient à (BC)).

$H_1((BC))$ est la droite passant par $H_1(A) = D$ et parallèle à (AB) c'est-à-dire $H_1((AB)) = (DC)$.

Donc $H_1(B)$ est le point d'intersection des droites (BC) et (DC).

Or $(BC) \cap (DC) = \{C\}$, par conséquent : $H_1(B) = C$ et $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OB}$.

Ainsi D et C sont les images respectives de A et B par l'homothétie H_1 de centre O et de rapport k_1.

Comme I est le milieu de [AB], donc son image $H_1(I)$ par l'homothétie H_1 est le milieu J de [DC] : $H_1(I) = J$

Donc $\overrightarrow{OJ} = k_1\overrightarrow{OI}$; D'où : $O \in (IJ)$ (1)

- Il existe un réel k_2 tel que : $\overrightarrow{O'C} = k_2\overrightarrow{O'A}$.

On démontre que : $\overrightarrow{O'D} = k_2\overrightarrow{O'B}$ (même raisonnement précédent)

Donc : C et D sont les images respectives de A et B par l'homothétie H_2 de centre O' et de rapport k_2.

Comme I est le milieu de [AB], alors son image par H_2 est le milieu J de [CD].

Donc : $\overrightarrow{O'J} = k_2\overrightarrow{O'I}$; D'où $O' \in (IJ)$ (2)

De (1) et (2), on déduit l'alignement des points O, O', I et J.

Exercices d'application

Symétrie axiale – symétrie centrale – Translation

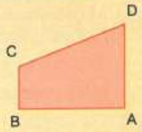
1 Recopier la figure ci-contre.

Construire l'image de ABCD :

a) par la symétrie axiale d'axe (BC).

b) par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

c) par la symétrie centrale de centre I milieu de [DC].



2 Soient ABC un triangle, I le milieu de [BC] et G le centre de gravité du triangle ABC.

Construire l'image du triangle ABC :

a) par la symétrie axiale d'axe (AC).

b) par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$.

3 Soit ABC un triangle tel que :

$$\widehat{BAC} = 60°\ ,\ AB = 6cm \text{ et } AC = 7m$$

Soit G le centre de gravité de ABC.

1) Construire A'B'C' image du triangle ABC par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

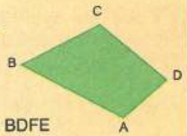
2) Si G' est l'image de G par la translation t, quelle est la nature du quadrilatère BGCG' ?

4 Soit ABCD un quadrilatère.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Soient E et F les images respectives de B et D par la translation t.

Montrer que l'aire du quadrilatère BDFE est le double de l'aire de ABCD.



5 Soit ABC un triangle.

Soit S_A la symétrie centrale de centre A.

1) Construire les points D et E images respectives de B et C par la symétrie S_A.

2) a) Déterminer la nature du quadrilatère BCDE.

b) Si le triangle ABD est rectangle isocèle en A, déterminer la nature du quadrilatère BCDE ?

Homothétie

6 Soient ABC un triangle et A'B'C' le triangle tel que :

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B'C'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

1) Construire la figure.

2) Construire le centre de l'homothétie h qui transforme ABC en A'B'C'.

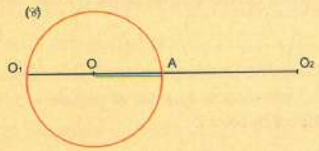
3) Déterminer le rapport de l'homothétie h.

7 Soit ABC un triangle.

1) Construire A'B'C' image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

2) Montrer que la droite (B'C') passe par le centre de gravité du triangle ABC.

8 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et de rayon R = 3.



On considère les point O_1, A, O_2 placés sur la figure tels que : $O_1A = AO_2 = 6$.

1) Construire le cercle ($\mathscr{C}_1$) image du cercle ($\mathscr{C}$) par l'homothétie h_1 de centre O_1 et qui transforme O en A.

2) Construire le cercle ($\mathscr{C}_2$) image du cerce ($\mathscr{C}$) par l'homothétie h_2 de centre O_2 et qui transforme O en A.

3) Construire (D_1) image de la droite (D) tangente à ($\mathscr{C}$) en A, par l'homothétie h_1.

4) Construire (D_2) image de (D) par l'homothétie h_2.

9 Soient ABCD un triangle isocèle de sommet A, E le point du plan tel que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, et F le projeté de E sur (AC) parallèlement à la droite (BC).

On considère l'homothétie h de centre A qui transforme B en E.

1) Montrer que le rapport de l'homothétie h est $\frac{3}{2}$.

2) Montrer que F est l'image du point C par l'homothétie h.

Exercices de renforcement des apprentissages

Symétrie axiale – symétrie centrale – Translation

10 Soit ABCD un losange ce centre O.

Soient I, J, K, L les projetés orthogonaux respectifs de O sur (AB), (BC), (CD), (DA).

En utilisant une symétrie axiale, déterminer la nature du quadrilatère IJKL.

11 Soient ABC un triangle rectangle en A, O le milieu du segment [BC].

1) Construire les deux points I et J images respectives du point O par les symétries axiales d'axes (AB) et (AC).

2) a) Montrer que : $\widehat{OAB}=\widehat{BAI}$ et $\widehat{OAC}=\widehat{CAJ}$.

b) En déduire que les points I, A et J sont alignés.

12 Soient ABC un triangle, A′ le milieu de [BC], J le symétrique de I par rapport au point A′ et K le symétrique de J par rapport au point C.

1) Montrer que IBJC est un parallélogramme.

2) Montrer que : $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IK}$

13 Soient A, B et C trois points non alignés.

Soit t la translation qui transforme A en B.

Soit D le translaté (image) de B par t.

La droite parallèle à (BC) et passant par le point D coupe la droite (AC) en E.

Montrer que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}$.

14 Soient A et B deux points du plan P.

A tout point M, on associe le point M′ tel que :

$$2\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$$

1) Montrer que la transformation t qui au point M associe le point M′, est une translation dont on déterminera le vecteur.

2) Construire l'image par t du cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon 2.

Homothétie

15 Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit f la transformation plane qui à tout point M associe le point M′ tel que : $3\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

1) Déterminer vectoriellement le point I invariant par la transformation f.

2) Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.

3) En déduire la nature de la transformation f.

16 Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit F la transformation plane qui à tout point M associe le point M′ tel que : $2\overrightarrow{M'M}+2\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}=\vec{0}$

1) Déterminer vectoriellement le point I invariant par la transformation f.

2) Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.

3) En déduire la nature de la transformation f.

17 Soient ABCD un parallélogramme et E un point de [BD], distinct de B et D.

La droite (AE) coupe les droites (BC) et (DC) respectivement en F et G.

On considère l'homothétie h de centre E est qui transforme B en D.

1) a) Comparer $\frac{ED}{EB}$ et $\frac{EA}{EF}$.

b) Déterminer l'image du point F par l'homothétie h.

2) Quelle est l'image de la droite (AB) par l'homothétie h ?

3) En déduire que G est l'image du point A par l'homothétie h et que : $EA^2=EF\times EG$.

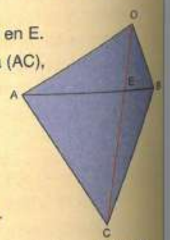
18 Soit OAB un triangle. A l'extérieur de OAB, on construit le triangle équilatéral ABC.

Les droites (OC) et (AB) se coupent en E.

La droite passant par E et parallèle à (AC), coupe (OA) en F.

La droite passant par E et parallèle à (BC), coupe (OB) en G.

On considère l'homothétie h de centre O et qui transforme C en E.



1) a) Montrer que : $\frac{OE}{OC}=\frac{OF}{OA}=\frac{OG}{OB}$.

b) En déduire les images de A et B par l'homothétie h.

2) Montrer que le triangle EFG est équilatéral.

3) Soit M le milieu de [AC] et soit N le milieu de [EF]. Montrer que les points O, M et N sont alignés.

Exercices de synthèse

Translation – symétrie centrale

19 Soit ABCD un parallélogramme tel que les points A et B soient fixes.

Quel est l'ensemble des points D lorsque C varie sur une droite (Δ).

20 Soient ABCD un parallélogramme, O le milieu de [AC] et I le milieu de [OC].

1) Montrer que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

2) Montrer qu'il existe un point unique J tel que :

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+5\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=4\overrightarrow{DB}$$

3) Montrer que les droites (AC) et (DJ) sont parallèles.

4) Soit K le symétrique du point J par rapport à I.

Montrer que le milieu du segment [AK] appartient à la droite (OJ).

Homothétie

21 Soient ABCD et CDEF deux trapèzes ; on suppose que les droites (AB), (DC), (EF) sont concourantes en un point O, et que les points A, B, E, F sont alignés.

1) Montrer que si O est le milieu de [BC], alors O est le milieu de [AE].

2) Soit OA = 3, AB = 2 et DE = 5.

Déterminer le rapport de l'homothétie de centre O et qui transforme E en F.

Calculer CF.

22 Soient A et B deux points fixés, M un point n'appartenant pas à la droite (AB) et décrivant un cercle ($\mathscr{C}$).

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M′ tels que ABM′M soit un parallélogramme.

2) Soit M′ tel que ABM′M est un parallélogramme et soit I le milieu de la diagonale [AM′].

Déterminer l'ensemble (F) des points I lorsque M varie sur le cercle ($\mathscr{C}$).

23 Soient (Γ) un cercle de centre O, [AB] l'un de ses diamètres.

Soient C un point, distinct de A et B, du cercle (Γ) et D le symétrique de B par rapport à C.

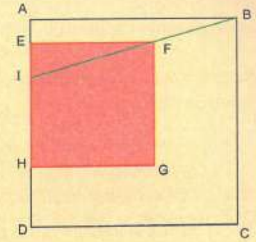
1) Montrer que AB = AD (Noter que $\widehat{ACB}$ est droit).

2) Soit M le point d'intersection des droites (AC) et (OD).

a) Montrer que M est le centre de gravité du triangle ABD et que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M lorsque C varie sur le cercle (Γ).

24 La figure suivante représente un carré ABCD de côté de longueur 10, un carré EFGH de côté de longueur 6 et AE = 1.



La droite (BF) coupe la droite (AD) en I.

Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme A en E.

1) a) Quelle est l'image de B par h ?

b) Quel est le rapport de l'homothétie h ?

2) a) Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que $\overrightarrow{IG}=x\overrightarrow{IC}$.

(On pourra remarquer que : $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FG}$)

b) En déduire l'image de C par l'homothétie h.

3) Quelle est l'image du carré ABCD par h ?

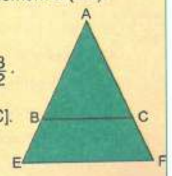
4) Soient O et O′ les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH.

Montrer que les points O, O′ et I sont alignés et que : $\overrightarrow{IO'}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IO}$.

25 Soient ABC un triangle isocèle en A, E le point du plan tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Soit F le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC).

On considère l'homothétie h de centre A et qui transforme B en E.



1) a) Montrer que le rapport de h est $\frac{3}{2}$.

b) Déterminer l'image de C par h.

2) Soit (Δ) la médiatrice du segment [BC].

S est la symétrie axiale d'axe (Δ).

a) Déterminer l'image de E par S.

b) Montrer que le point d'intersection de (BF) et (CE) appartient à (Δ).

Problèmes

Symétrie centrale

26 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
On considère une droite (Δ) passant par D et coupant (AC) en M.
On considère une droite (Δ') passant par B et coupant (AC) en N.
En utilisant la symétrie centrale de centre O, Montrer que O est le milieu de [MN].

Symétrie axiale

27 Soient ABC un triangle isocèle en A, I le milieu de [BC] et M un point de [AI] tel que :
(BM) coupe (AC) en H et (CM) coupe (AB) en K.
En utilisant la symétrie axiale d'axe (AI), montrer que : BK = CK.

Constructions (Translation – symétrie)

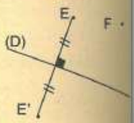
28 1) On considère deux droites (D) et (Δ) sécantes en A. Soient E et F deux points distincts n'appartenant ni à (D), ni à (Δ).
Construire les deux points M et N tels que EFNM soit un parallélogramme, M appartient à (D) et N appartient à (Δ).
2) On considère deux droites (D) et (Δ) sécantes en A et soit E un point extérieur à (D) et à (Δ).
Construire deux points M et N appartenant respectivement à (D) et (Δ) tels que E soit le milieu de [MN].

29 Soit ABC un triangle.
A tout point M, on associe les points M_1, M_2 et M' tels que :
M_1 est le symétrique de M par rapport à B ;
M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à C ;
M' est le symétrique de M_2 par rapport à A.
1) Montrer que : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{M_2M} = 2\overrightarrow{AO}$
où O est le milieu de [MM'].
2) En déduire que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.

30 Soit ABCD un quadrilatère.
A tout point M, on associe :
M_1 symétrique de M par rapport à B ;
M_2 symétrique de M_1 par rapport à C ;
M_3 symétrique de M_2 par rapport à D ;
M' symétrique de M_3 par rapport à A.
1) Montrer que : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{M_2M'} = 2\overrightarrow{DA}$.
2) En déduire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA})$.

Distance minimale

31 Soit (D) une droite.
On considère deux points fixes E et F n'appartenant pas à la droite (Δ) (voir figure)



E' est l'image de E par la symétrie axiale d'axe (D).
1) Montrer que, pour tout M de (D), on a : ME + MF ≥ E'F.
2) Comment faut-il choisir N sur (D) tel que NE + NF soit minimale ? (la plus petite possible).

Utilisation de la symétrie axiale

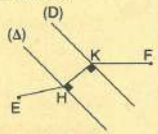
32 A l'extérieur d'un carré EFGH, on construit les deux triangles équilatéraux EFM et EHN.
1) Montrer que (EG) est une bissectrice de l'angle $\widehat{MEN}$ et que (EG) est la médiatrice du segment [MN].
2) Soit S la symétrie axiale d'axe (EG).
En utilisant S, montrer que les droites (HM), (FN) et (EG) sont concourantes.

33 Soient ABC un triangle, H son orthocentre, A' le milieu de [BC], M le symétrique de H par rapport à la droite (BC) et N le symétrique de H par rapport au point A'.
1) Montrer que BHCN est un parallélogramme et que les triangles ABN et ACN sont rectangles.
2) a) Montrer que (MN) // (BC).
b) En déduire que le triangle AMN est rectangle.
3) Montrer que les points A, B, C et M appartiennent au cercle de diamètre [AN].

Choix d'une transformation

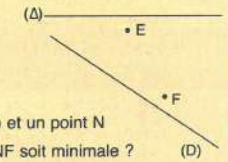
34 Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus.
En utilisant une homothétie h de centre A, montrer comment on peut construire un carré MNPQ tel que :
$\begin{cases} \bullet \text{ M et N appartiennent à [BC].} \\ \bullet \text{ P} \in \text{[AC] et Q} \in \text{[AB].} \end{cases}$

35 On considère deux droites (D) et (Δ) parallèles.
Soient E et F deux points fixes n'appartenant ni à (D), ni à (Δ) (voir figure).



H et K sont deux points variables respectivement sur (Δ) et (D) tels que (HK) ⊥ (D).
On pose : $\overrightarrow{HK} = \vec{u}$.
1) Soit E' le translaté de E par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Montrer que : EH + KF = E'K + KF.
2) En déduire la position de K pour laquelle E'K + KF est minimale (la plus petite possible).
Déterminer la position de H et K pour que la distance EH + HK + KF soit minimale.

36 Soient (Δ) et (D) deux droites non parallèles.
Soient E et F deux points fixes n'appartenant ni à (Δ), ni à (D)(voir figure).



Déterminer un point M de (Δ) et un point N de (D) tels que EM + MN + NF soit minimale ?

Aire maximale

37 Soit ABC un triangle d'aire s.
M est un point de [AB], distinct de A et B.
M' est le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC).
M" est le projeté de M sur (BC) parallèlement à (AC).
On veut déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du parallélogramme CM'MM" est maximale.
Soit α l'aire du parallélogramme CM'MM".
Soient s_1 l'aire du triangle AMM' et s_2 l'aire du triangle BMM".
1) On considère l'homothétie h de centre A qui transforme B en M, et soit k le rapport de l'homothétie h.
a) Déterminer k.
b) Montrer que h(C) = M'
c) En déduire que : $s_1 = k^2 s$.
2) On considère l'homothétie de centre B qui transforme A en M. Soit k' le rapport de h'.
a) Montrer que k' = 1 – k
b) En déduire que $s_2 = (1-k)^2 s$
3) Montrer que : $\alpha = 2k(1-k)s$
4) Montrer que l'aire α est maximale si et seulement si M est le milieu de [AB].
Montrer que, dans ce cas, $\alpha = \frac{1}{2}s$.

38 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O, de diamètre [AB].
Soit E un point fixe, extérieur à ($\mathscr{C}$), de la demi-droite [OB).
On considère un point M, distinct de A et B, variable sur le cercle ($\mathscr{C}$).
La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EOM}$ coupe (EM) en K.
La perpendiculaire à (OK) en O coupe (EM) en L.
La parallèle à la droite (OK) et passant par M coupe (OE) en S.
La parallèle à la droite (OL) et passant par M coupe (OE) en T.
1) Montrer que les deux triangles SOM et TOM sont isocèles, et que [ST] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$).
2) Soient r le rayon du cercle ($\mathscr{C}$) et a = OE.
Montrer que : $\overrightarrow{EK} = \frac{a}{a+r}\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{a}{a-r}\overrightarrow{EM}$.
3) En déduire l'ensemble des points K et l'ensemble des points L.

39 Soit ABC un triangle.
E et F sont les milieux respectifs de [BC] et [CA].
Pour tout point M, soient :
• M' le symétrique de M par rapport à F ;
• M" le symétrique de M' par rapport à E.
1) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{BM'}$.
2) Montrer que les deux triangles MM"C et ABM' sont isométriques.

12 EXERCICES ET PROBLÈMES

40 Soient A et B deux points fixes distincts.

Pour tout point M du plan, soit N le point tel que MABN est un parallélogramme.

Si M varie sur une droite fixe (Δ), quel est le lieu géométrique du point N ?

41 Soit EFGH un parallélogramme.

Montrer comment construire un parallélogramme ABCD tels que ses sommets A, B, C et D appartiennent respectivement à [EF], [FG], [GH] et [HE].

42 Soit ABCD un parallélogramme.

Soit E un point donné.

On considère une droite (Δ) passant par E, coupant les droites (CD) et (AB) respectivement en M et N, et coupant les droites (BC) et (AD) respectivement en R et S.

Montrer qu'il existe deux droites (Δ_1) et (Δ_2) telles les segments [MN] et [RS] aient la même longueur : MN = RS.

43 E et F sont deux points fixes distincts.

(Δ) est une droite donnée ; $(\mathscr{C})$ est un cercle donné.

Pour tout point M, on considère le point M' tel que EMFM' soit un parallélogramme.

1) Quel est le lieu géométrique de M' lorsque M varie sur (Δ) ?

2) Quel est le lieu géométrique de M' lorsque M varie sur $(\mathscr{C})$?

44 Soit ABC un triangle.

On considère deux points M et E de [AB], et deux points N et F de [AC] tels que les droites (MN), (EF) et (BC) soient parallèles.

Comment peut-on choisir M, E, N et F pour que les polygones AMN, MNFE et EFCB aient la même aire ?

45 Soient $(\mathscr{C}_1)$ un cercle de centre O_1 et de rayon r_1, $(\mathscr{C}_2)$ un cercle de centre O_2 et de rayon r_2 tels que $r_1 \neq r_2$, et $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents extérieurement en A.

Pour tout point M de $(\mathscr{C}_1)$, n'appartenant pas à (O_1O_2), on considère le point N de $(\mathscr{C}_2)$ tel que AMN soit rectangle en A.

Montrer que la droite (MN) passe par un point fixe (indépendant de M).

Produit scalaire

13

Capacités attendues

* Exprimer la distance et l'orthogonalité au moyen du produit scalaire.
* Utilisation du produit scalaire dans la résolution de problèmes.
* Utilisation du théorème d'Al-Kashi et du théorème de la médiane dans la résolution de problèmes.

Contenu

● Activités préparatoires

- Formule trigonométrique du produit scalaire
- Propriété $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- Propriété $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- Théorème d'Al-Kashi
- Théorème de la médiane
- Formule des sinus
- Calcul de longueurs et d'aires
- Détermination de lieux géométriques
- Relations métriques
- Preuve d'une formule trigonométrique

● Définitions et règles

- Produit scalaire de deux vecteurs
- Formule trigonométrique du produit scalaire
- Propriétés du produit scalaire
- Relations métriques dans un triangle

● Points essentiels

● Exercices résolus

● Exercices et problèmes

13 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Formule trigonométrique du produit scalaire

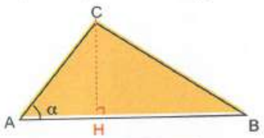
Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$.

Soit a une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

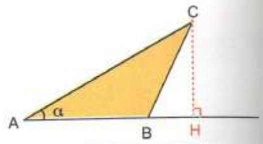
On pose : $d=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

1) Si ABC est un triangle rectangle en A, quelle est la valeur de d ?

2) On suppose $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ (les deux cas suivants peuvent se présenter).



Cas (1)



Cas (2)

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

a) Montrer que dans les deux cas, on a : $AC^2 = CH^2 + AH^2$ et $BC^2 = CH^2 + BH^2$

b) En déduire que d = AB × AH.

c) Montrer que d = AB × AC cosα.

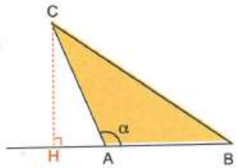
3) On suppose que $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ (voir figure)

a) Montrer que d = –AB × AH.

b) Montrer que d = AB × AC cosα

Le nombre réel d s'appelle **le produit scalaire** des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et se note $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

L'écriture $\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\cos\alpha$ est appelée **formule trigonométrique du produit scalaire** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Cas (3)

> **d = AB × AH**
> **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens.**

> **d = –AB × AH**
> **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens contraires**

> **Si (AB) ⊥ (AC) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$**

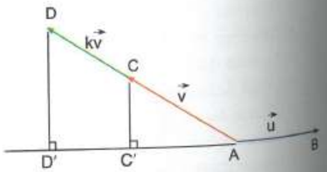
ACTIVITE 2 Propriété $\vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}\,.\,\vec{v})$

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ et k un nombre réel tels que :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AC}=\vec{v}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{AD}=k\vec{v}\qquad \text{(voir figure)}$$

Soient C′ et D′ les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).

Montrer que : $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$



13 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 3 Propriété $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

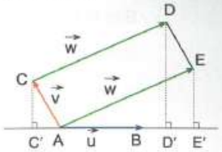
A Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ (voir figure).

Soient C′, D′ et E′ les projetés orthogonaux respectifs des points C, D et E sur la droite (AB) où D est le point tel que : $\overrightarrow{AD}=\vec{v}+\vec{w}$.

1) Montrer que : $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=AB\times AD'$.

2) Montrer que : $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}=AB\times(AE'-AC')$ et $AE' = C'D'$.

3) En déduire que : $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

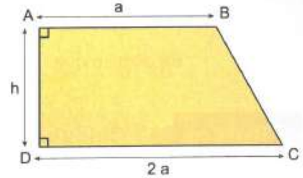


B Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que :

AB = a, DC = 2a et AD = h.

1) Calculer $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$ en fonction de a et h.

2) Déterminer h pour que (AC) soit perpendiculaire à (BD).



ACTIVITE 4 Théorème d'Al-Kashi

A Soit ABC un triangle du plan.

1) Montrer que : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

2) On suppose que : AB = 8, AC = 7 et BC = 11.

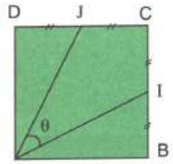
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\cos\widehat{BAC}$.

B Soient ABCD un carré de côté de longueur a, I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [DC], et θ une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

1) Calculer AI et AJ en fonction de a.

2) Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$ et en déduire cos θ.

3) En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée de θ à 0,1 près.



ACTIVITE 5 Théorème de la médiane

Soient A, B deux points distincts du plan, I le milieu de [AB] et M un point quelconque du plan.

1) Montrer que : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

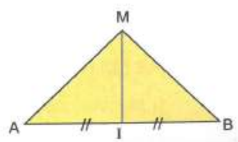
En déduire que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$.

En déduire que : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$.

3) En utilisant les deux relations $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$.

montrer que : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

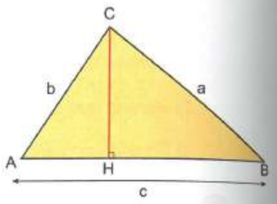


ACTIVITE 6 — Formule des sinus

Soient ABC un triangle, a = BC, b = CA et c = AB.

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Soit S l'aire du triangle ABC.



1) Montrer que : $HC = b\sin\widehat{A}$.

En déduire que : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

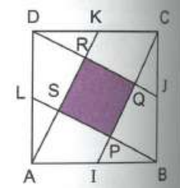
2) Montrer que : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.

En déduire que : $\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$.

ACTIVITE 7 — Calcul de longueurs et d'aires

Soient ABCD un carré, I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

On pose AB = a.



1) Calculer $\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}\right)$.

2) En déduire que (IC) est perpendiculaire à (LB).

3) Calculer $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ}$ (P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de B et J sur (IC)).

4) En déduire PQ en fonction de a.

5) Montrer que PQRS est un carré et que son aire est $\frac{1}{5}a^2$.

ACTIVITE 8 — Détermination de lieux géométriques

Soient A, B deux points du plan tels que AB = 5cm, et I le milieu de [AB].

A Soit $(\mathscr{C}_1)$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

1) Montrer que : $M \in (\mathscr{C}_1)$ si et seulement si MI = IA.

2) En déduire la nature de $(\mathscr{C}_1)$ et ses éléments caractéristiques, puis tracer $(\mathscr{C}_1)$.

B Soit $(\mathscr{C}_2)$ l'ensemlbe des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -4$.

1) Montrer que $M \in (\mathscr{C}_2)$ si et seulement si $MI = \frac{3}{2}$.

2) En déduire la nature de $(\mathscr{C}_2)$ et ses éléments caractéristiques, puis tracer $(\mathscr{C}_2)$.

ACTIVITE 9 — Relations métriques

A 1) Construire un triangle ABC satisfaisant aux conditions suivantes :

AB = 7cm, AC = 8cm et $\widehat{BAC} = 80°$.

2) Calculer BC.

3) Calculer les mesures des angles du triangle ABC.

B Soient ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC) et K le projeté orthogonal de C sur (AB).

1) Montrer que : $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$.

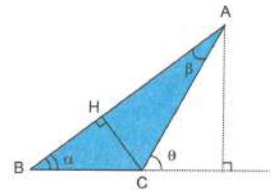
2) En déduire que : Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BA^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$.

3) Si la relation $BA^2 = BH \times BC$ est réalisée, le triangle ABC est-il rectangle en A ?

ACTIVITE 10 — Preuve d'une formule trigonométrique

Soient ABC un triangle et H le projeté orthogonal de C sur (AB) (voir figure).

On pose : a = BC, b = CA et c = AB.



1) Montrer que : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.

2) Déterminer θ en fonction de α et β.

3) En déduire que : $c\cos\alpha = a + b\cos(\alpha + \beta)$.

4) Montrer que : $a\sin\alpha = b\sin\beta$ et $c = a\cos\alpha + b\cos\beta$.
(on pourra utiliser les deux triangles AHC et BHC).

5) En déduire que : $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$.

6) On suppose que le triangle ABC est isocèle en C.

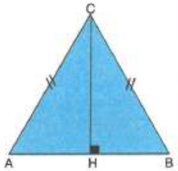
Montrer que : $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel que l'on note $\vec{u}.\vec{v}$ et qui est défini par :
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, alors $\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH$.
- Dans le cas où H est confondu avec A (c'est-à-dire (AC) ⊥ (AB)), alors $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Exemples et applications

- Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a.
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Comme ABC est équilatéral, alors H est le milieu de [AB] ; donc $AH=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.
Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$.
c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}==a\times\frac{a}{2}$. D'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.



- Soit ABCD un carré de côté de longueur 4 cm.
Soit I le milieu du segment [BC].
Calculer ce qui suit : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{ID}$.

2 Formule trigonométrique du produit scalaire

Propriété 1 Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls et a une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, alors : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$ (ou encore $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\widehat{BAC}$).

Exemples et applications

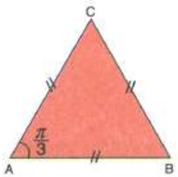
- Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a.

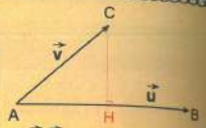
On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\widehat{BAC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}$

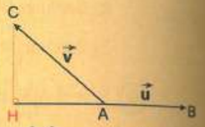
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a\times a\times\frac{1}{2}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$





$\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH>0$



$\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH<0$

$\vec{u}.\vec{v}=AB\times AA=0$

(car A est le projeté orthogonal de C sur (AB)).

Remarque

$\vec{u}.\vec{u}=AB^2$

$\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

On pose $(\vec{u})^2=\vec{u}.\vec{u}$.

$AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$.

Remarque

Cette formule du produit scalaire permet, selon les cas, de calculer des distances ou de déterminer les mesures d'angles par la formule :

$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\frac{\pi}{4}$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=10$

- Soit ABC un triangle tel que : AB = 3, AC = 4 et $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
- Soit EFG un triangle tel que : EF = 5, EG = 3 et $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=-6$.
Calculer $\cos(\widehat{FEG})$.

3 Propriétés du produit scalaire

Propriété 2 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

On exprime la propriété 2 en disant que le produit scalaire est symétrique.

Propriété 3 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Propriété 4 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k, on a : $\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$

Propriété 5 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\\ \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\end{array}\right\}\text{(identités remarquables)}$$

Exemples et applications

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{3}{2}$

- On a $(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=3\vec{u}.(\vec{u}+5\vec{v})-2\vec{v}.(\vec{u}+5\vec{v})$

$(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=3(\vec{u})^2+15(\vec{u}.\vec{v})-2\vec{v}.\vec{u}-10(\vec{v})^2$

$(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=3\|\vec{u}\|^2+15(\vec{u}.\vec{v})-2(\vec{u}.\vec{v})-10\|\vec{v}\|^2$

$(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=3\|\vec{u}\|^2+13(\vec{u}.\vec{v})-10\|\vec{v}\|^2$

$(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=3\times5^2+13\times\left(\frac{-3}{2}\right)-10\times3^2$

Donc : $(3\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+5\vec{v})=-\frac{69}{2}$

Le carré scalaire de $\vec{u}$ est $(\vec{u})^2=\vec{u}.\vec{u}$ et on a : $(\vec{u})^2=\|\vec{u}\|^2$

• Calculons $\|\vec{u}+5\vec{v}\|$

On a : $\|\vec{u}+5\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\left(\vec{u}.(\vec{v})\right)+\|5\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}+5\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+10\left(\vec{u}.\vec{v}\right)+25\|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}+5\vec{v}\|^2=5^2+10\times\left(-\frac{3}{2}\right)+25\times3$

$\|\vec{u}+5\vec{v}\|^2=235$

Donc : $\|\vec{u}+5\vec{v}\|^2=235$

D'où : $\|\vec{u}+5\vec{v}\|=\sqrt{235}$ (car $\|\vec{u}+5\vec{v}\|\geqslant 0$)

• Calculons $\|3\vec{u}-2\vec{v}\|$

On a : $\|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2=\|3\vec{u}\|^2-2\left(3\vec{u}\right).\left(2\vec{v}\right)+\|2\vec{v}\|^2$

$\|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2=9\|\vec{u}\|^2-12\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2$

$\|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2=9\times5^2-12\times\left(-\frac{3}{2}\right)+4\times3^2$

Donc : $\|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2=279$

D'où : $\|3\vec{u}-2\vec{v}\|=\sqrt{279}=3\sqrt{31}$

• Calculons $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)$

On a : $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)=\|3\vec{u}\|^2-\|2\vec{v}\|^2$

$\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)=9\|\vec{u}\|^2-4\|\vec{v}\|^2$

$\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)=9\times5^2-4\times3^2$

Donc : $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)=189$

■ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-3$

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(4\vec{u}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}\right).\left(\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{v}\right)$

c) $\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2$

d) $\left(\vec{u}-\sqrt{2}\,\vec{v}\right)^2$

Propriété 6 Pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux il faut et il suffit que : $\vec{u}.\vec{v}=0$.

$\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$

$\|k\vec{u}\|^2=k^2\|\vec{u}\|^2$

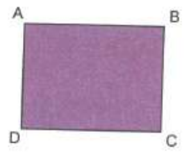
Se rappeler que

$\begin{cases} a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=a\vec{u}-a\vec{v} \\ (a-b)\vec{u}=a\vec{u}-b\vec{u} \end{cases}$

Exemples et applications

■ Soit ABCD un rectangle tel que : AB= 4 et AD = 3.

• On a : (AB) ⊥ (AD). Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.



• Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Or (AB) ⊥ (BC), par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=AB^2$

D'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=16$

■ Soit EFG un triangle tel que : $EF=\sqrt{2}$, EG = 1 et $\widehat{FEG}=\frac{\pi}{4}$.

Montrons que : (EG) ⊥ (FG).

On a : $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EG}.\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}\right)$

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=-\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF}+\left(\overrightarrow{EG}\right)^2$

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=-EG\times EF\times Cos\,\widehat{FEG}+EG^2$

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=-\sqrt{2}\times Cos\frac{\pi}{4}+1$

Donc : $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

D'où : $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FG}=0$; ce qui prouve que (EG) ⊥ (FG)

■ Soit ABC un triangle tel que : AC = 3, AB = 1 et $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$.

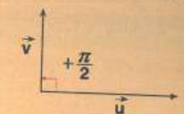
Soit I le milieu de [AB].

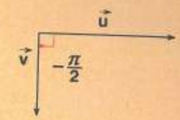
1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$.

2) Soit E le point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ puis calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$.

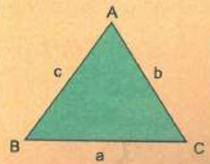
b) Montrer que : (AB) ⊥ (IE).





4 Relations métriques dans un triangle

Propriété 7 Soit ABC un triangle. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$

Exemples et applications

- Soit ABC un triangle tel que : AB = 4, AC = 5 et BC = 6
  - Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

    On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

    $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(4^2+5^2-6^2\right)$

    Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}$
  - Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

    On a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)$

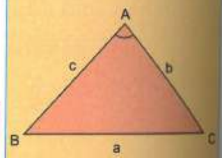
    $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(4^2+6^2-5^2\right)$

    Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{27}{2}$
  - Calculons $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

    On a : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)$

    $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(5^2+6^2-4^2\right)$

    Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{45}{2}$
- Soit EFG un triangle tel que : $EF=\sqrt{10}$, EG = 1 et FG = 3.
  1) Vérifier que EFG est un triangle rectangle.
  2) Calculer $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$.
- Soit MNP un triangle tel que : MN = 1, $MP=2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=-3$.
  Calculer NP et $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}$.



Propriété 8 Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos\widehat{BAC}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Exemples et applications

- Soit ABC un triangle tel que : AB = 5, AC = 8 et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.
  - Calculons BC.

    D'après le théorème d'Al-Kashi : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{B}$

    Donc : $BC^2=5^2+8^2-2\times5\times8\cos\frac{2\pi}{3}$. D'où $BC^2=25+64+40=129$

    Il en découle : $BC=\sqrt{129}$ (car BC > 0)
  - Calculons $\cos\widehat{ACB}$.

    D'après le théorème d'A-Kashi : $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times\cos\widehat{C}$

    Donc : $2CA\times CB\cos\widehat{C}=CA^2+CB^2-AB^2$

    Donc : $\cos\widehat{C}=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA\times CB}$

    $\cos\widehat{C}=\frac{64+129-25}{2\times8\times\sqrt{129}}$

    D'où $\cos\widehat{C}=\frac{7\sqrt{129}}{86}$
- Soit EFG un triangle tel que : EF = 7, EG = 5 et $\widehat{FEG}=\frac{\pi}{4}$.
  Calculer FG et $\cos\widehat{EGF}$.

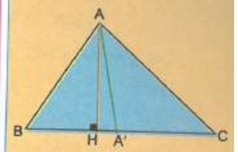
Propriété 9 Relations métriques dans un triangle rectangle

Soient ABC un triangle, A′ le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Pour que ABC soit un triangle rectangle en A il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée : (1) $AB^2+AC^2=BC^2$ **(Théorème de Pythagore)**

(2) $AA'=\frac{1}{2}BC$

(3) $BA^2=BH\times BC$ ou $CA^2=CH\times BC$

(4) $AH^2=HB\times HC$



Exemples et applications

- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = a et BC = 2a (où a est un réel strictement positif).
  - Calculons AC (longueur du côté [AC]).

    En appliquant le théorème de Pythagore, on a : $AB^2+AC^2=BC^2$

    donc $AC^2=BC^2-AB^2$; donc $AC^2=(2a)^2-a^2$; d'où $AC^2=3a^2$

    Il s'ensuit que : $AC=\sqrt{3}\,a$.
  - Soit A′ le milieu de [BC]. Calculons AA′ (longueur de la médiane [AA′]).

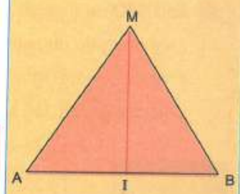
    On a : $AA'=\frac{1}{2}BC$ c'est-à-dire $AA'=\frac{1}{2}(2a)$; donc AA′ = a.
  - Soit H le projeté orthogonal du point A sur (BC).

    Calculons AH (longueur de la hauteur [AH])

    On a : $BA^2=BH\times BC$ et $CA^2=CH\times BC$

    Donc : $BH=\frac{BA^2}{BC}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$ et $CH=\frac{CA^2}{BC}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3}{2}a$

    Par ailleurs : $AH^2=BH\times HC$ c'est-à-dire $AH^2=\frac{a}{2}\times\frac{3}{2}a=\frac{3}{4}$. D'où : $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$
- Soit EFG un triangle rectangle en E ; soit H le projeté orthogonal de E sur (FG).
  On suppose que : EH = 2 et $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$
  Calculer les distances EF, EG, FG, FH et GH.



Ce théorème permet de calculer la longueur de la médiane [MI] en fonction des longueurs des côtés du triangle MAB.

Propriété 10 Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan, I le milieu du segment [AB].
Soit M un point du plan. On a les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
- $MA^2-MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
- $MA^2+MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

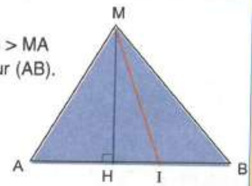
Exemples et applications

- Soit ABM un triangle tel que : AB = 6, MI = 4, IH = 1 et MB > MA où I est le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (AB).
  - Calculons $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

    On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

    $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4^2-\frac{1}{4}\times6^2$

    D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$



• Calculons $MA^2 - MB^2$.

On a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}$

Comme MA < MB, alors $MA^2 - MB^2 < 0$

Donc : $MA^2 - MB^2 = -2IH \times AB$

D'où : $MA^2 - MB^2 = -12$

• Calculons $MA^2 + MB^2$

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

$MA^2 + MB^2 = 2\times 4^2 + \frac{1}{2}\times 6^2$

Donc : $MA^2 + MB^2 = 50$

■ Soit ABC un triangle tel que : AB = 3, AC = 6 et BC = 4.

Soit I le milieu du segment [BC]. Calculons AI.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$

$2AI^2 = 3^2 + 6^2 - \frac{1}{2}\times 4^2$

Donc : $AI^2 = \frac{37}{2}$; d'où $AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$

■ Soit EFG un triangle tel que : $EF = 4\sqrt{5}$, EG = 4 et FG = 5.

J est le milieu du segment [FG].

K est le projeté orthogonal du point G sur (EF).

Calculer EJ, $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GF}$ et KJ.

Propriété 11 Soient ABC un triangle d'aire S, a = BC, b = CA et c = AB.

On a : $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A} = \frac{1}{2}BA \times BC \times \sin\widehat{B} = \frac{1}{2}CA \times CB \times \sin\widehat{C}$

$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

Exemples et applications

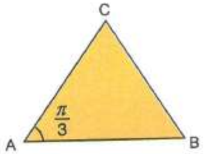
■ Soit ABC un triangle rectangle équilatéral de côté de longueur a.

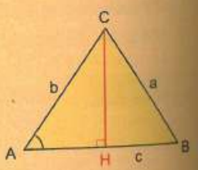
L'aire du triangle ABC est :

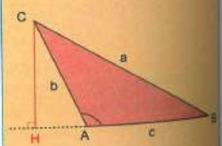
$S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A}$

$S = \frac{1}{2}a \times a \times \sin\frac{\pi}{3}$

Donc : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\left(\text{car } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$







$S = \frac{1}{2}CH \times AB$

$CH = AC\sin\widehat{A}$

■ Soit EFGH un parallélogramme tel que : EF = 3, EH = 5 et $\widehat{FEH} = \frac{3\pi}{4}$.

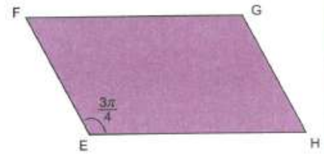
L'aire du parallélogramme EFGH et $S = 2\,S_{EFH}$.

où S_{EFH} est l'aire du triangle EFH.

On a : $S_{EFH} = \frac{1}{2}EF \times EH \times \sin\widehat{EFH}$

$S_{EFH} = \frac{1}{2}\times 3 \times 5 \times \sin\frac{3\pi}{4}$

$S_{EFH} = \frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{car } \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Donc : $S_{EFH} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$

D'où : $S = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

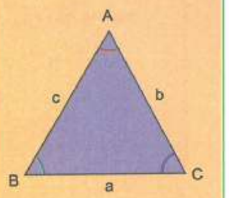
■ Soit ABC un triangle tel que : AB = AC, $BC = 5\sqrt{3}$ et $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{4}$

Calculer l'aire du triangle ABC.

■ Calculer l'aire d'un parallélogramme EFGH tel que : EF = 5, FG = 7 et $\widehat{EFG} = \frac{2\pi}{3}$.

Propriété 12 Soient ABC un triangle d'aire S, a = BC, b = CA et c = AB.

On a : $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$



■ Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 73°$ et BC = 6.

L'égalité $\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$ permet de déterminer des valeurs approchées de b et c.

On a : $\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin 30°}{6} = \frac{1}{12}$.

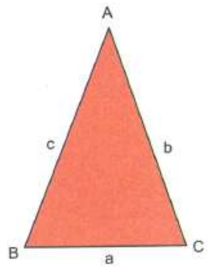
Donc : $\frac{\sin 73°}{b} = \frac{1}{12}$; on en déduit : b = 12sin 73°.

Ainsi : $b \simeq 11,47$

Par ailleurs : $\widehat{C} = 77°$

Donc : $\frac{\sin 77°}{c} = \frac{1}{12}$; on en déduit c = 12sin 77°.

Ainsi : $c \simeq 11,69$



Rappel

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

■ Soit EFG un triangle tel que $\widehat{E} = 60°$; $\widehat{F} = 80°$ et FG = 4.

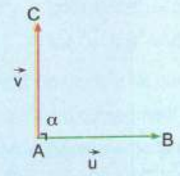
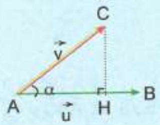
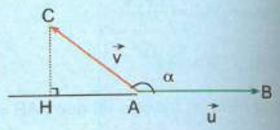
1) Calculer EF et EG.

2) Calculer l'aire du triangle EFG.

(Donner une valeur approchée des résultats obtenus).

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$,
α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.
H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$\alpha=\frac{\pi}{2}$	$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$
		
	$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ $\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$	$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ $\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH$
$\vec{u}.\vec{v}=0$	$\vec{u}.\vec{v}>0$	$\vec{u}.\vec{v}<0$

Formule trigonométrique du produit scalaire

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$$

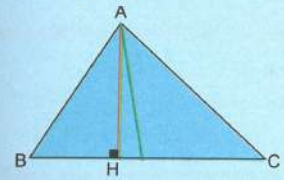
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs non nuls.

Propriétés du produit scalaire	Identités remarquables
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre réel. • On a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ • $\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$	Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{u}=(\vec{u})^2=\|\vec{u}\|^2$ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Applications du produit scalaire

Théorème d'Al-Kashi

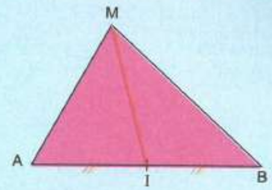
Soit ABC un triangle.



- $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
- $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan, I le milieu de [AB].

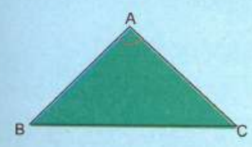


Pour tout point M du plan, on a :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$
- $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
- $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Aire d'un triangle

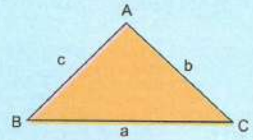
Soit ABC un triangle d'aire S.



On a : $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$

Formule des sinus

Soit ABC un triangle d'aire S ; a : BC, b = CA et c = AB.



On a : $\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}=\frac{2S}{abc}$

Relations métriques dans un triangle rectangle

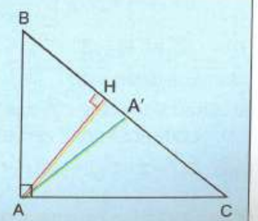
Soient ABC un triangle, A′ le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Pour que le triangle ABC soit rectangle en A il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

(1) $AB^2+AC^2=BC^2$

(2) $AA'=\frac{1}{2}BC$

(3) $BA^2=BH\times BC$

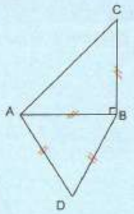
(4) $AH^2=HB\times HC$



1 Calcul de $\cos \frac{7\pi}{12}$

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B tel que : $AB=\sqrt{2}$

A l'extérieur de ABC, on construit le triangle équilatéral ABD.



1) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$.

2) Calculer la distance CD.

3) a) Montrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

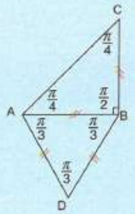
b) Vérifier que : $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

En déduire que : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Solution

1) • Calcul de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

ABD un triangle équilatéral.



Donc : $BD=BA=\sqrt{2}$ et $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{3}$

Il en découle :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=BA\times BD\times\cos\widehat{ABD}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=2\times\frac{1}{2}$$

D'où : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=1$

• Calcul de $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

On a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=BC\times BD\times\cos\widehat{CBD}$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D'où : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=-\sqrt{3}$

2) Calcul de la distance CD

En utilisant le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$CD^2=BC^2+BD^2-2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$ (dans le triangle BCD)

Donc : $CD^2=2+2-2(-\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}$

Or $4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2$; par suite : $CD=1+\sqrt{3}$

3) a) Preuve de $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

On a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

$$=AB^2-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

Or $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=1$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=-\sqrt{3}$,

$AB^2=2$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$ (car (BC) ⊥ (AB))

par conséquent : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

b) • Vérification de $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\widehat{DAC}=\widehat{DAB}+\widehat{BAC}$

Or ABC est un triangle rectangle isocèle en B,

donc $\widehat{BCA}=\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$. On a, par ailleurs, $\widehat{DAB}=\frac{\pi}{3}$

Donc : $\widehat{DAC}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

• Valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

Donc : $AC\times AD\times\cos\widehat{DAC}=1-\sqrt{3}$

Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC, on a : $AC=AB\times\sqrt{2}$

Or $AB=\sqrt{2}$, donc AC = 2.

On en déduit $2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3}$

Donc $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$$

d'où : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2 Ensembles de points

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$ tels que : AB = 6.

I est le milieu de [AB].

1) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$$

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$MA^2-MB^2=-12$$

3) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$MA^2+MB^2=36$$

Solution

1) Déterminons l'ensemble ($\mathscr{C}$)

On sait que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-9$ (car AB = 6)

M ∈ ($\mathscr{C}$) équivaut successivement à :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$$

$$MI^2-9=7$$

$$MI^2=16$$

$$MI=4$$

L'ensemble ($\mathscr{C}$) est don le cercle de centre I et de rayon 4.

2) Déterminons l'ensemble (Δ)

On sait que : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

ou encore : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}$

où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

M ∈ (Δ) équivaut successivement à :

$$MA^2-MB^2=-12$$

$$2\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=-12$$

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=-6$$

Le produit scalaire étant négatif, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont de sens contraires.

Ainsi M ∈ (Δ) signifie que − IH × AB = −6

ou encore que IH = 1 (car AB = 6)

Il s'ensuit que (Δ) est la droite perpendiculaire à (AB) au point H tel que : $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

3) Déterminons l'ensemble (Γ)

D'après le théorème de la moyenne, on a :

$$MA^2+MB^2=MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+18$

M ∈ (Γ) équivaut successivement à :

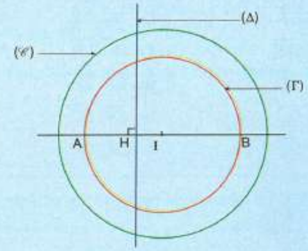
$$MA^2+MB^2=36$$

$$2MI^2+18=36$$

$$MI^2=9$$

$$MI=3$$

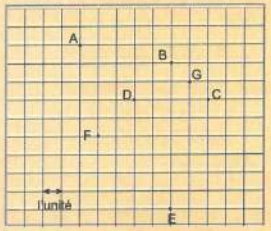
Donc (Γ) est le cercle de centre I et de rayon 3.



Exercices d'application

Définition

1 En utilisant le quadrillage, calculer les points scalaires suivants :



1) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$ 2) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE}$

3) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$ 4) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EB}$

5) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$ 6) $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{DF}$

7) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ 8) $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BC}$

9) $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DE}$ 10) $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

2 Soit ABCD un losange de centre O, de côté de longueur 2 tel que : $\widehat{BAD}=60°$

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

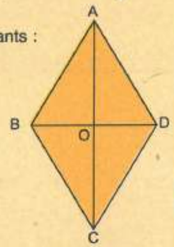
2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

4) $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DA}$

5) $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$

6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$



3 Soit ABCD un carré de centre O, de côté de longueur a.

Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

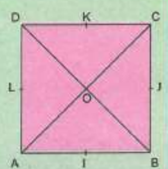
Calculer les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KO}$ 2) $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$ 4) $\overrightarrow{LJ}.\overrightarrow{BC}$

5) $\overrightarrow{LJ}.\overrightarrow{DB}$ 6) $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{KO}$

7) $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{KL}$ 8) $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{IL}$



4 Soient ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 2, et I le milieu du segment [BC].

Construire la figure puis calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}$

3) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$ 4) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IC}$

5) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BC}$ 6) $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

5 α étant une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$,

calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\|\vec{u}\|=6$; $\|\vec{v}\|=5$ et $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\|=4$ et $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

3) $\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}$; $\|\vec{v}\|=4$ et $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

4) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$; $\|\vec{v}\|=2$ et $\alpha=\pi$.

6 Déterminer, en radians, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ dans chacun des cas suivants :

1) $OA=8$; $OB=4$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=16$

2) $OA=\sqrt{2}$; $OB=3$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-3$

3) $OA=2\sqrt{2}$; $OB=\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=3\sqrt{2}$

4) $OA=1$; $OB=1$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-1$

Propriétés du produit scalaire

7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

En utilisant les propriétés du produit scalaire, simplifier les expression suivantes.

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2$

2) $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

4) $(2\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})+\vec{u}.\vec{v}$

5) $(\vec{u}+\vec{v})^2-\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2+3(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

8 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\|=\frac{1}{3}$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Calculer les produits scalaire suivants :

1) $(3\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-4\vec{v})$ 2) $(\vec{u}+3\vec{v}).(\frac{1}{3}\vec{u}-3\vec{v})$

3) $(3\vec{u}+2\vec{v})^2$ 4) $(\vec{u}+\sqrt{2}\vec{v})^2$

Calcul des distances et des angles

9 Soit ABC un triangle.

Déterminer les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

1) $AB=8$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$.

2) $AC=2\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{3}$ et $\widehat{ACB}=\frac{2\pi}{3}$.

3) $AC=6\sqrt{2}$, $\widehat{BAC}=\frac{7\pi}{12}$ et $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{4}$.

10 Soit ABC un triangle tel que : AB = 18cm, BC = 15cm.

et l'aire du triangle ABC est égal à $108cm^2$.

Montrer que le triangle ABC est isocèle.

11 Soit ABC un triangle tel que :

$AB=3$, $AC=\sqrt{21}$ et $BC=4\sqrt{3}$.

1) Calculer $\cos\widehat{ABC}$. En déduire la mesure de $\widehat{ABC}$.

2) Calculer $\cos\widehat{BAC}$ et $\cos\widehat{ACB}$.

Théorème de la médiane

12 Soit ABC un triangle tel que :

AB = AC = 7 et BC = 5.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Calculer les distances AI, BJ et CK.

13 Calculer les longueurs des médianes d'un triangle ABC sachant que :

AB = 3 , AC = 4 et BC = 6

Orthogonalité

14 Soit ABC un triangle tel que :

$AB=3$, $AC=1$ et $\cos\widehat{ABC}=\frac{-1}{3}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Soit E le point tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Soit I le milieu du segment [BC].

a) Exprimer $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les droit (AB) et (IE) sont perpendiculaires.

15 Soit ABC un triangle tel que :

$AB=\sqrt{2}$, $AC=1$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

Ensembles des points

16 Soient A et B deux points distincts du plan.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

2) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$MA^2-MB^2=0$$

3) Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que :

$$MA^2+MB^2=AB^2$$

17 Soient A et B deux points tels que : AB = 4.

Déterminer l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M du plan tels que :

$$MA^2+MB^2=10$$

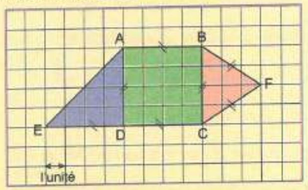
18 Soient A et B deux points tels que : AB = 10, et I le milieu de [AB].

Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$$

Exercices de renforcement des apprentissages

19 On considère la figure suivante :



Calculer les produits scalaires suivants :

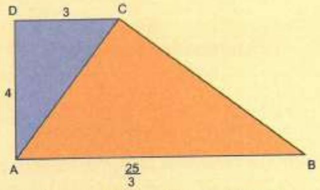
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$; 4) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BF}$

5) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{DA}$

20 Soit ABCD un trapèze rectangle tel que :

$AB=\frac{25}{3}$, $AD=4$ et $DC=3$



1) Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}$

2) Calculer les longueurs AC et BC.

3) a) Montrer que le triangle ACB est rectangle en C.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

Propriétés

21 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-1$

Calculer ce qui suit :

1) $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+3\vec{v})$

2) $(\sqrt{3}\vec{u}+\sqrt{2}\vec{v}).(\sqrt{3}\vec{u}-\sqrt{2}\vec{v})$

3) $(\vec{u}-\sqrt{3}\vec{v})^2+(\sqrt{3}\vec{u}+\vec{v})^2$

4) $\|\vec{u}+2\vec{v}\|^2+\|\sqrt{2}\vec{u}-\vec{v}\|^2$

22 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=a$ et $\|\vec{v}\|=b$.

1) Montrer que les deux vecteurs $b\vec{u}+a\vec{v}$ et $b\vec{u}-a\vec{v}$ sont orthogonaux quels que soient a et b de IR.

2) Soit $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ tel que :

$\|\overrightarrow{OA}\|=2$; $\|\overrightarrow{OB}\|=3$ et $\widehat{AOB}=30°$

a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}$.

b) Construire le point E tel que $\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OB}$.

c) Soit F le point tel que $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$.

Montrer que : $(OF)\perp(ED)$.

Orthogonalité

23 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ soient orthogonaux.

Montrer que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$.

24 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

2) Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$$

25 Soit ABC un triangle rectangle en A.

Soit H le projeté orthogonal du point A sur (BC).

1) En utilisant la projection orthogonale, montrer que :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BA}\right)^2$$

En déduire la relation correspondante avec les distances (les longueurs).

2) Déterminer une relation métrique analogue avec les longueurs dans le triangle ABC.

3) En utilisant les relations métriques précédentes, retrouver la formule :

$$AH^2=HB\times HC$$

26 On considère un carré ABCD.

Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

1) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA}$

2) En déduire que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

3) Sachant que AB = 4, calculer $\cos\left(\widehat{DJI}\right)$.

Calcul des distances et des angles

27 Soit ABC un triangle tel que :

$AB=3\sqrt{2}$; $AC=2\sqrt{3}$ et $BC=3+\sqrt{3}$.

1) Calculer $\cos\widehat{B}$ et $\cos\widehat{C}$. En déduire les mesures des angles du triangle ABC.

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Soit I le milieu du segment [BC].

Calculer AI.

28 Soit ABC un triangle tel que : $AB=2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3$

1) Calculer $\widehat{BAC}$.

2) Soit I le milieu de [BC].

Calculer BC et en déduire la valeur de AI.

Détermination de rapports trigonométriques

29 A l'intérieur d'un triangle rectangle ABC en A, on construit un triangle équilatéral DAB.

Soient I le milieu du segment [AB] et J le projeté du point D sur la droite (AC).

On suppose : AB = 6 et AC = 2.

1) Calculer AJ.

2) a) Calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

c) Calculer $\cos\widehat{DBC}$.

30 Soit ABC un triangle.

On pose : a = BC , b = CA et c = AB.

1) Développer le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)^2$.

2) En déduire que :

(*) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{\cos\widehat{A}}{a}+\frac{\cos\widehat{B}}{b}+\frac{\cos\widehat{C}}{c}$

3) Que devient l'égalité (*) dans le cas où ABC est un triangle équilatéral.

Ensembles de points

31 Soient A et B deux points du plan tels que : AB = 3.

Construire le point M dans chacun des cas suivants :

1) $AM=4$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=6$

2) $AM=\frac{7}{2}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-9$

5 $AM=2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=8$

32 Soient ABC un triangle et I le milieu de [BC].

1) Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant (ne dépend pas de M).

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MA}=0$

33 Soit A et B deux points tels que AB = 8cm.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que :

1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$; 2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=9$

3) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$; 4) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-25$

34 Soit A et B deux points tels que AB = 8cm.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $MA^2-MB^2=0$, 2) $MA^2-MB^2=64$

3) $MA^2-MB^2=-32$

35 Soit A et B deux points tels que AB = 8cm.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $MA^2+MB^2=64$, 2) $MA^2+MB^2=32$

3) $MA^2+MB^2=16$

Théorème de la médiane

35 Soit ABC un triangle de côtés de longueurs a, b et c.

On désigne par m_1, m_2 et m_3 les longueurs des médianes du triangle ABC.

Montrer que : $m_1^2+m_2^2+m_3^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

37 Soit ABCD un parallélogramme tel que :

$AD = 4$, $CD = 6$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$

Soit O le milieu de [AB].

1) Calculer BD et AC.

2) Montrer que quel que soit le point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

3) En déduire l'ensemlbe des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 24.$$

Exercices de synthèse

38 Soit ABCD un carré de côté de longueur 1.

On considère les deux points E et F tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AF} = 1$

2) Montrer que les droites (DF) et (AE) sont perpendiculaires.

3) a) Calculer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

b) En déduire $\cos\widehat{EAF}$

39 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que : AB = 3.

On considère les points K et L tels que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

1) Calculer $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{KL}$

2) Montrer que : $AK = \sqrt{5}$ et $KL = \sqrt{2}$

3) En déduire $\cos(\widehat{AKL})$

4) Soient I le milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Montrer que : $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{BC} = -\frac{9}{2}$

40 Soit ABC un triangle tel que :

$AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

1) a) Calculer BC.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

2) On considère le point D défini par : $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Soit I le milieu du segment [AB].

Montrer que les droites (CD) et (AI) sont perpendiculaires.

41 Soient ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$,

I le milieu du segment [BC].

On pose AB = a.

1) Calculer BC en fonction de a.

2) Calculer AI en fonction de a.

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = AI^2$

En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

4) Soit K le milieu du segment [AC].

Soit K' le projeté orthogonal du point K sur (BC)

Montrer que : $\overrightarrow{BK'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

42 Soient ABC un triangle isocèle tel que :

$AB = AC$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}$

1) Calculer le distances AB et BC.

2) a) Montrer que : $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Calculer alors : $\cos\frac{5\pi}{12}$

b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Calcul d'aires

43 Soit ABC un triangle.

On pose : a = BC , b = CA , C = AB et $\widehat{ACB} = \alpha$

A l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés ABDE, ACFG et BCLK.

On désigne par S_1 la somme des aires des carrés ACFG et BCLK, et par S_2 la somme des aires du triangle ABC et du carré ABDE.

1) Exprimer S_1 et S_2 en fonction de a, b, c et α.

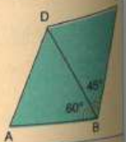
2) Montrer que : $S_1 = S_2$ si et seulement si $\tan\alpha = 4$.

44 ABCD est un quadrilatère, tel que :

BC = 6, AD = 6.

AB = 3, $\widehat{ABD} = 60°$ et $\widehat{DBC} = 45°$.

Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.

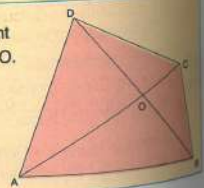


45 Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en O.

Soit S l'aire de ABCD.

Montrer que :

$$S = \frac{1}{2}AC \times BD\sin(\widehat{BOC})$$



Ensembles des points

46 Soit ABC un triangle.

Déterminer et construire, dans chaque cas suivant l'ensemble des points M du plan tels que :

1 $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2$

2) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} < 0$

3 $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} < -AB^2$

4) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

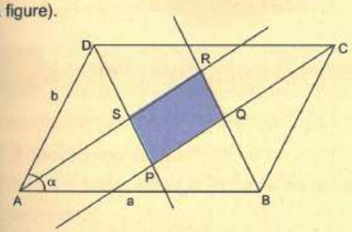
5) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$

Problèmes

47 Soit ABCD un parallélogramme.

On pose : AB = a , AD = b et $\widehat{DAB} = \alpha$

Soient P, Q, R, S les points d'intersection des bissectrices des angles du parallélogramme (comme cela est indiqué sur la figure).



1) Montrer que le quadrilatère PQRS est rectangle.

2) Montrer les relations suivantes:

$RA = PC = a\cos\frac{\alpha}{2}$; $RB = PD = a\sin\frac{\alpha}{2}$

$SA = QC = b\cos\frac{\alpha}{2}$; $BQ = DS = b\sin\frac{\alpha}{2}$

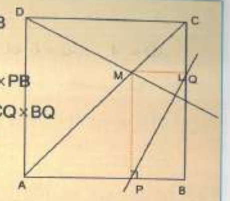
3) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

4) En utilisant l'aire du parallélogramme ABCD et les aires des deux triangles ASD et ARB, montrer que l'aire du rectangle PQRS est égale à $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$.

5) **Application** : Calculer l'aire du rectangle PQRS sachant que : a = 7cm, b = 5cm et $\alpha = 60°$

48 Soit ABCD un carré et M un point appartenant à la diagonale [AC].

Soient P et Q les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) et (BC).



1) Prouver que QC = QM = PB

et que : BQ = PM = AP.

2) Montrer que : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{PB} = AP \times PB$

et que : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{BQ} = -CQ \times BQ$

3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{PQ}$

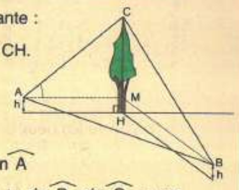
Que peut-on en déduire ?

Hauteur d'un arbre

49 On considère la figure suivante :

On veut calculer la hauteur CH.

Soit M un point de [CH] tel que HM = h (voir figure)



1) Montrer que : $CM = AC\sin\widehat{A}$

2) Exprimer AC en fonction de $\sin\widehat{B}$, $\sin\widehat{C}$ et AB.

3) **Application** :

$AB = 20m$; $h = 1,5m$; $\widehat{A} = 45°$; $\widehat{B} = 75°$; $\alpha = 60°$

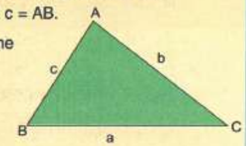
a) Déterminer $\widehat{C}$ et AC.

b) Déterminer la valeur exacte de la longueur CH. En déduire une valeur approchée de CH à 10^{-2} près.

Formule de Héron

50 Soit ABC un triangle d'aire S et de périmètre 2p.

On pose : a = BC, b = CA et c = AB.



1) a) En utilisant le théorème d'Al-Kashi, exprimer $1-\cos^2\widehat{A}$ en fonction de a, b et c.

b) En déduire que :

$$4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = (a+b+c)(a+b-c)(c+b-a)(c-b+a)$$

2) Prouver que : $\sin^2\widehat{A} = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$

En déduire que : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3) **Applications** :

a) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté de longueur 6m.

b) Calculer l'aire d'un triangle de côtés de longueurs 5cm, 6cm et 4cm.

Fonctions numériques
Généralités

Capacités attendues

* Reconnaître la variable et l'ensemble de définition d'une fonction définie par un tableau de données, par une courbe ou par une expression.
* Lecture de l'image d'un nombre et détermination d'un nombre dont l'image est donnée, à partir de la représentation graphique d'une fonction.
* Déduire les variations d'une fonction ou les maxima et les minima à partir de la représentation graphique.
* Utilisation de la représentation graphique pour étudier certaines équations et inéquations.

Contenu

● Activités préparatoires

- Fonction numérique d'une variable réelle et son ensemble de définition
- Représentation graphique d'une fonction numérique
- Fonction paire et fonction impaire
- Sens de variation d'une fonction
- Maxima et minima d'une fonction
- Majoration et minoration d'une fonction sur un intervalle
- Solutions d'une équation de la forme $f(x) = b$
- Solutions d'une inéquation de la forme $f(x) > b$ ou de la forme $f(x) < b$
- Utilisation de la calculatrice pour programmer les valeurs d'une fonction et la représenter graphiquement

● Définitions et règles

- Fonction numérique d'une variable réelle et son ensemble de définition
- Représentation graphique d'une fonction numérique
- Egalité de deux fonctions
- Fonction paire et fonction impaire
- Variations d'une fonction
- Maxima et minima d'une fonction

● Points essentiels

● Exercices résolus

● Exercices et problèmes

ACTIVITE 1 Fonction numérique d'une variable réelle et son ensemble de définition

Sur la figure ci-contre, M est un point qui décrit un demi-cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre de longueur égale à 2.

On pose AM = x et BM = $f(x)$.

1) Ecrire la relation liant x et $f(x)$.

2) a) Calculer la distance BM dans le cas où $AM = \frac{3}{2}$.

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ est appelé **image** du nombre $\frac{3}{2}$ par la fonction f.

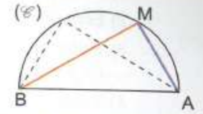
b) Quels sont les nombres réels x qui ont une image par la fonction f ?

L'ensemble de ces nombres est appelé **ensemble de définition de la fonction** f. (Il est généralement noté D_f).

3) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+2}$; $f_4 : x \mapsto 3x^2+x+1$

$f_5 : x \mapsto x\sqrt{x^2-1}$; $f_6 : x \mapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$; $f_7 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$



- La distance x varie selon la position du point M sur ($\mathscr{C}$).
- La relation qui lie x au nombre $f(x)$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x ; on la note $f : x \mapsto f(x)$ image de x par la fonction f

ACTIVITE 2 Représentation graphique d'une fonction numérique

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto |x-1| - 2|x|$

1) Ecrire $f(x)$ sans utiliser le symbole de la valeur absolue (selon les valeurs de x).

2) Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de la fonction f.

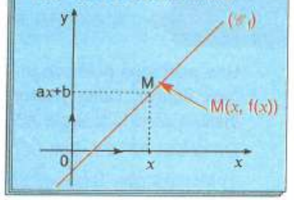
3) a) Parmi les points suivants, quels sont les points qui appartiennent à ($\mathscr{C}_f$) ?

A(2; 3) ; B(1; –2) ; C(–2; –7)

b) Déterminer le point D de ($\mathscr{C}_f$) dont l'abscisse est 5.

c) Déterminer les deux points E et F de ($\mathscr{C}_f$) d'ordonnée –3.

On sait que la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ est une droite.



ACTIVITE 3 Fonction paire et fonction impaire

A On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto x^3$

1) Vérifier que, pour tout x de IR : $f_1(-x) = f_1(x)$ et $f_2(-x) = -f(x)$

2) Le plan est rapporté à un repère **orthogonal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) les représentations graphiques respectives des deux fonctions f_1 et f_2.
Soient M_1 et M_2 deux points appartenant respectivement à ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$), d'abscisse x.
M'_1 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des ordonnées.
M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à l'origine O du repère.
Montrer que : M'_1 appartient à ($\mathscr{C}_1$) et M'_2 appartient à ($\mathscr{C}_2$)

B Soient les fonctions $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto |x-1| - |x+1|$

1) Montrer que : $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$ pour tout x de IR.

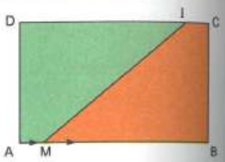
2) Ecrire $f(x)$ en fonction de x dans le cas où $x \geq 0$, puis construire $(\mathscr{C}_f)$.

3) Ecrire $g(x)$ en fonction de x dans chacun des deux cas suivants $0 \leq x \leq 1$ et $x \geq 1$, puis construire $(\mathscr{C}_g)$.

4) Vérifier que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

ACTIVITE 4 Sens de variation d'une fonction

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle de longueur AB = 4 et de largeur BC = 3.



I est un point de [DC] tel que IC = 1.

M est un point mobile sur [AB] de A vers B.

On pose AM = x et soit $f(x)$ l'aire du domaine coloré en vert du rectangle et $g(x)$ l'aire du domaine coloré en orange.

1) Calculer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

2) M_1 et M_2 sont deux positions différentes du point M sur [AB].

On pose $AM_1 = x_1$; $AM_2 = x_2$ où $x_1 < x_2$.

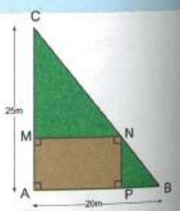
Montrer que $f(x_1) < f(x_2)$ et $g(x_1) > g(x_2)$.

3) Représenter graphiquement les fonctions f et g.

4) Soit $\ell(x)$ l'aire du triangle MIC. Montrer que $\ell(x_1) = \ell(x_2)$

- **Noter que plus x croît, plus l'aire $f(x)$ croît et l'aire $g(x)$ décroît.**
- **L'aire $\ell(x)$ est constante.**

ACTIVITE 5 Maxima et minima d'une fonction



Une personne possède un terrain sous la forme d'un triangle ABC rectangle en A (voir figure). Cette personne veut construire une maison rectangulaire AMNP inscrite dans le triangle ABC et ayant la plus grande aire possible.

On pose : AP = x. Soit $S(x)$ l'aire du rectangle AMNP.

1) Montrer que $S(x) = \frac{5}{4}x(20-x)$ pour tout x de]0; 20[.

2) a) Vérifier que $S(x) = 125 - \frac{5}{4}(x-10)^2$

En déduire que $S(x) \leq 125$ pour tout x de]0; 20[.

b) Calculer S(10) puis en déduire les dimensions de la maison qui a la plus grande aire.

3) Soit $S'(x)$ l'aire de la partie restante du terrain (partie colorée en vert).

a) Montrer que : $S'(x) = 125 + \frac{5}{4}(x-10)^2$

b) En déduire que $125 \leq S'(x)$ et que la plus petite valeur de l'aire $S'(x)$ est $125m^2$.

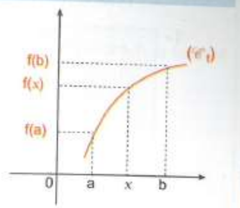
ACTIVITE 6 Majoration et minoration d'une fonction sur un intervalle

1- f est une fonction définie sur un intervalle I.

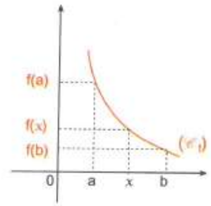
Soient a et b deux éléments de I tels que a < b

a) Montrer que si f est croissante sur I et $a \leq x \leq b$, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

b) Montrer que si f est décroissante sur I et $a \leq x \leq b$, alors $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$



2- Applications : Encadrement d'une expression en utilisant la monotonie d'une fonction sur un intervalle



a) On considère la fonction numérique f : $f : x \mapsto x^2 + 4x + 5$

- Etudier les variations de f sur l'intervalle I = [–2; + ∞[.
- Montrer que si $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $2 \leq x^2+4x+5 \leq \frac{29}{4}$

b) On considère la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

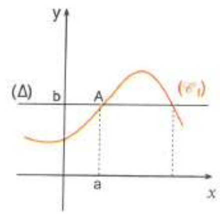
- Montre que g est strictement décroissante sur l'intervalle J =]1; + ∞[.
- Montrer que si $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$, alors $\frac{11}{4} \leq \frac{2x+1}{2x-1} \leq 8$

ACTIVITE 7 Solutions d'une équation de la forme $f(x) = b$

1- f est une fonction numérique définie sur D_f, b est un nombre réel, (Δ) est la droite d'équation y = b et $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que si l'équation $f(x) = b$ admet une solution a de D_f (c'est-à-dire f(a) = b) , alors (Δ) coupe $(\mathscr{C}_f)$ au point A(a, b) (au moins).

b) Montrer que si (Δ) coupe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse a, alors a est une solution de l'équation $f(x) = b$.

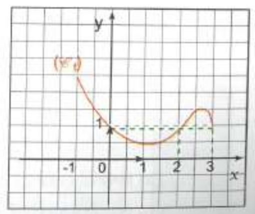


2- Applications : Résolutions graphique ou algébrique d'une équation de la forme $f(x) = b$

a) • Représenter graphiquement la fonction f : $f : x \mapsto |2x-3|$

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ (résoudre graphiquement revient à déterminer les solutions en utilisant le graphique).
- Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$ (résoudre algébriquement signifie déterminer les solutions par le calcul).
- L'équation $f(x) = -4$ admet-elle des solutions ?

b) Déterminer, à partir de la représentation ci-contre, les solutions de de l'équation $f(x) = 1$ où f est une fonction définie sur l'intervalle I = [–1; 3].



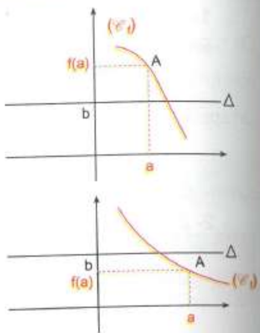
c) Montrer que la courbe de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$ coupe l'axe des abscisses.

ACTIVITE 8 Solutions d'une inéquation de la forme $f(x) > b$ ou $f(x) < b$

1- f est une fonction numérique d'ensemble de définition D_f, b est un nombre réel, (Δ) est la droite d'équation $y = b$ et $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que : L'inéquation $f(x) > b$ admet une solution a de D_f (i.e. $f(a) > b$) signifie qu'il existe un point A de $(\mathscr{C}_f)$, d'abscisse a, situé au-dessus de (Δ).

b) Montrer que : L'inéquation $f(x) < b$ admet une solution a de D_f (i.e. $f(a) < b$) signifie qu'il existe un point A de $(\mathscr{C}_f)$, d'abscisse a, situé au-dessous de (Δ).



2- Applications : Résolutions graphiques ou algébriques d'une inéquation : $f(x) > b$ ou $f(x) < b$

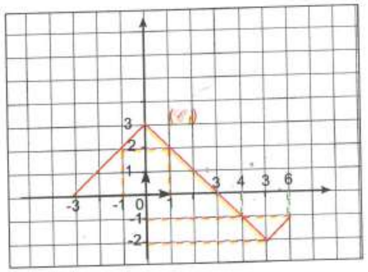
a) • Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto |2x - 5|$.

• Résoudre graphiquement chacune des deux inéquations : $f(x) > 3$; $f(x) < 3$.

• Résoudre algébriquement chacune des deux inéquations : $f(x) > 3$; $f(x) < 3$.

b) Déterminer, à partir de la représentation graphique ci-dessous, les solutions de chacune des deux inéquations suivantes : $f(x) > 2$ et $f(x) < -1$ où f est définie sur l'intervalle $[-3; 6]$.

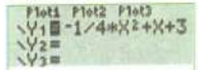
• Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x de $[-3; 6]$.

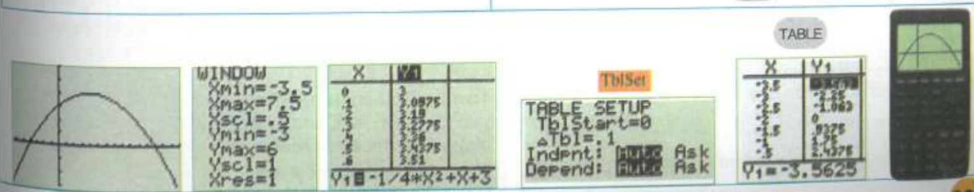


ACTIVITE 9 Utilisation de la calculatrice pour programmer les valeurs d'une fonction et la représenter graphiquement

Cette activité expose comment utiliser les calculatrices scientifiques programmables pour trouver, déclarer et afficher les images de certains nombres par une fonction numérique et pour construire sa courbe sur l'écran. Les fonctions qui vont être utilisées sont propres à deux types A et B de calculatrices programmables les plus largement usitées (Consulter le guide de la calculatrice).

On te présente ici les étapes qu'il faut suivre pour programmer la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ sur l'intervalle $\left[-\frac{7}{2}; \frac{15}{2}\right]$.

Type A	Type B
Stockage de l'expression de f dans la mémoire de la calculatrice	
- On appuie sur la touche mode, le choix doit être : **Func**, puis on valide par Enter - On appuie sur la touche Y = - A droite de l'écriture Y_1 =, on écrit l'expression $f(x)$ comme suit de la gauche vers la droite (-) 1 ÷ 4 X X,T x^2 + X,T + 3 (La touche X,T ou X,T,θ,n permet d'écrire la lettre x)	- On choisit le menu TABLE, puis on appuie sur la touche EXE - A droite de l'écriture Y_1 = , on écrit : (-) 1 ÷ 4 X X,T x^2 + X,T + 3 EXE 
Obtention d'un tableau de valeurs de la fonction f	
- On appuie sur la touche 2nd [TBLSET] - Sur l'écran TABLE SETUP et à droite de Tblstart =, on écrit –3. - A droite de ΔTbl =, on écrit 0,5 puis on se place sur : Auto - On appuie sur la touche 2nd [TABLE] (On a ainsi partagé l'intervalle [–3, 5 ; 7,5] en segments de longueurs 0,5)	- On appuie sur la touche F_5, puis à droite de : **Start**, on écrit –3 et on appuie sur EXE - A droite de : **End**, on écrit 3 puis EXE - A droite de : **pitch**, on écrit 0,5 puis EXE - On appuie sur la touche F_6
Tracé de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f	
- On appuie sur la toute Window, puis on écrit : $X_{min} = -3,5$ et $X_{max} = 7,5$ $Y_{min} = -3$ et $Y_{max} = 6$ - On appuie sur la touche GRAPH et la courbe apparaît sur l'écran.	- On choisit le menu GRAPH - On appuie sur F_3 SHIFT - On écrit $X_{min} = -3,5$ et $X_{max} = 7,5$ $Y_{min} = -3$ et $Y_{max} = 6$ puis EXE - On appuie sur la touche F_6



1 Fonction numérique d'une variable réelle et son ensemble de définition

Définition Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction numérique que d'une variable réelle x.
- Si $f(x)$ existe (c'est-à-dire appartient à IR), on dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
- L'ensemble constitué de tous les nombres x qui ont une image par la fonction f, est appelé **ensemble de définition** de f et se note D_f.

Exemples et applications

- Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \frac{2x}{x-1}$.
L'expression $\frac{2x}{x-1}$ est définie si $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq 1$.
Donc l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ (ou encore $D_f = IR \setminus \{1\}$).
- On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+3}$.
L'expression $\sqrt{2x+3}$ est définie si $2x + 3 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \geq -\frac{3}{2}$.
Donc l'ensemble de définition de g est $D_g = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
- Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3-x}}{x} \quad ; \quad g : x \mapsto \sqrt{x^2-2x-3} \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{2x-1}{(x-1)\sqrt{x}}$$

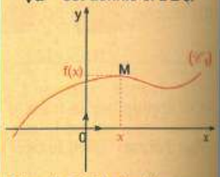
2 Représentation graphique d'une fonction numérique

Définition Soit f une fonction numérique définie sur D_f.
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
- La représentation graphique de la fonction f est constituée de tous les points $M(x; y)$ du plan tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.
- La représentation graphique de la fonction f s'appelle aussi **la courbe** de f et se note $(\mathscr{C}_f)$; $y = f(x)$ est appelée équation de $(\mathscr{C}_f)$.

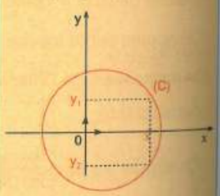
Exemple et application

- Soit la fonction $f : x \mapsto |2x-1|$. On a : $D_f = IR$.
  - On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; donc le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
  - Le point $B(2; 5)$ n'appartient pas à $(\mathscr{C}_f)$ puisque $f(2) = 3$ et que $f(2) \neq 5$.
  - Construisons la courbe $(\mathscr{C}_f)$. On a : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \\ f(x) = -2x + 1 \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$
  Soient $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $I' = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$
  $(\mathscr{C}_f)$ est la réunion des représentations graphiques de f sur I et I' qui sont deux demi-droites d'origine $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ (voir figure ci-contre).
- Représenter graphiquement la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = 4x + 3 & \text{si } x < -2 \\ g(x) = -5 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ g(x) = -2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Une fonction numérique d'une variable réelle x est toute relation qui à chaque x associe au plus une image $f(x)$ (c'est-à-dire si $f(x)$ existe, alors elle est unique).
- La relation $f : x \mapsto x^2$ à chaque réel x, elle associe son carré.
- La relation $g : x \mapsto \sqrt{x}$ associe à x sa racine carrée. $\sqrt{x}$ existe dans le cas où $x \geq 0$.
Les nombres réels négatifs (strictement) n'ont pas d'image par la fonction g.
Ainsi : $D_g = [0, +\infty[$.
- a et b étant des nombres réels, le nombre $\frac{a}{b}$ est définie si $b \neq 0$ et le nombre $\sqrt{a}$ est définie si $a \geq 0$.



$M(x, y) \in (\mathscr{C}_f)$ signifie que : $x \in D_f$ et $y = f(x)$

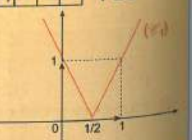


Un cercle (C) n'est pas la courbe d'une fonction puisqu'au réel x (voir figure) sont associés deux réels distincts y_1 et y_2.

- Tableau de quelques valeurs de f

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	1	0	1

$0 \in I'$
$\frac{1}{2} \in I \cap I'$
$1 \in I$



3 Egalité de deux fonctions

Définition f et g sont deux fonctions numériques, D_f et D_g leurs ensembles de définitions respectifs.
On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si :
$D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x de D (où $D = D_f = D_g$)

Exemple et application

- On considère les deux fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^3+x^2}$ et $g : x \mapsto |x|\sqrt{x+1}$
  - Notons que $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$ et $x^2 \geq 0$. Donc $f(x)$ et $g(x)$ sont définies si $x + 1 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \geq -1$.
  Ainsi $D = D_f = D_g = [-1; +\infty[$
  - Soit x de D.
  On a $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)} = \sqrt{x^2}.\sqrt{x+1}$
  $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$
  Donc : $f(x) = g(x)$ pour tout x de D.
  D'où : $f = g$.
- Soient les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{x^2}}$ et $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}$
Montrer que $f = g$.

4 Fonction paire et fonction impaire

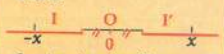
Définition Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
- Dire que f est une fonction paire signifie que :
Pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Dire que f est une fonction impaire signifie que :
Pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemples et applications

- Soient la fonction $f : x \mapsto x^4 - x^2$. On a : $D_f = IR$. Ainsi, il est clair que si $x \in IR$, alors $-x \in IR$. Calculons $f(-x)$.
On a : $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2$.
Donc : $f(-x) = f(x)$ quel que soit x de IR. D'où f est une fonction paire.
- Soit la fonction $g : x \mapsto x^3 + x$. On a : $D_g = IR$.
Pour tout x de IR, on a $-x \in IR$.
On a : $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$
$g(-x) = -(x^3 + x)$
Donc : $g(-x) = -g(x)$ pour tout x de IR. D'où g est une fonction impaire.
- Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto x\sqrt{x^2-1}$; $g : x \mapsto |x-2| - |x+2|$; $h : x \mapsto (x+3)\sqrt{x^2-4}$

- $f = g$ signifie que f et g ont le même ensemble de définition D et que tout élément de D a la même image par les deux fonctions f et g.
Il est est évident que si $f = g$, alors $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont confondues.
- Les deux fonctions :
$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$
ne sont pas égales car $D_f =]0; +\infty[$ et $D_g = [0; +\infty[$; donc $D_f \neq D_g$.
Remarquer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x > 0$, f n'est pas définie en 0 alors que g est définie en 0.

- $x \in D_f$ et $-x \in D_f$ signifie que D_f est symétrique par rapport à zéro.

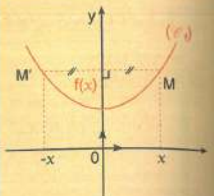


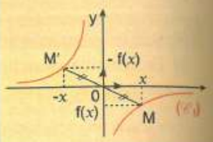
- f est paire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés de D_f ont la même image par f.
- f est impaire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés de D_f ont des images opposées.
- n étant un nombre entier naturel non nul et a un nombre réel, on a :
$(-a)^n = a^n$ si n est pair ;
$(-a)^n = -a^n$ si n est impair.
- La fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.
(D_f = IR) Voici un contre-exemple :
$1 \in D_f$, $-1 \in D_f$.
$f(-1) = 0$; $f(1) = 2$
$f(1) \neq f(-1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.

Propriété Courbe d'une fonction paire - Courbe d'une fonction impaire

Soient f une fonction numérique et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- f est paire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport au point O origine du repère.





Preuve :

- Soit f une fonction paire. Soient M un point de $(\mathscr{C}_f)$, d'abscisse x et M' le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
  Montrer que $(-x; f(x))$ est le couple de coordonnées du point M' et que $M' \in (\mathscr{C}_f)$. En déduire que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
- Soit f une fonction impaire. Soient M un point de $(\mathscr{C}_f)$, d'abscisse x et M' le symétrique de M par rapport au point O origine du repère.
  Montrer que $(-x; -f(x))$ est le couple de coordonnées du point M' et que M' appartient à $(\mathscr{C}_f)$. En déduire que O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Applications

Soit f une fonction paire définie sur IR et soit g une fonction impaire définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

- Compléter le tracé de chacune des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ (sur les figures (1) et (2) ci contre).
- Calculer les images des nombres $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$ par f et par g.

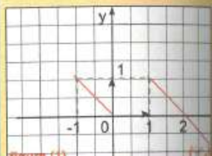


Figure (1)

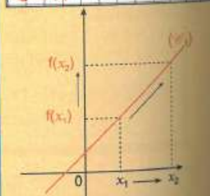
Figure (2)

5 Variations d'une fonction

5.1- Sens de variation d'une fonction

Définition Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

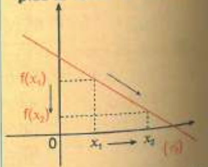
- f est croissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est strictement croissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est décroissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.



f croissante signifie que plus la valeur de x croît, plus la valeur de f(x) croît.

Exemples et applications

- La fonction $f: x \mapsto 3x-4$ est strictement croissante sur I = IR. En effet, pour tous x_1 et x_2 de IR, on a : Si $x_1 < x_2$, alors $3x_1 - 4 < 3x_2 - 4$ c'est-à-dire $f(x_1) < f(x_2)$.
- La fonction $g: x \mapsto -\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $I = [0; +\infty[$. En effet, pour tous x_1 et x_2 de I, on a : Si $x_1 < x_2$, alors $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ c'est-à-dire $-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$ ou encore $g(x_1) > g(x_2)$.
- Montrer que la fonction $f: x \mapsto |4x-3|$ est strictement croissante sur $I_1 = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $I_2 = \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$.



f décroissante signifie que plus x croît, plus f(x) décroît.

5.2- Fonction monotone

Définition Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est monotone sur I signifie que (f est croissante sur I ou f est décroissante sur I).
- f est strictement monotone sur I signifie que :
  f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I.

Exemples et applications

- Soit la fonction numérique $f: x \mapsto |x-1|+|x|$.
  Etudions la monotonie de f sur D_f.
  On a : $\begin{cases} f(x) = 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(x) = -2x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
  - Vérifier que f est strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1 = [1; +\infty[$ et $I_2 =]-\infty; 0]$.
  - f est-elle croissante sur $[0; +\infty[$? f est-elle décroissante sur $]-\infty; 0]$?
- Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On considère les deux fonctions :
  $f: x \mapsto ax+b$ et $g: x \mapsto ax^2$
  Montrer que f est strictement monotone sur IR et que g est strictement monotone sur chacun des intervalles $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 0]$.

5.3- Taux de variation d'une fonction

Définition Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, x_1 et x_2 deux éléments distincts de D_f.
Le nombre réel T tel que $T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est appelé taux de variation de f entre x_1 et x_2.

Exemples et applications

- Le taux de variation de la fonction $f: x \mapsto 3x-2$ entre deux éléments distincts x_1 et x_2 de IR, est : $T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{3x_2-2-3x_1+2}{x_2-x_1} = 3$
- Le taux de variation de la fonction $g: x \mapsto 5x^2$ entre deux éléments distincts de IR, est : $T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{5x_2^2-5x_1^2}{x_2-x_1} = \frac{5(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{x_2-x_1} = 5(x_2+x_1)$
- Calculer le taux de variation de chacune des fonctions $f: x \mapsto ax+b$ et $g: x \mapsto ax^2$ entre deux éléments distincts x_1 et x_2 de IR.

5.4- Variations et taux de variation

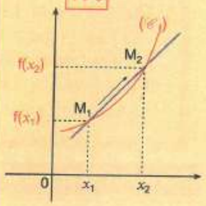
Propriété Soient f une fonction numérique et $T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ son taux de variation entre deux éléments distincts x_1 et x_2 d'un intervalle I inclus dans D_f.

- Si $T \geq 0$ pour tous x_1 et x_2 de I, alors f est croissante sur I.
- Si $T > 0$ pour tous x_1 et x_2 de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $T \leq 0$ pour tous x_1 et x_2 de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $T < 1$ pour tous x_1 et x_2 de I, alors f est strictement décroissante sur I.

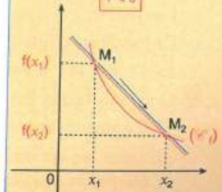
Remarques :

- **Etudier la monotonie ou les variations de f sur D_f signifie déterminer les intervalles I inclus dans D_f tels que f soit monotone ou strictement monotone sur I.**
- **Si f est strictement monotone sur un intervalle I, alors f est monotone sur cet intervalle ; mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple :**
  f est croissante sur [0; +∞[mais f n'est pas strictement croissante sur [0; +∞[parce qu'elle est constante sur [0, 1].
- **La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur]0; +∞[et sur]−∞; 0[. Cependant cette fonction n'est pas strictement décroissante sur IR* puisque −3 < 2, par exemple, mais l'inégalité f(−3) > f(2) est fausse.**
- **Noter que :**
  $$T = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

T > 0



T < 0



Remarquer que T est le coefficient directeur de la droite $(M_1 M_2)$.

Exemple et application

- On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 6x - 1$
  Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de IR.
  - Vérifier que $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 6$
  - Si x_1 et x_2 appartiennent à $I = [3, +\infty[$, alors $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 3$ et par suite $x_1 + x_2 \geq 6$; or $x_1 \neq x_2$ donc $x_1 + x_2 > 6$ c'est-à-dire $T > 0$.
    Donc f est strictement croissante sur $I = [3; +\infty[$.
  - Vérifier que f est strictement décroissante sur $I' =]-\infty; 3]$.
  - Pour résumer les variations de f sur IR, on consigne les résultats de l'étude sur un tableau en exprimant le fait qu'une fonction est croissante par une flèche montante et le fait qu'une fonction est décroissante par une flèche descendante. Ce tableau est appelé tableau de variation de f (voir tableau ci-contre).
- On considère la fonction $g: x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par deux méthodes différentes : En utilisant le taux de variation et en utilisant la définition.

5.5- Monotonie et parité d'une fonction

Propriété Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.
Soient I un intervalle de IR, inclus dans D_f et I' le symétrique de I par rapport à 0.
- Dans le cas où f est paire, on a :
  - Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur I'.
  - Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur I'.
- Dans le cas où f est impaire, alors :
  f a le même sens de variation sur I et sur I'.

Exemples et applications

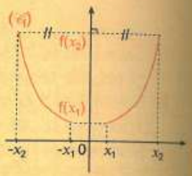
- La fonction $f: x \mapsto |x|$ est paire ; elle est croissante sur $I = [0; +\infty[$ et décroissante sur $I' =]-\infty; 0]$.
  La fonction $g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire ; elle est décroissante sur chacun des intervalles $I =]0; +\infty[$ et $I' =]-\infty; 0[$.
- On considère la fonction $f: x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$
  - Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est une fonction impaire.
  - Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $I_1 = \left]0; \sqrt{2}\right]$ et $I_2 = \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$
    Déterminer alors les variations de f sur les intervalles :
    $I'_1 = \left[-\sqrt{2}; 0\right[$ et $I'_2 = \left]-\infty; -\sqrt{2}\right]$
- f est une fonction paire définie sur [–4; 4] et son tableau de variation sur [0; 4] est le suivant.
  Donner le tableau de variations de f sur [–4; 0].

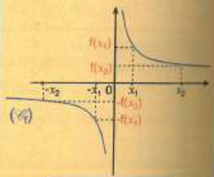
x	0		1		3		4
$f(x)$	–1	↗	2	→	2	↘	0

- Etudier les variations de f sur chacun des deux intervalles I et I' sans utiliser le taux de variation (Remarquer que : $f(x) = (x-3)^2 - 10$)
- Tableau de variations de f sur IR :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	–10	↗	

fonction paire





fonction impaire

- Noter que $I \subset D_f \cap IR^+$ et $I' \subset D_f \cap IR^-$
- Dans le cas d'une fonction paire, on a :
  $$\frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{(-x_2) - (-x_1)} = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
  et dans le cas d'une fonction impaire, on a :
  $$\frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{(-x_2) - (-x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- La flèche horizontale ⟶ signifie que la fonction est constante sur l'intervalle [1 ; 3].

14 DÉFINITIONS ET RÈGLES

6 Maxima et minima d'une fonction

Définition Soient f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.
- Dire que f(a) est le maximum (la valeur maximale) de la fonction f sur I signifie que : $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.
- Dire que f(a) est le minimum (la valeur minimale) de la fonction f sur I signifie que : $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.

Exemples et applications

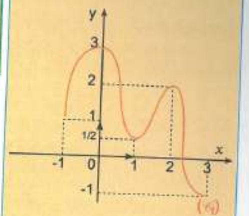
- La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f.
  - Le maximum de cette fonction f sur l'intervalle I = [–1; 3] est f(0) = 3 et son minimum sur le même intervalle est f(3) = –1.
  - Sur l'intervalle J = [1; 2], le maximum de f est f(2) = 2 et le minimum de f est $f(1) = \dfrac{1}{2}$
  - Noter que $f(x) \leq 3$ pour tout x de I = [–1; 3].
    Donc $f(x) \leq 4$ pour tout x de I. Cependant 4 n'est pas un maximum de la fonction f car il n'existe aucun réel a de I tel que f(a) = 4.
- On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4x + 7$.
  - Vérifier que : $f(x) \geq 3$ pour tout x de IR.
  - Calculer f(2), puis en déduire que 3 est le minimum de f sur IR.
- On considère la fonction $f: x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$
  - Montrer que, pour tout x de $I =]-\infty; 0[$: $f(x) \leq -2$.
  - Montrer que –2 est le maximum de f sur I.

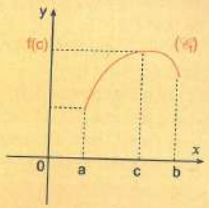
Remarque : Variations et valeurs maximales et minimales

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle [a; b] et soit c un réel tel que a < c < b.
  → Montrer que si f est strictement croissante sur [a; c] et f strictement décroissante sur [c; b], alors f(c) est le maximum de f sur [a; b].
  → Montrer que si f est strictement décroissante sur [a; c] et f strictement croissante sur [c; b], alors f(c) est le minimum de f sur [a; b].
- Donner le tableau des variations de la fonction f suivante et déterminer ses valeurs maximales et minimales sur chacun des intervalles I = [–4; 1] et I' = [–1; 3].

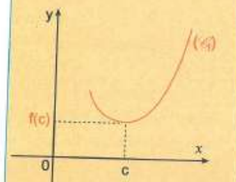
$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -1 \\ f(x) = -x - 2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = x - 4 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- Le maximum d'une fonction f sur I est la plus grande valeur prise par f sur I.
- Le minimum d'une fonction f sur I est la plus petite valeur prise par f sur I.





x	a		c		b
$f(x)$		↗	f(c)	↘	



x	a		c		b
$f(x)$		↘	f(c)	↗	

Exemple et application

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x - 1$

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de IR.

- Vérifier que $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 6$
- Si x_1 et x_2 appartiennent à $I = [3, +\infty[$, alors $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 3$ et par suite $x_1 + x_2 \geq 6$; or $x_1 \neq x_2$ donc $x_1 + x_2 > 6$ c'est-à-dire $T > 0$.
  Donc f est strictement croissante sur $I = [3; +\infty[$.
- Vérifier que f est strictement décroissante sur $I' =]-\infty; 3]$.
- Pour résumer les variations de f sur IR, on consigne les résultats de l'étude sur un tableau en exprimant le fait qu'une fonction est croissante par une flèche montante et le fait qu'une fonction est décroissante par une flèche descendante. Ce tableau est appelé tableau de variation de f (voir tableau ci-contre).

On considère la fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$. Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par deux méthodes différentes : En utilisant le taux de variation et en utilisant la définition.

5.5- Monotonie et parité d'une fonction

Propriété Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.

Soient I un intervalle de IR, inclus dans D_f et I′ le symétrique de I par rapport à 0.

- Dans le cas où f est paire, on a :
  - Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur I′.
  - Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur I′.
- Dans le cas où f est impaire, alors :
  f a le même sens de variation sur I et sur I′.

Exemples et applications

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est paire ; elle est croissante sur $I = [0; +\infty[$ et décroissante sur $I' =]-\infty; 0]$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire ; elle est décroissante sur chacun des intervalles $I =]0; +\infty[$ et $I' =]-\infty; 0[$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$

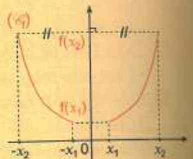
- Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est une fonction impaire.
- Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $I_1 =]0; \sqrt{2}]$ et $I_2 = [\sqrt{2}; +\infty[$
  Déterminer alors les variations de f sur les intervalles :
  $I'_1 = [-\sqrt{2}; 0[$ et $I'_2 =]-\infty; -\sqrt{2}]$

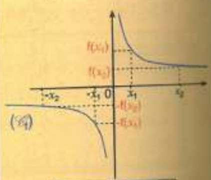
f est une fonction paire définie sur [–4; 4] et son tableau de variation sur [0; 4] est le suivant.
Donner le tableau de variations de f sur [–4; 0].

x	0	1	3	4
f(x)	–1 ↗	2 →	2 ↘	0

- Etudier les variations de f sur chacun des deux intervalles I et I′ sans utiliser le taux de variation (Remarquer que : $f(x) = (x-3)^2 - 10$)
- Tableau de variations de f sur IR :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	↘	–10	↗





- Noter que $I \subset D_f \cap IR^+$ et $I' \subset D_f \cap IR^-$
- Dans le cas d'une fonction paire, on a :
  $\frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{(-x_2) - (-x_1)} = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
  et dans le cas d'une fonction impaire, on a :
  $\frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{(-x_2) - (-x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
- La flèche horizontale → signifie que la fonction est constante sur l'intervalle [1 ; 3].

6 Maxima et minima d'une fonction

Définition Soient f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.

- Dire que f(a) est le maximum (la valeur maximale) de la fonction f sur I signifie que : $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.
- Dire que f(a) est le minimum (la valeur minimale) de la fonction f sur I signifie que : $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.

Exemples et applications

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f.

- Le maximum de cette fonction f sur l'intervalle I = [–1; 3] est f(0) = 3 et son minimum sur le même intervalle est f(3) = –1.
- Sur l'intervalle J = [1; 2], le maximum de f est f(2) = 2 et le minimum de f est $f(1) = \frac{1}{2}$
- Noter que $f(x) \leq 3$ pour tout x de I = [–1; 3].
  Donc $f(x) \leq 4$ pour tout x de I. Cependant 4 n'est pas un maximum de la fonction f car il n'existe aucun réel a de I tel que f(a) = 4.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 7$.

- Vérifier que : $f(x) \geq 3$ pour tout x de IR.
- Calculer f(2), puis en déduire que 3 est le minimum de f sur IR.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

- Montrer que, pour tout x de $I =]-\infty; 0[$: $f(x) \leq -2$.
- Montrer que –2 est le maximum de f sur I.

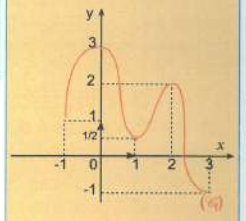
Remarque : Variations et valeurs maximales et minimales

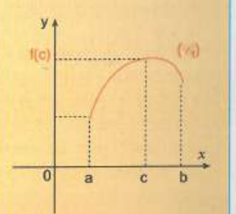
- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle [a; b] et soit c un réel tel que $a < c < b$.
  → Montrer que si f est strictement croissante sur [a; c] et f strictement décroissante sur [c; b], alors f(c) est le maximum de f sur [a; b].
  → Montrer que si f est strictement décroissante sur [a; c] et f strictement croissante sur [c; b], alors f(c) est le minimum de f sur [a; b].

Donner le tableau des variations de la fonction f suivante et déterminer ses valeurs maximales et minimales sur chacun des intervalles I = [–4; 1] et I′ = [–1; 3].

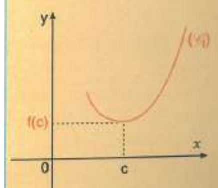
$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -1 \\ f(x) = -x - 2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = x - 4 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- Le maximum d'une fonction f sur I est la plus grande valeur prise par f sur I.
- Le minimum d'une fonction f sur I est la plus petite valeur prise par f sur I.





x	a	c	b
f(x)	↗	f(c)	↘



x	a	c	b
f(x)	↘	f(c)	↗

14 POINTS ESSENTIELS

Fonction numérique et son ensemble de définition

$f : x \mapsto f(x)$ est une fonction numérique d'une variable réelle x et D_f est son ensemble de définition.

- $x \in D_f$ signifie que ($x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathbb{R}$).
- Pour tout x de D_f : $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.

$x \in D_f$ signifie que f est définie en x c'est-à-dire que x a une image par f.

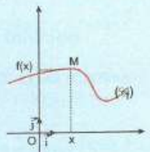
- P et Q sont deux polynômes.
  Si f = P, alors $D_f = \mathbb{R}$.
  Si $f = \frac{P}{Q}$, alors : $x \in D_f$ signifie que ($x \in \mathbb{R}$ et $Q(x) \neq 0$).
  Si $f = \sqrt{P}$, alors : $x \in D_f$ signifie que ($x \in \mathbb{R}$ et $P(x) \geq 0$).

Courbe d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction numérique définie sur D_f.

- L'ensemble des points $M(x; f(x))$ tels que $x \in D_f$ est la représentation graphique de la fonction f ou la courbe de f ; on la note $(\mathscr{C}_f)$.

$M(x; y) \in (\mathscr{C}_f)$ équivaut à :
($x \in D_f$ et $y = f(x)$).



- $y = f(x)$ est l'équation de $(\mathscr{C}_f)$.
- $(\mathscr{C}_f)$ passe par A(a; b) signifie que : $a \in D_f$ et a est une solution de l'équation $f(x) = b$.

Variations d'une fonction

f est une fonction, I est un intervalle inclus dans D_f, x_1 et x_2 deux éléments quelconques de I.

- f croissante sur I signifie que :
  si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est strictement croissante sur I signifie que :
  si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est décroissante sur I signifie que :
  si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est strictement décroissante sur I signifie que :
  si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.
- f est constante sur I signifie que : $f(x_1) = f(x_2)$.
- f est monotone sur I signifie que f est croissante sur I ou f est décroissante sur I.

Egalité de deux fonctions

f = g signifie que $\left\{\begin{array}{l}\textbf{f et g ont le même ensemble de définition D,}\\ \textbf{et } f(x) = g(x) \textbf{ pour tout } x \textbf{ de D.}\end{array}\right.$

$f(x)$ et $g(x)$ peuvent être des expressions d'écritures différentes mais égales sur D.

- Exemple : $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

pour tout x de D = [0, 1[∪]1, +∞[

Fonction paire - Fonction impaire

- f est paire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés ont la même image par f.
- f est impaire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés ont des images opposées par f.
- **f est paire signifie que :**
  Pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- **f est impaire signifie que :**
  Pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Maxima et minima d'une fonction

Soient f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.

- f(a) est le maximum de la fonction f sur I signifie que :
  $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.
- f(a) est le minimum de la fonction f sur I signifie que :
  $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.

Remarque : Si $f(x) \leq M$ pour tout x de I et s'il existe un réel a de I tel que M = f(a), alors M est le maximum de la fonction f sur I.

Propriétés

- f est une fonction impaire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- f est une fonction paire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (dans un repère orthogonal).
- Soit f une fonction dont l'ensemble D_f est symétrique par rapport à 0.
  Soient I un intervalle inclus dans D_f et I' son symétrique par rapport à 0.
  → Si f est paire et croissante sur I, alors f est décroissante sur I'.
  → Si f est impaire, alors f a le même sens de variation sur I et sur I'.

14 EXERCICES RESOLUS

1 Monotonie, maxima et minima

f est une fonction numérique impaire, définie sur l'intervalle [–4, 4] et telle que :

$f(x) = 2x^2 - 5x$ pour tout x de I = [0; 4].

1) a) Montrer que : $f(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ pour tout $x \in I$.

b) Etudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $I_1 = \left[0; \frac{5}{4}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{5}{4}; 4\right]$

c) Donner le tableau de variations de f sur [–4; 4].

2) Montrer que f admet un minimum sur I que l'on déterminera.

3) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x pour tout x de I' = [–4; 0].

Montrer que f admet un maximum sur I'.

Solution

1) a) Il suffit de développer $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$ pour obtenir la forme canonique de $f(x)$ sur I.

b) Soient x_1 et x_2 deux réels distincts de I.

On a : $f(x_2) - f(x_1) = 2\left[\left(x_2 - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(x_1 - \frac{5}{4}\right)^2\right]$

$f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1)\left(x_1 + x_2 - \frac{5}{2}\right)$

Donc le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est :

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 2\left(x_1 + x_2 - \frac{5}{2}\right)$$

- Dans le cas où x_1 et x_2 appartiennent à I_1,
  alors : $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{5}{4}$ et $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{5}{4}$
  donc : $0 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{2} \leqslant x_1 + x_2 - \frac{5}{2} \leqslant 0$
  Or $x_1 \neq x_2$, par suite $x_1 + x_2 - \frac{5}{2} < 0$
  c'est-à-dire T < 0.
  D'où f est strictement décroissante sur I_1.
- On démontre aisément que f est strictement croissante sur I_2 (le soin est laissé au lecteur)

c) f est une fonction impaire ; donc f a le même sens de variation sur $I_1 = \left[0; \frac{5}{4}\right]$ et $I'_1 = \left[-\frac{5}{4}; 0\right]$. De même, f a le même sens de variation sur $I_2 = \left[\frac{5}{4}; 4\right]$ et $I'_2 = \left[-4; -\frac{5}{4}\right]$.

D'où le tableau de variation de f sur [–4; 4] :

x	–4	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	4
$f(x)$	–12 ↗	$\frac{25}{8}$ ↘	0 ↘	$-\frac{25}{8}$ ↗	12

2) Montrons qu'il existe un réel a de I tel que $f(a) \leq f(x)$ pour tout x de I.

Pour tout x de I, on a : $0 \leqslant 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$;

donc $-\frac{25}{8} \leqslant 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ c'est-à-dire $-\frac{25}{8} \leqslant f(x)$.

Notons que : $f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{25}{8}$. Donc : $f\left(\frac{5}{4}\right) \leqslant f(x)$ pour tout x de I.

Ainsi $-\frac{25}{8}$ est le minimum de f sur I.

3) • Soit $x \in I'$; donc $-x \in I$ (car I' est le symétrique de I par rapport à 0).

Comme f est impaire, on : $f(x) = -f(-x)$.

Donc : $f(x) = -\left[2\left(-x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}\right]$

D'où : $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} = -2x^2 - 5x$ pour tout x de I'.

- On a : $f(x) \leqslant \frac{25}{8}$ pour tout x de I' et $\frac{25}{8} = f\left(-\frac{5}{4}\right)$

Donc $\frac{25}{8}$ est le maximum de f sur I'.

Remarque : On peut se référer au tableau de variations de f.

2 Monotonie et encadrement

On considère la fonction $f : \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-1}$ pour tout x de D_f où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

3) Etudier les variations de f sur I =]1; +∞[et sur J =]–∞; 1[.

4) Soit x un réel tel que $\frac{3}{2} < x < 2$. Montrer que $5 < f(x) < 8$.

Solution

1) f est définie en x signifie que $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.

Donc D_f =]–∞; 1[∪]1; +∞[.

2) En effectuant la division du binôme $2x + 1$ par $x - 1$, on trouve : $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ (On peut écrire : $f(x) = \dfrac{\alpha x - \alpha + \beta}{x-1}$).

3) Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de I ou de J. On a :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2 - 1} - \frac{3}{x_1 - 1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$$

donc : $T = \dfrac{-3}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$ (taux de variation entre x_1 et x_2).

On a : ($x_1 > 1$ et $x_2 > 1$) ou ($x_1 < 1$ et $x_2 < 1$) ; dans les deux cas $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ c'est-à-dire T < 0.

D'où f est strictement décroissante sur I et sur J.

4) On a : $\frac{3}{2} < x < 2$ et f est strictement décroissante sur I.

Donc : $f(2) < f(x) < f\left(\frac{3}{2}\right)$. D'où : $5 < f(x) < 8$.

Exercices d'application

Fonction numérique - Ensemble de définition - Image d'un nombre par une fonction - courbe

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de la variable réelle x dans chacun des cas suivants :

(1) $f : x \mapsto \frac{1}{3x-2}$; (2) $f : x \mapsto \frac{x}{|x|-2}$

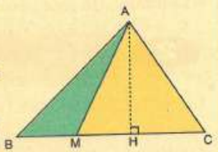
(3) $f : x \mapsto x^3 + x^2 - 2x + 1$; (4) $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

(5) $f : x \mapsto \sqrt{5x-7}$; (6) $f : x \mapsto \sqrt{x-4}$

(7) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{x}$; (8) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$

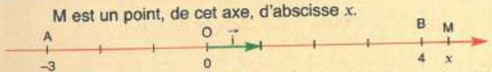
(9) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2-3x-2}$; (10) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$

2 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que :
BC = 7 et AH = 4
M est un point de [AB] tel que AM = x.



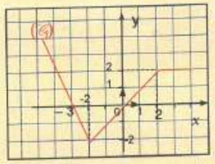
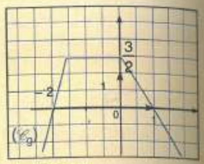
1) Définir les fonctions f et g telles que f(x) est l'aire du triangle ABM et g(x) est l'aire du triangle ACM, en précisant l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
2) Calculer l'image de 1 par chacune des fonctions f et g.
3) Existe-t-il une valeur du nombre x telle que :
f(x) = 6 ? g(x) = 6 ?
4) Représenter graphiquement les fonctions f et g dans le même repère.

3 A et B sont les deux points d'abscisses respectives –3 et 4 de l'axe gradué (O; $\vec{i}$) .
M est un point, de cet axe, d'abscisse x.



f est la fonction qui, à chaque x, associe la somme des distances MA + MB.
1) Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = |x+3| + |x-4|$$
2) Calculer les images par f des nombres 2, 5 et –4.
3) Ecrire f(x) sans valeur absolue (selon les valeurs de x).
4) Représenter graphiquement la fonction f.
5) Déterminer la position du point M sur l'axe pour que la somme des distances MA + MB soit égale à 11.

4 1) Calculer f(x) et g(x) en fonction de x en utilisant les courbes de f et g suivantes :

2) a) Calculer les images de 1 et –5 par f.
b) Quels sont les nombres dont l'image par f est égale à 2 ?
3) Quels sont les nombres dont l'image par g est égale à $\frac{3}{2}$.

5 Représenter graphiquement la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto |2x-1|$; 2) $f : x \mapsto |x| - 1$

3) $\begin{cases} f(x) = -2x+3 \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = 5x \text{ si } x > 0 \end{cases}$ 4) $f : x \mapsto |x+3| - |x|$

24 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$.
Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $(\mathscr{C})$?
A(0; –1), B(1; –6), C(–1; 4), $D\left(\sqrt{2},\ 3-3\sqrt{2}\right)$,
$E\left(\frac{1}{2};\ -3\right)$.
2) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
3) Quel est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'axe des ordonnées ?
4) Existe-t-il des points de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 1 ?

7 Le tableau suivant donne la température enregistrée pendant une journée d'été dans l'une des villes.

Heure	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Température	15	17	18	20	22	25	28	33	33	27	22	20	16

A chaque heure t, on associe la température T(t).
1) Représenter graphiquement la fonction $T : t \mapsto T(t)$ sur papier millimétré.
2) Déterminer approximativement la température à 13 h.
3) Déterminer la période où la température dépassait 22.

Egalité de deux fonctions

8 Dans chaque cas, les fonctions f et g sont-elles égales :

1) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}$ et $g(x) = \left|\sqrt{2}x - 1\right|$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

4) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

5) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^3-1)}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Fonctions paires et fonctions impaires

9 Dans chaque cas, la fonction f est-elle paire ? impaire ? ni paire, ni impaires ? (Justifier la réponse).

(1) $f : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$ (5) $f : x \mapsto x^4 + x$

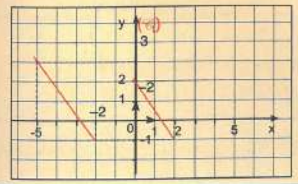
(2) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2-1}$ (6) $f : x \mapsto |x+3| + |x-3|$

(3) $f : x \mapsto |x|(x^2+x)$ (7) $f : x \mapsto \frac{x|x|}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $f : x \mapsto \frac{x^3}{|x|-1}$ (8) $f : x \mapsto \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$

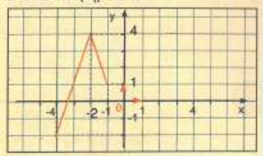
10 Soit f une fonction paire définie sur IR telle que :
$$\begin{cases} f(x) = -2x+8 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ f(x) = x-1 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$
1) Calculer f(–3) et f(2).
2) Représenter graphiquement la fonction f sur IR.

11 Soit f une fonction paire définie sur [–5; 5] :
1) Compléter la construction de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.
2) Calculer f(5).
3) Donner l'expression de f(x) pour tout x de [–5; –2].
4) Calculer f(–3) et f(3).



12 Soit f la fonction numérique : $f : x \mapsto |2x+5| - |2x-5|$
1) Montrer que f est une fonction impaire.
2) Calculer $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.
3) Ecrire f(x) en fonction de x, sans utilisation du symbole de la valeur absolue, dans chacun des deux cas suivants :
$$0 \leq x \leq \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x \geq \frac{5}{2}$$
4) Représenter graphiquement la fonction f.

13 Soit f une fonction impaire définie sur D = [–4; –1] ∪ [1; 4].
1) Compléter le tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
2) Déterminer f(4) et f(1).
3) Donner l'expression de f(x) en fonction de x pour tout x de [–4; –2] puis pour tout x de [2; 4].



Variations d'une fonction numérique

14 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de f sur l'intervalle I :

(1)	$f(x) = 3x - 4$	et	$I =]-\infty; +\infty[$
(2)	$f(x) = -5x + 7$	et	$I = IR$.
(3)	$f(x) = x^2 + 2x$	et	$I = [-1; +\infty[$.
(4)	$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$	et	$I =]-\infty; 1[$.
(5)	$f(x) = \sqrt{x} + x$	et	$I = [0; +\infty[$.

15 f est une fonction numérique paire, définie sur [–3; 3] et son tableau de variations sur [0; 3] est :

x	0		1		2		3
f(x)	4	↘	–1	↗	0	↘	–2

1) Donner le tableau de variations de f sur [–3; 0].
2) Représenter graphiquement f sur [–3; 3] sachant que f est une fonction affine par intervalles.

16 f est une fonction impaire définie sur l'ensemble E =]–∞; –2] ∪ [2; +∞[et son tableau de variations sur]–∞; –2] est le suivant :

x	–∞		–4		–2
f(x)		↗	2	↘	1

1) Donner le tableau de variations de f sur [2; +∞[.
2) Représenter graphiquement f sur E sachant que f est une affine par intervalles et f(–5) = 0.

Maxima et minima d'une fonction

17 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

1) Montrer que, pour tout x de IR, on a :
$f(x) = (x-2)^2 + 5$ et $f(x) \geq 5$.

2) Calculer f(2) puis en déduire que f admet un minimum sur IR.

18 Soit f la fonction numérique $f : x \mapsto -4x^2 + 4x + 5$

1) Montrer que, pour tout x de IR, on a :
$f(x) = 6 - (2x-1)^2$ et $f(x) \leq 6$

2) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ puis en déduire que f admet un maximum sur IR.

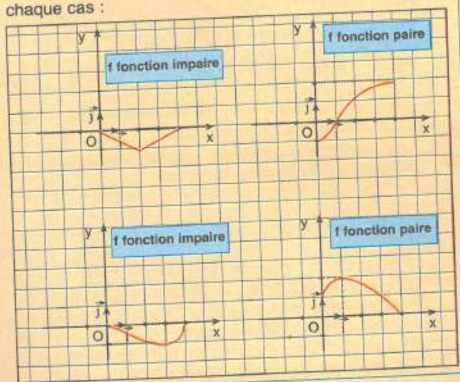
19 Soit la fonction numérique $f : x \mapsto x + \frac{4}{x}$

1) Montrer que 4 est le minimum de f sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$. Montrer que -4 est le maximum de f sur l'intervalle $I' =]-\infty; 0[$.

2) 0 est-il un maximum de la fonction f sur I' ?

3) Montrer que f est une fonction impaire et que f est monotone sur chacun des intervalles $]0; 2]$ et $[2; +\infty[$. Donner alors le tableau de variation de f sur D_f.

20 Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-4; 4]$. Compléter le tracé de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ selon les données de chaque cas :



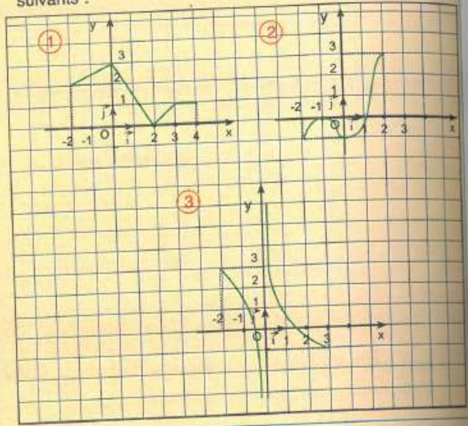
21 Etudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x-1| + |x+1|}$

3) $f(x) = \sin 2x\,(1 - \cos x)$; 4) $f(x) = \sin 3x \tan x$

5) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

22 Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de f sur l'ensemble D_f.
Donner le tableau de variation de f dans chacun des cas suivants :



23 Compléter le tableau de variations de f dans chacun des cas suivants :

① f fonction définie sur $[-4; 4]$ et paire

x	0	2	4
$f(x)$	2 ↘	-3 ↗	1

② f fonction définie sur $[-4; 4]$ et impaire

x	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	5 ↘	2

24 Etudier la monotonie de la fonction f sur I et J dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ et $I = IR$

2) $f(x) = \frac{3}{x}$ et $I =]0; +\infty[$ et $J =]-\infty; 0[$

3) $f(x) = |x - 2|$ et $I = [2; +\infty[$ et $J =]-\infty; 2]$

4) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ et $I = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

5) $f(x) = \sqrt{2}\,x - 4$ et $I = IR$.

25 Etudier la monotonie de f et construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans chacun des deux cas suivants :

(1) $\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = 3 - x & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ -x + 7 & \text{si } x \in]2; +\infty[\end{cases}$

26 Soit f la fonction numérique définie par :
$f(x) = |x - 2| - 2|x| + 3x$

1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue selon les valeurs de x.

2) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

27 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$f(x) = \frac{|x-2| + |x+2|}{|x| - 1}$$
Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe de f dans un repère orthonormal.

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de f.

2) Montrer que f est une fonction paire.

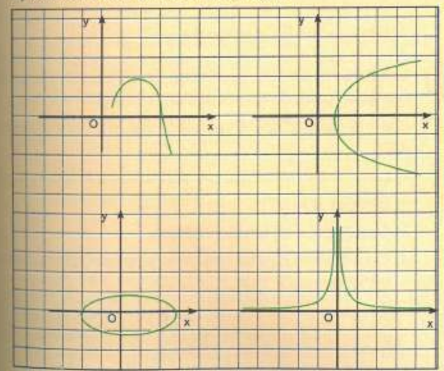
3) a) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; 2]$ et $[2; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

Exercices de renforcement des apprentissages

Ensemble de définition - Courbe d'une fonction

28 Parmi les courbes suivantes, déterminer celles qui représentent une fonction numérique.



29 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

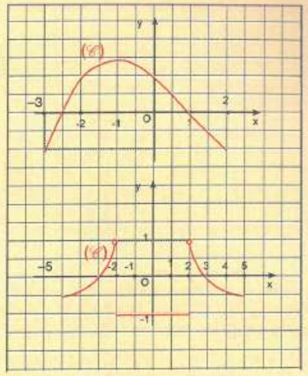
1) $f(x) = \dfrac{5x}{|x| + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 3|}$

3) $f(x) = \dfrac{x - 1}{(x-1)^2 - 4}$; 4) $f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

5) $f(x) = \sqrt{|x| + 7}$; 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$

7) $f(x) = \sqrt{-x}$; 8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$

30 Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer, dans chacun des deux cas suivants, l'ensemble de définition de la fonction f



31 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 30x + 25}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

3) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 3}}$; 4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x - 6}{15x - 3x^2}}$

32 On considère les fonctions numériques f, g, h et k définies par :

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{\sqrt{x^2 + 5x}}$; $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 3}}{x^2 + 5x}$

$h(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5x}}$; $k(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 + 5x}}$.

Parmi les ensembles suivants, déterminer les ensembles de définition de f, g, h et k :

$A =]-\infty; -5[\cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$

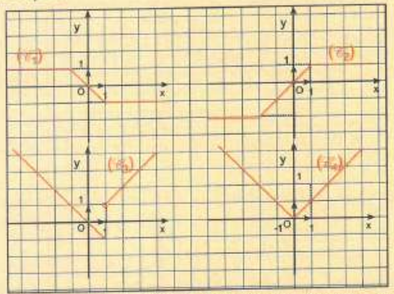
$B =]-\infty; -5[\cup]0; +\infty[$

$C =]-\infty; -5[\cup \left]-5; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$

$D =]-\infty; -5[\cup \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right[\cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$

Parité d'une fonction numérique

33 $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_4)$ sont des courbes de fonctions numériques.



1) Déterminer pour chaque fonction la courbe qui la représente parmi les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_4)$.

$$f(x)=\begin{cases}-x \;;\; x\le 1\\ x \;;\; x>1\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases}1 \;;\; x<-1\\ -x \;;\; -1\le x<1\\ -1 \;;\; x\ge 1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-2 \;;\; x\le -2\\ x \;;\; -2<x<1\\ 1 \;;\; x\ge 1\end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases}x \;;\; x\ge 0\\ -x \;;\; x<0\end{cases}$$

2) Parmi les fonctions précédentes, déterminer celles qui sont paires en justifiant la réponse.

3) Donner une autre expression de la fonction k.

Exercices de synthèse

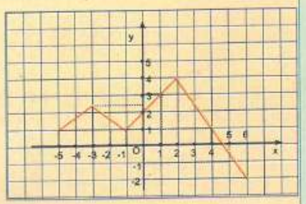
34 Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à zéro.
On considère les fonctions g et h définies sur I par :

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

1) Calculer $g(x)$ et $h(x)$ lorsque f est une fonction paire puis lorsque f est une fonction impaire.

2) Etudier la parité de chacune des fonctions g et h pour toute fonction f.

35 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-5, 6]$ et sa représentation graphique est celle sur la figure ci-contre.



1) Calculer les valeurs des nombres suivants : $f(-5)$, $f(-3)$ et $f(6)$.

2) a) Déterminer un réel α tel que $f(\alpha) = 3$.
b) Déterminer β tel que $f(\beta) = 4$.

3) Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :
a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = 3$
c) $f(x) = -2$; d) $f(x) = 6$

4) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles f admet un maximum et un minimum.

36 Une voiture parcourt la distance de 180 km en une durée t à la vitesse v où 30 km/h $\le v \le$ 80 km/h.

1) Trouver la fonction qui donne t en fonction de v.

2) Compléter le tableau suivant :

v	30	40	50	60	70	80
t						

3) Donner les variations de t et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

37 Soit f une fonction numérique définie sur IR telle que :
Pour tout réel x : $5f(-x) + f(1-x) = 2x$
Déterminer $f(x)$ en fonction de x.

38 Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur 4cm.
Soit M un point du segment [AB] tel que BM = x cm.
Soit f la fonction qui à chaque x associe l'aire du triangle ABM.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer f(0), f(2) et f(4).

3) Calculer $f(x)$ en fonction de x.

4) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans un repère orthonormal$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Résolution graphique d'équation et d'inéquations

39 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = |x+3| - 2$.

1) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue, selon les valeurs de x.

2) a) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
b) Donner le tableau de variations de la fonction f.

3) Construire, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (Δ) d'équation $y = -3x$.

4) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ).

5) Résoudre dans IR l'équation : $f(x) = -3x$.

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \le -3x$.

Problèmes

40 Soit ABCD un rectangle (voir figure).

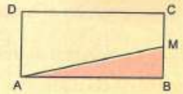
1) Déterminer les valeurs possibles de x.

2) Calculer l'aire $A(x)$ du rectangle ABCD en fonction de x.

3) Représenter graphiquement la fonction$A : x \mapsto A(x)$ sur l'intervalle [0; 4].

4) Déterminer la valeur du nombre x pour laquelle l'aire du rectangle ABCD est maximale.

41 Soit ABCD un rectangle de dimensions 3 et 6.
M est un point en mouvement sur la trajectoire ABCDA.
Soit x la distance parcourue par M et y l'aire de la partie colorée.



1) a) Soit f la fonction numérique qui à x associe y. Déterminer son ensemble de définition.
b) Déterminer $f(x)$ en fonction de x.

2) a) Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
b) Quelle est la valeur maximale de la fonction f ?
c) Résoudre graphiquement les deux équations :
$f(x) = 2$ et $f(x) = 20$.
d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 4$.

42 On considère la fonction numérique f définie sur IR* par :

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$$

1) Montrer que pour tous a et b de IR* tels que $a \ne b$, on a :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 4(a+b) - \frac{1}{ab}$$

2) Etudier les variations de la fonction f sur les intervalles suivants :

$$]-\infty; 0[\quad , \quad \left]0; \frac{1}{2}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3) En déduire que pour tout nombre x de $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$: $3 \le f(x) \le 5$

43 Soit ABCD un trapèze rectangle de bases [AD] et [BC], de hauteur [AB] tel que :

AD = 6 ; BC = 2 et AB = 4

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AD).
Soit M un point variable sur [AB] ; on pose AM = x.
La droite passant par M est parallèle à (AD), coupe [CD] en N.
La droite parallèle à (AB) et passant par N, coupe (AD) en P.

1) a) Montrer que CHD est un triangle rectangle isocèle.
b) Montrer que AMNP est un rectangle et que NDP est un triangle rectangle isocèle.

2) Soit $f(x)$ l'aire du rectangle AMNP où $0 \le x \le 4$.
a) Montrer que : $f(x) = 9 - (x-3)^2$.
b) Montrer que : $f(x) \le 9$.
c) Montrer que l'aire de AMNP admet un maximum et déterminer la nature de AMNP dans ce cas.

3) Montrer que l'aire de AMNP est égale à 8,5 si et seulement si :

$$x = \frac{6-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$$

44 Soit la fonction numérique $f : x \mapsto 2\left(x + \frac{4}{x}\right)$

1) a) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.
b) Montrer que f est une fonction impaire.

2) a) Montrer que pour tous a et b de D_f, on a :

$$f(b) - f(a) = 2(b-a)\left(1 - \frac{4}{ab}\right)$$

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $[2; +\infty[$ et $]0; 2]$.

3) On considère un rectangle d'aire 4 et dont l'une des dimensions est x.
a) Montrer que le périmètre du rectangle est :

$$P(x) = 2\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

b) En déduire la valeur minimale de périmètre de ce rectangle.

Parabole - Hyperbole

15

Capacités attendues

Capacité de tracer la courbe d'une fonction polynôme du second degré ou d'une fonction homographique sans le recours au changement de repère.

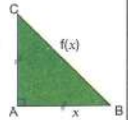
Contenu

- **Activités préparatoires**
  - Approche de la fonction carré
  - La parabole d'équation $y = ax^2$
  - La parabole d'équation $y = ax^2 + \alpha$ ou $y = a(x+\alpha)^2$
  - L'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$
  - Utilisation des graphiques pour la résolution des équations et des inéquations
  - Utilisation du graphique pour déterminer des valeurs approchées
- **Définitions et règles**
  - La parabole
  - Fonctions se ramenant aux fonctions usuelles
  - Fonction du type $x \mapsto f(x) + a$ $\left(a \in IR^*\right)$
  - L'hyperbole
  - Fonction du type $x \mapsto f(x + a)$ $\left(a \in IR^*\right)$
- **Points essentiels**
- **Exercices résolus**
- **Exercices et problèmes**

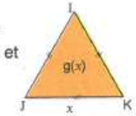
15 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Approche de la fonction carré

1) Soit x la longueur du côté d'un triangle rectangle isocèle et f(x) la longueur de son hypoténuse. Calculer f(x) en fonction de x.



2) Soit x la longueur du côté d'un triangle rectangle équilatéral et g(x) son aire. Calculer g(x) en fonction de x.



3) Soit x le rayon du cercle ($\mathscr{C}$) ; h(x) est l'aire de la partie colorée (voir figure). Déterminer h(x) en fonction de x.

ACTIVITE 2 La parabole d'équation $y = ax^2$

A Soit a un nombre réel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2$.

1) Vérifier que f est une fonction paire.
2) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$ dans chacun des deux cas suivants : $a > 0$ et $a < 0$.
3) Donner le tableau de variations de la fonction f sur IR dans chacun des cas $a > 0$ et $a < 0$ en mettant en évidence le cas où f admet un minimum ou un maximum sur IR.

B On considère la fonction $g : x \mapsto x^2$.

1) Donner le tableau de variations de la fonction g sur IR.
2) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
g(x)							

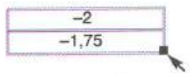
3) Soit ($\mathscr{C}_g$) la courbe de la fonction g dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
En utilisant le tableau de valeurs précédent, représenter les points M(x ; g(x)) puis donner l'allure de la courbe ($\mathscr{C}_g$) sur IR.

- L'ensemble de tous points M(x ; x^2) est la courbe ($\mathscr{C}_g$).
- Remarquer que plus on prend de valeurs x, plus on obtient un tracé précis de ($\mathscr{C}_g$).
- Les coordonnées de O sont $x = 0$ et $y = 0$.

C **Construction d'une parabole en utilisant un ordinateur**

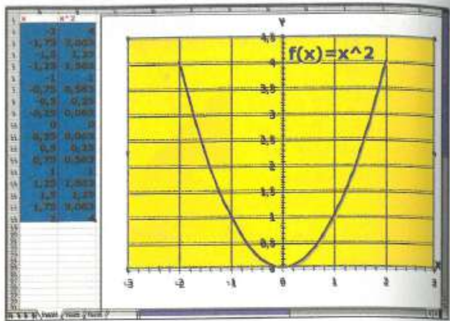
Dans cette activité, on présente la construction de la courbe de la fonction $g : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle [–2 ; 2] en utilisant **Excel**. Voici les étapes à suivre :

- Ouvrir l'application Excel.
- Dans la colonne A de la feuille de calcul, on saisit les valeurs de x de l'intervalle [–2 ; 2] comme suit :
  – On écrit la lettre x dans la case A_1, on écrit –2 dans la case A_2 puis on écrit –1,75 dan la case A_3.
  – On choisit les deux cases A_2 et A_3, on obtient un rectangle de la forme :



  – On appuie sur le bouton gauche de la souris, on saisit ce rectangle à partir du petit carré qui apparaît en bas du rectangle et on le fait glisser vers le bas jusqu'à ce qu'on atteint la case A_{18} pour obtenir les valeurs de x (cette opération permet de partager l'intervalle [–2 ; 2] en 16 segments de longueur 0,25 chacun).

- Dans la colonne B, on écrit x^2 dans la case B_1 et on écrit dans la case B_2 l'expression du calcul des images des nombres x par la fonction g comme suit : $\boxed{= A_2 \wedge 2}$ (c'est-à-dire $B_2 = A_2^2$).
- Au moyen de la souris, on fait glisser la case B_2 vers le bas et on s'arrête à la case B_{18} pour obtenir les images des nombres par la fonction g.
- On choisit toutes les cases du rectangle à partir de (A_2 ; B_2) jusqu'à (A_{18} ; B_{18}) (zone bleue sur la figure ci-contre).
- On clique deux fois de suite en utilisant le bouton gauche de la souris sur l'icône relative aux graphiques.



Dans **type de graphique**, on sélectionne **Nuage de points**. Ainsi, on obtient la parabole $(\mathscr{C}_g)$.

ACTIVITE 3 La parabole d'équation $y = ax^2 + \alpha$ ou $y = a(x + \alpha)^2$

On considère les fonctions numériques $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x^2 + 1$ et $h : x \mapsto (x+1)^2$.
$(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ sont les courbes respectives des fonctions f, g et h dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Soient x un nombre réel, M (x ; f(x)) le point de $(\mathscr{C}_f)$ et M' le point de $(\mathscr{C}_g)$ ayant même abscisse que M.
Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \vec{j}$.
En déduire que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par une translation dont on déterminera le vecteur.
b) Construire $(\mathscr{C}_g)$ en utilisant $(\mathscr{C}_f)$.
2) Soient M un point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x et M" le point de $(\mathscr{C}_h)$ d'abscisse $x - 1$. Vérifier que : $\overrightarrow{MM''} = -\vec{i}$.
Monter que $(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par une translation dont on déterminera le vecteur.
Construire $(\mathscr{C}_h)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$.

ACTIVITE 4 L'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$

A Soit a un nombre réel non nul. On considère la fonction numérique $f : x \mapsto \frac{a}{x}$.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f et vérifier que f est une fonction impaire.
2) Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$.
Montrer que le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est $T = -\frac{a}{x_1 x_2}$
Déterminer alors le sens de variation de f dans chacun des deux cas : a > 0 et a < 0.
3) Donner le tableau de variations de f sur IR*.

B On considère la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.
1) Donner le tableau de variations de g sur IR*.
2) Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
g(x)							

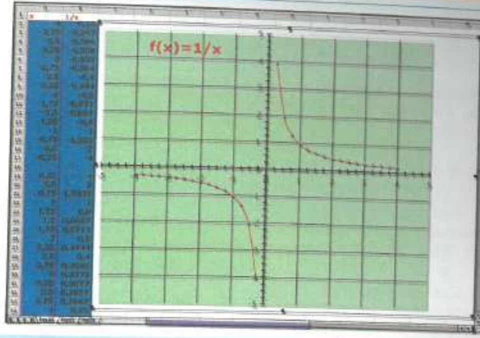
3) Soit $(\mathscr{C}_g)$ la courbe de la fonction g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
En utilisant le tableau précédent, représenter les points M(x ; g(x)) puis donner l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ sur IR*.

- **L'ensemble des points $M\left(x ; \frac{1}{x}\right)$, où $x \neq 0$, est la courbe $(\mathscr{C}_g)$.**
- **Plus on prend de valeurs de x, plus on précise davantage le tracé de $(\mathscr{C}_g)$.**
- **Les équations des axes du repère sont y = 0 et x = 0**

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ est appelée hyperbole de centre O, d'asymptotes les axes de coordonnées.

C **Construction d'une hyperbole sur ordinateur**

En utilisant **Excel** et en suivant les mêmes étapes de la partie C de l'activité (2), construire la courbe de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle [–4 ; 4].
On peut partage cet intervalle en segments de longueur 0,25 pour obtenir des valeurs de x comme suit :
–4 ; –3,75 ; –3,5 ; .... ; 3,25 ; 3,5 ; 3,75 ; 4.



ACTIVITE 5 Utilisation des graphiques pour la résolution des équations et des inéquations

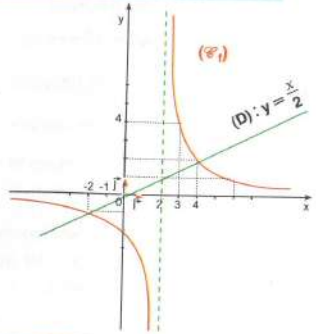
A Résolution graphique d'une équation du type f(x) = m avec m ∈ IR

1 Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit m un nombre réel.
On considère dans IR l'équation **(E) : f(x) = m**. Soit (Δ_m) la droite d'équation y = m.
Soit a ∈ D_f. Montrer que le nombre a est solution de l'équation (E) si et seulement si le point M(a ; m) appartient à l'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite (Δ_m).

2 **Application :**
On considère la fonction numérique $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$.
Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1) Montrer que : f(x) = –(x – 1)² + 4.
2) Tracer $(\mathscr{C}_f)$.
3) Soit m un nombre réel. Discuter graphiquement, en utilisant la courbe $(\mathscr{C}_f)$, selon les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

B Inéquation du type f(x) ≤ ax + b ou f(x) ≥ ax + b

On considère l'hyperbole ci-contre qui représente la fonction $f : x \mapsto \frac{4}{x-2}$ et la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.



1) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$, puis en déduire les deux points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (D).
2) a) Recopier la figure ci-contre sur le cahier puis colorier la partie de $(\mathscr{C}_f)$ qui se trouve au-dessus de (D).
b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \frac{1}{2}x$.
c) Résoudre cette inéquation algébriquement.
3) a) Colorier en une autre couleur la partie de $(\mathscr{C}_f)$ qui se trouve au-dessous de (D).
b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < \frac{1}{2}x$.
c) Résoudre cette inéquation algébriquement.

C Equation du type $f(x) = g(x)$ et inéquation du type $f(x) \leq g(x)$

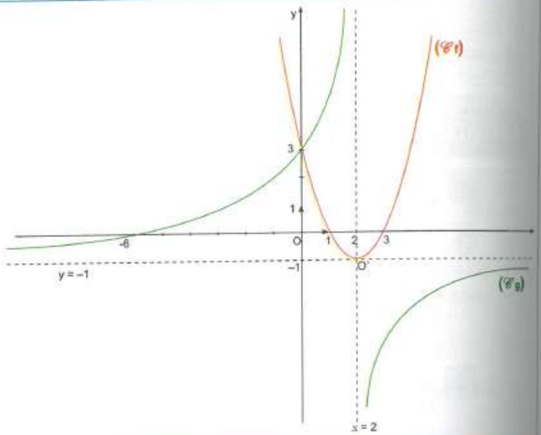
Sur la figure ci-dessous :
- $(\mathscr{C}_f)$ est la parabole de sommet O'(2 ; –1), d'axe la droite d'équation $x = 2$;
  $(\mathscr{C}_f)$ représente la fonction f définie par : $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
- $(\mathscr{C}_g)$ est l'hyperbole de centre O', d'asymptotes les droites d'équations $x = 2$ et $y = -1$;
  $(\mathscr{C}_g)$ représente la fonction g telle que $g(x) = -1 - \dfrac{8}{x-2}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une seule solution qui est le nombre 0. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ coupe $(\mathscr{C}_g)$ en un point unique que l'on déterminera.

2) Résoudre graphiquement chacune des deux inéquations :
$f(x) \leq g(x)$ et $f(x) > g(x)$

3) Donner le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

4) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.



ACTIVITE 6 Utilisation du graphique pour déterminer des valeurs approchées

Sur la figure ci-contre, (1) et (2) sont deux parallélépipèdes.
Soient $V_1(x)$ le volume du parallélépipède (1) et $V_2(x)$ le volume du parallélépipède de (2).

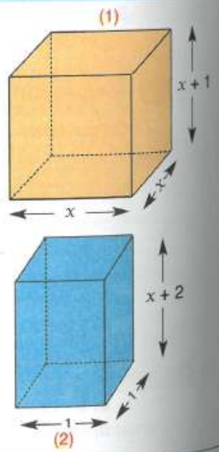
1) Vérifier que $V_1(x) = V_2(x)$ signifie que l'équation :
(E) : $x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ admet des solutions.

2) Montrer que l'équation (E) équivaut à : $x^2 - x - 1 = \dfrac{2}{x}$

3) On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $g : x \mapsto x^2 + x - 1$.

a) Construire, dans le même repère, les deux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ représentatives des fonctions f et g.

b) Donner graphiquement une valeur approchée à 0,1 près du nombre x tel que les deux parallélépipèdes aient le même volume.



1 La parabole

La parabole d'équation $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

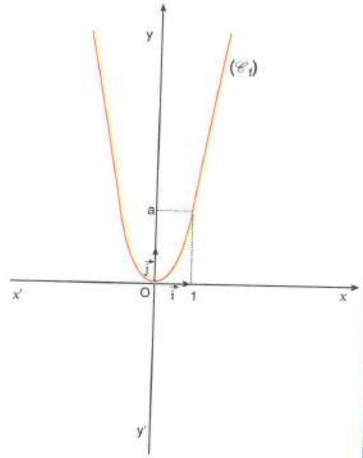
Définition Soit a un nombre réel non nul.
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^2$ est appelée parabole de sommet O, d'axe l'axe des ordonnées.

Exemples et applications

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2$ où $a > 0$.
- Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

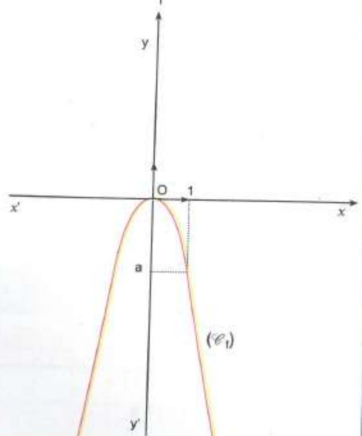
On remarque que pour tout x de IR :
$f(x) \geq 0$ et $f(0) = 0$.
Ce qui signifie que 0 est un minimum de la fonction f.
- La représentation graphique de f est :



Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2$ où $a < 0$.
- Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

On remarque que pour tout x de IR :
$f(x) \leq 0$ et $f(0) = 0$.
Ce qui veut dire que 0 est un maximum de la fonction f.
- La courbe de f est la suivante :



Construire la courbe représentative de chacune des deux fonctions
$f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $f_2 : x \mapsto -x^2$

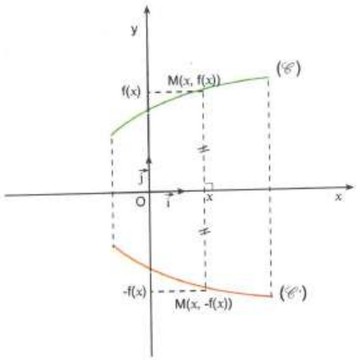
Remarques

- La fonction $f : x \mapsto ax^2$ est paire c'est-à-dire que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
- Si M(x ; y) est un point de $(\mathscr{C}_f)$, alors $y = ax^2$; donc :
  → $y \geq 0$ dans le cas où $a > 0$ c'est-à-dire que M se trouve au-dessus de l'axe des abscisses.
  → $y \leq 0$ dans le cas où $a < 0$ c'est-à-dire que M se trouve au-dessous de l'axe des abscisses.

2 Fonctions se ramenant aux fonctions usuelles

Fonction du type $x \mapsto -f(x)$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et –f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On a : $M(x\,;\,f(x)) \in (\mathscr{C})$ signifie que $M'(x\,;\,-f(x)) \in (\mathscr{C}')$.

Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

Exemple

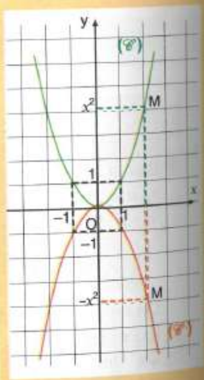
Soit g la fonction numérique définie sur IR par $g(x) = -x^2$.

$(\mathscr{C}')$ est la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a construit auparavant la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction $f: x \mapsto x^2$.

A tout point M, de $(\mathscr{C})$, de coordonnées $(x\,;\,x^2)$, on associe le point M', de $(\mathscr{C}')$, de coordonnées $(x\,;\,-x^2)$.

Les deux points M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées, donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

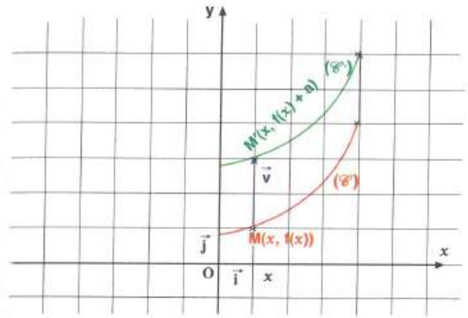


3 Fonction du type $x \mapsto f(x)+a \quad (a \in IR^*)$

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

Soient $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$.

et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)+a$.



- $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$, signifie que pour obtenir $(\mathscr{C}')$, on translate $(\mathscr{C})$ dans le sens de l'axe des ordonnées au moyen du vecteur $a\vec{j}$.
- La translation se fait vers le haut si $a > 0$, et vers le bas si $a < 0$.

Tout point $M(x\,;\,f(x))$ de $(\mathscr{C})$ est associé au point $M'(x\,;\,f(x)+a)$ de $(\mathscr{C}')$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} = a\vec{j}$$

$(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$.

Exemple

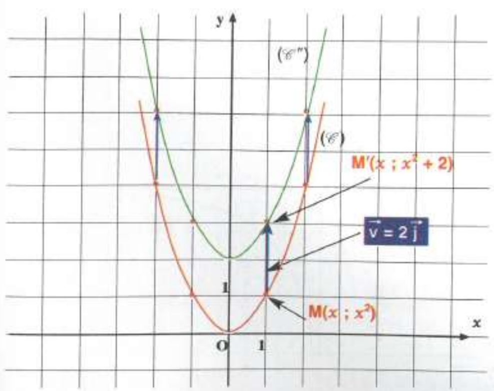
On considère la fonction numérique g définie sur IR par $g(x) = x^2 + 2$.

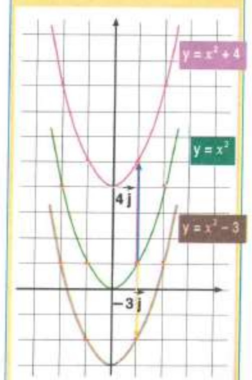
Soit $(\mathscr{C}'')$ la courbe de la fonction g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction usuelle $f: x \mapsto x^2$.

Tout point $M(x\,;\,x^2)$ de $(\mathscr{C})$ est associé au point $M'(x\,;\,x^2+2)$ de la courbe $(\mathscr{C}'')$ au moyen de la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} = 2\vec{j}$.

Donc $(\mathscr{C}'')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\vec{j}$.





4 L'hyperbole

L'hyperbole d'équation $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

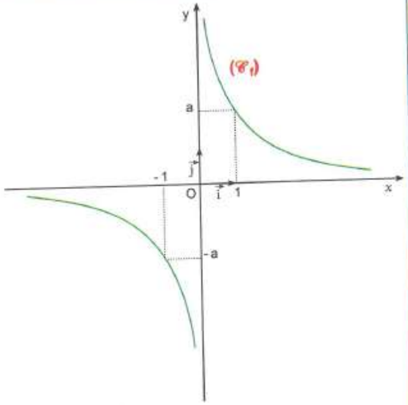
Définition Soit a un nombre réel non nul.
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
La représentation graphique de la fonction $x\mapsto\frac{a}{x}$ est appelée hyperbole de centre O, d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ (axe du repère).

Exemples et applications

- Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{a}{x}$ où $a > 0$.
  - Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

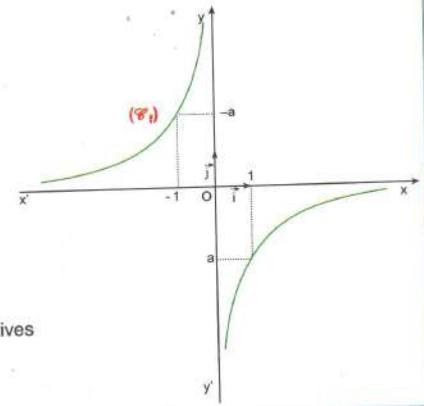
  - La représentation graphique de f est la suivante :



- Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{a}{x}$ où $a < 0$.
  - Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

  - La courbe de f est la suivante :



- Construire les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1: x\mapsto\frac{2}{x} \quad \text{et} \quad f_2: x\mapsto\frac{-2}{x}$$

- La fonction $f: x\mapsto\frac{a}{x}$ est impaire c'est-à-dire que O est un centre de symétrie de (Cf).
- Si $M(x\ ;\ y)$ est un point de (Cg), alors $y=\frac{a}{x}$ c'est-à-dire $xy = a$; donc le signe de xy est le même que celui de a.

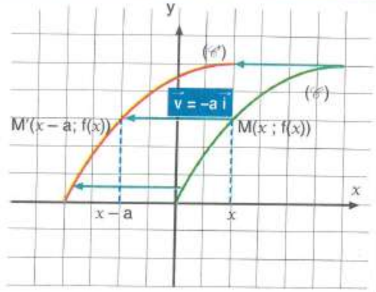
Ainsi :

→ Si $a > 0$, alors x et y sont de même signe ;

→ Si $a < 0$, alors x et y sont de signes contraires.

5 Fonction du type $x\mapsto f(x+a)$ $(a\in\mathbb{R}^*)$

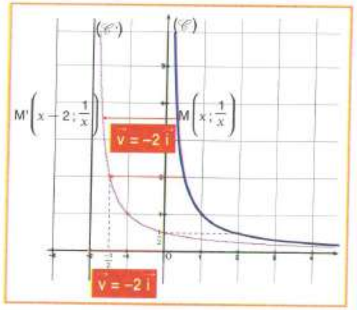
Soit$(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal du plan.
Soit $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction $x\mapsto f(x+a)$ et soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$.
Tout point $M(x\ ;\ f(x))$ de $(\mathscr{C})$ est associé au point $M'(x-a\ ;\ f(x))$ de $(\mathscr{C}')$ tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}=-a\vec{i}$
Donc $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $a\vec{i}$.

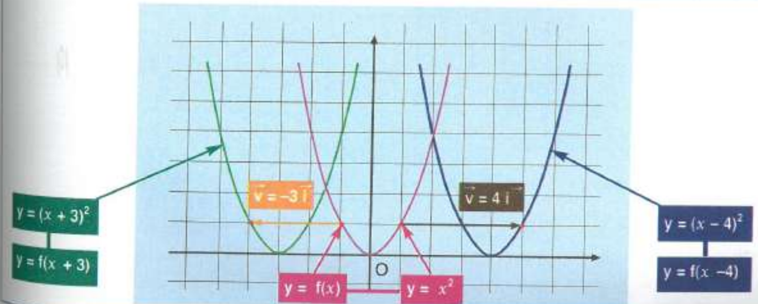


Exemple

- Soit g la fonction définie sur $]-2\ ;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x+2}$.

Soient $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans un repère orthonormal$(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction usuelle f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
On a : $g(x) = f(x + 2)$.
Donc $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.
Les asymptotes de $(\mathscr{C})$ sont les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$;
Les asymptotes de $(\mathscr{C}')$ sont les droites d'équations $x = -2$ et $y = 0$.





- $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ signifie que pour obtenir $(\mathscr{C}')$, on translate $(\mathscr{C})$ dans le sens de l'axe des abscisses au moyen du vecteur$-a\vec{i}$.
- La translation se fait vers la gauche si $a > 0$, et vers la droite si $a < 0$.

La Parabole

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $x \mapsto ax^2$ où $a \neq 0$.

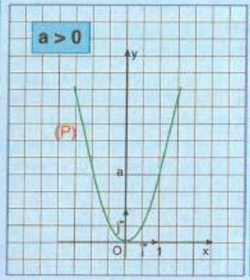
Soit (P) sa courbe dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

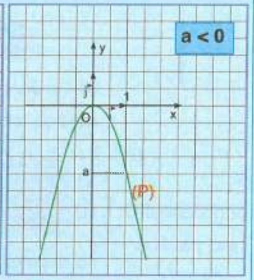
a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

a < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	$\nearrow$	0	$\searrow$





La courbe (P) est appelée **parabole** de sommet O et d'axe l'axe des ordonnées.

L'Hyperbole

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $x \mapsto \frac{a}{x}$ où $a \neq 0$.

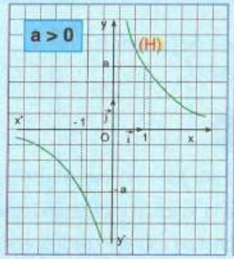
Soit (H) sa courbe dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

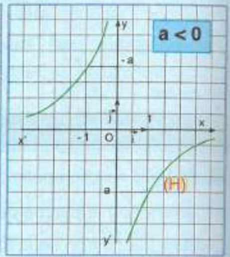
a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

a < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$



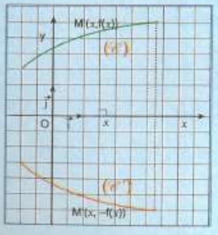


La courbe (H) est appelée **hyperbole** de centre O, d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Fonctions se ramenant aux fonctions usuelles

Fonction du type $x \mapsto -f(x)$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes des fonctions f et −f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

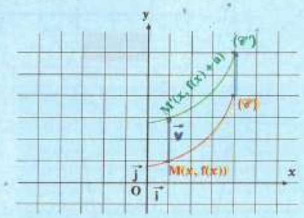


$M(x\,;f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x\,;-f(x)) \in (\mathscr{C}')$

Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Fonction du type $x \mapsto f(x)+a$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes des fonctions f et $x \mapsto f(x)+a$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



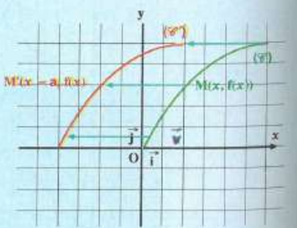
$M(x\,;f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x\,;-f(x)+a) \in (\mathscr{C}')$

$$\overrightarrow{MM'} = a\vec{j}$$

$(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{v} = a\vec{j}$.

Fonction du type $x \mapsto f(x+a)$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes des fonctions f et $x \mapsto f(x+a)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



$M(x\,;f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x-a\,;(x)) \in (\mathscr{C}')$

$$\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i}$$

$(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

1 Etude et construction d'une parabole

On considère la fonction numérique $f: x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$

1) Vérifier que $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ pour tout x de IR.

2) On pose $g: x \mapsto 2x^2$ et $h: x \mapsto 2(x-1)^2$

Ecrire h(x) en fonction de g(x) puis écrire f(x) en fonction de h(x).

3) Soient $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ les courbes respectives des fonctions f, g et h dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Construire $(\mathscr{C})$ en utilisant $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Solution

1) Pour tout x de IR, on a :

$$2(x-1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3$$
$$= 2x^2 - 4x + 5$$

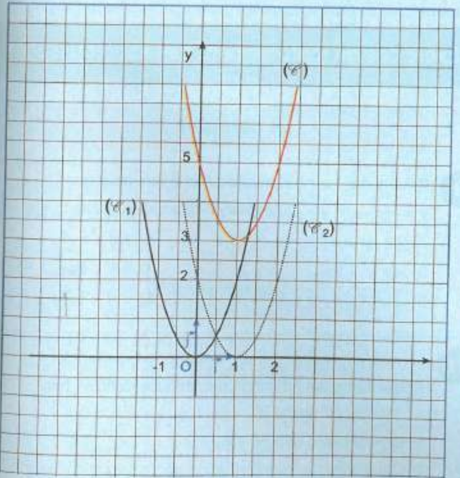
Donc : $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ pour tout x de IR.

2) Pour tout x de IR, on a :

$h(x) = g(x-1)$ et $f(x) = h(x) + 3$

3) Comme $h(x) = g(x-1)$ pour tout x de IR, alors $(\mathscr{C}_2)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la translation de vecteur $\vec{i}$ (voir définitions et règles). Comme $f(x) = h(x) + 3$, alors $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_2)$ par la translation de vecteur $3\vec{j}$.

$(\mathscr{C}_1)$ est une parabole de sommet O d'axe l'axe des ordonnées.



Remarque : Noter que $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la translation de vecteur $\vec{i} + 3\vec{j}$.

2 Etude et construction d'une hyperbole

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{-2x+7}{x-3}$

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f.

2) Montrer que $f(x) = -2 + \frac{1}{x-3}$ pour tout x de D.

3) On pose $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{1}{x-3}$

Ecrire h(x) en fonction de g(x) puis écrire f(x) en fonction de h(x) pour tout x de D.

4) Soient $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ les courbes respectives des fonctions f, g et h dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Construire $(\mathscr{C})$ en utilisant $(\mathscr{C}_1)$.

Solution

1) La fonction f est définie lorsque $x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 3$.

Donc $D =]-\infty\,; 3[\cup]3\,; +\infty[$.

2) Pour tout x de D, on a :

$$-2 + \frac{1}{x-3} = \frac{-2(x-3)+1}{x-3} = \frac{-2x+7}{x-3} = f(x)$$

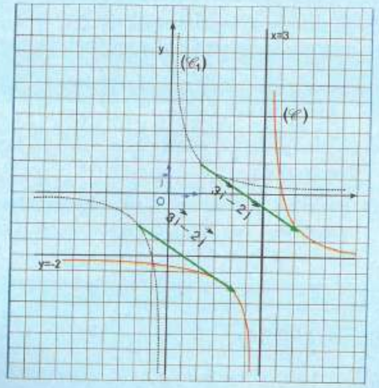
Donc : $f(x) = -2 + \frac{1}{x-3}$ pour tout x de D.

3) Pour tout x de D, $h(x) = g(x-3)$ et $f(x) = h(x) - 2$.

4) Puisque $h(x) = g(x-3)$, alors $(\mathscr{C}_2)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la translation de vecteur $3\vec{i}$.

Par ailleurs $f(x) = h(x) - 2$ pour tout x de D ; donc $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_2)$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

$(\mathscr{C}_1)$ est une hyperbole de centre O, d'asymptotes les axes du repère.



Remarque : $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la translation de vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Exercices d'application

La parabole

1 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = ax^2$ et dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A(x_0\,;\,y_0)$.

Déterminer le nombre réel a et construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans chacun des deux cas suivants :

1) $A(1\,;\,1)$ 2) $A(-1\,;\,4)$.

2 Etudier les variations de la fonction f et construire la courbe (C_f) dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2x^2$; 2) $f(x)=\frac{-1}{2}x^2$

3) $f(x)=3x^2$; 4) $f(x)=-0,4x^2$

3 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de rayon R et d'aire A (l'unité de mesure des longueurs est le cm).

1) Déterminer la fonction g qui au rayon R associe l'aire A.

2) Remplir le tableau suivant :

R	1	2	3	4	5
A					

3) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4 1) Construire, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = x^2$.

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x) = 4$ et l'inéquation $f(x) < 4$.

3) a) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la droite d'équation $y = -x$.

b) Déterminer graphiquement puis algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (D).

5 On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x-1 \ ; & x<1 \\ f(x) = x^2 \ ; & x\geq 1 \end{cases}$$

1) Calculer $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2)$.

2) Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'hyperbole

6 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{a}{x}$ et dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A(x_0\,;\,y_0)$.

Déterminer le nombre réel a et construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans chacun des deux cas suivants :

1) $A(1\,;\,1)$; 2) $A(-2\,;\,1)$.

7 Etudier les variations de la fonction f et construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\frac{3}{x}$; 2) $f(x)=\frac{-2}{x}$

3) $f(x)=\frac{1}{2x}$; 4) $f(x)=-\frac{3}{2x}$

8 1) Construire, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x) = 2$ et l'inéquation $f(x) > 2$.

3) a) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la droite (D) d'équation $y = x$.

b) Déterminer graphiquement puis algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (D).

Exercices de renforcement des apprentissages

La parabole

9 Déterminer les nombres réels α, β et γ pour que $y = \alpha(x-\beta)^2+\gamma$ dans chacun des cas suivants :

1) $y = (x-1)^2+4$; 2) $y = x^2-4$

3) $y = x^2-2x$; 4) $y = -\frac{1}{2}x^2+2x$

5) $y = x^2-2x+3$; 6) $y = -4x^2+x+1$

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2+1$

1) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

11 Construire les courbes des fonctions suivantes dans un repère orthonormal.

$f_1(x) = x^2+3$; $f_2(x) = -x^2+2$

$f_3(x) = x^2-4$; $f_4(x) = -x^2+1$

12 Soient f et g les deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 2x^2-4x+3$

1) Déterminer les deux nombres réels α et β tels que : $g(x) = 2(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout x de IR.

2) a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans une repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

13 Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = -2x^2$ et $g(x) = -2x^2-x+1$

1) Déterminer les deux réels α et β tels que :

$g(x) = -2(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout x de IR.

2) a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

14 Construire les courbes des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x^2+1$; $f_2(x) = 2(x-1)^2$

$f_3(x) = -3(x-2)^2+4$; $f_4(x) = x^2-2x$

$f_5(x) = x^2-4x+1$; $f_6(x) = 2x^2+4x+3$

$f_7(x) = 2x^2-x-1$; $f_8(x) = x^2-2x+3$

L'hyperbole

15 Déterminer les nombres réels α, β et γ pour que $y=\alpha+\frac{\beta}{x+\gamma}$ dans chacun des cas suivants :

1) $y=2+\frac{1}{x-1}$; 2) $y=-1+\frac{2}{x+2}$

3) $y=\frac{x-1}{x+2}$; 4) $y=\frac{x+3}{x-4}$

5) $y=\frac{2x-3}{x-2}$; 6) $y=\frac{2x-3}{2x+1}$

16 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{1}{x-1}$

1) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

17 Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=\frac{-2}{x}$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

1) Déterminer les deux réels α et β pour que :

$g(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+1}$ pour tout x de D_g.

2) a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

18 Construire les courbes des fonctions suivantes :

1) $f_1(x)=\frac{3}{x+1}$; 2) $f_2(x)=\frac{-2}{x-1}$

3) $f_3(x)=\frac{2}{2x-1}$; 4) $f_4(x)=\frac{-3}{2x+1}$

5) $f_5(x)=1+\frac{1}{x-1}$; 6) $f_6(x)=-1+\frac{2}{x-2}$

7) $f_7(x)=\frac{x+1}{x-3}$; 8) $f_8(x)=\frac{x}{2x-3}$

Exercices de synthèse

19 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^2-2|x|$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est une fonction paire.

2) a) Montrer que f est décroissante sur $[0\,;\,1]$ et f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur IR et en déduire les maxima et minima de la fonction f.

3) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2-2x$.

a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Construire, en une autre couleur, la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

20 Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{-5}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{-5x}{2x-4}$$

Soient $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble D_g de définition de la fonction g et montrer que pour tout x de D_g, on a :

$$g(x)=-\frac{5}{2}-\frac{5}{x-2}$$

2) Etudier les variations de la fonction g sur chacun des intervalles $]2\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;2[$.

3) a) Déterminer la transformation géométrique qui permet de déduire la courbe $(\mathscr{C}_g)$ en utilisant la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b) En utilisant la courbe $(\mathscr{C}_f)$, construire la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

4) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x)=\dfrac{-5x}{2|x|-4}$

a) Déterminer l'ensemble D_h de définition de la fonction h.

b) Etudier la parité de la fonction h et vérifier que pour tout x de $IR^+\setminus\{2\}$: $h(x) = g(x)$.

c) Construire la courbe $(\mathscr{C}_h)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

21 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Construire dans ce repère les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_3)$ représentatives respectivement des fonctions f, g et h définies par :

$f(x)=x^2 \quad ; \quad g(x)=\dfrac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x)=x$

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations suivantes :

$f(x) = g(x) \quad ; \quad f(x) = h(x) \quad ; \quad g(x) = h(x)$.

En déduire le point d'intersection des trois courbes.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{x^3-1}{x}>0$

22 Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=5-6x$$

Soient (H) la courbe de f et (D) la courbe de g.

1) Soit x un nombre réel. Développer $(2x-1)(3x-1)$.

2) Résoudre dans IR l'équation : $6x^2-5x+1=0$

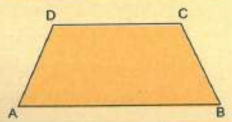
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes (H) et (D).

4) Construire les courbes (H) et (D).

23 Soit ABCD un trapèze isocèle tel que :

CD = 6, BC = 15

et AB = 12



Soit M un point du segment [AD].

La droite passant par M et parallèle à la droite (AB) coupe la droite (BC) en un point N.

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Soit E le point d'intersection des droites (CH) et (MN).

On pose AM = x.

1) Montrer que : $EN=\frac{3}{5}(5-x)$ et $EH=\frac{4}{3}x$

En déduire que : $MN=\frac{6}{5}(10-x)$

2) Soit y l'aire du trapèze MNBA.

a) Déterminer y en fonction de x.

b) Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 5] et qui à x associe y.

c) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

24 On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=3-\dfrac{1}{x-2}$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f.

2) a) Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de D.

Montrer que : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{(x_2-2)(x_1-2)}$

b) En déduire que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

3) Soit (Δ) la droite d'équation $y = 3x - 7$.

Montrer que $(\mathscr{C})$ et (Δ) se coupent aux points d'abscisses $\frac{7}{3}$ et 3.

4) Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 3x - 7$.

6) On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x)=\left|3-\dfrac{1}{x-2}\right|$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Déterminer, selon les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions dans IR de l'équation : $g(x) = m$.

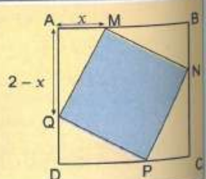
Problèmes

25 Soit ABCD un carré de côté de longueur 2.

On construit le carré MNPQ (voir figure ci-contre) tel que :

AM = BN = CP = DQ = x

où $0 \le x \le 2$



1) Calculer QM.

2) Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du carré MNPQ.

3) Vérifier que $\mathcal{A}(x) = 2[(x-1)^2 + 1]$.

4) Construire la courbe de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

5) En déduire la valeur du réel x pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

26 Soit ABC un triangle. On pose :

BC = a , AC = b , AB = c

et on suppose : b + c = 12 et $\widehat{A}=\frac{\pi}{6}$

1) Sachant que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}$bc sin $\widehat{A}$, exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de b seulement.

2) Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 12] par :

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+3x$$

a) Déterminer les deux réels p et q tels que :

$f(x)=-\frac{1}{4}(x-p)^2+q$ pour tout x de [0 ; 12].

b) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) En utilisant l'étude de la fonction f, déterminer et construire un triangle ABC qui vérifie les conditions imposées et dont l'aire est maximale.

27 On considère les deux fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x)=\frac{2}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=1-\frac{1}{x}$$

1) Représenter, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

2) En déduire la construction de la courbe $(\mathscr{C}_h)$ représentative de la fonction numérique h définie par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{2}{x} & ; \quad x<0 \\ h(x)=1-\dfrac{1}{x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

28 On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=x^2-x+\frac{5}{4}$$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que, pour tout x de IR, on a :

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

2) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

3) Soit g la fonction numérique définie sur IR^* par :

$$g(x)=-\frac{1}{x}$$

a) Vérifier que : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Construire la courbe (Cg) dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x^2-x+\frac{1}{x}+\frac{5}{4}<0$

29 Ali lance une flèche dans l'air à une vitesse initiale de 20m/s.

On sait que la hauteur de la flèche après une durée t est donnée par : $h(t) = -5t^2 + 20t$.

1) Calculer la hauteur de la flèche après :

a) une seconde ;

b) trois secondes ;

c) quatre secondes.

2) Pourquoi on peut se limiter à étudier h sur l'intervalle [0 ; 4] ?

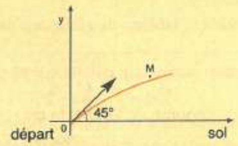
3) a) Montrer que h est croissante sur [0 ; 2] et que h est décroissante sur [2 ; 4].

Donner le tableau de variations de h sur l'intervalle [0 ; 4].

b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ?

4) Tracer la courbe (P) représentative de la fonction h dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

30 A partir d'une position au sol, on lance un solide M dans l'air sous un angle de 45° et à une vitesse initiale v_0 = 30km/h comme c'est indiqué par la figure.



On sait que l'équation de la trajectoire de M est donnée par la relation $y = -0{,}144x^2 + x$ (x et y en mètres).

1) Déterminer les deux nombres a et b pour que :

$$y = -0{,}144(x-a)^2 + b$$

2) Dans un repère orthogonal, que l'on choisira, tracer la trajectoire de M.

3) En quel point le solide M va-t-il tomber ?

4) Quelle est la hauteur maximale que peut atteindre le solide M avant sa "chute" ?

31 Soit la fonction numérique $f : x \mapsto -4x^2+4x+3$

1) Vérifier que, pour tout x de IR, on a :

$$f(x) = -4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

Factoriser alors $f(x)$.

2) Résoudre dans IR l'inéquation $f(x) \leq 0$.

3) Montrer que 4 est le maximum de la fonction f.

4) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

5) Encadrer $f(x)$ sachant que $1 \leq x \leq 3$.

6) Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

32 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 - 4x$.

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $f(x) = (x-2)^2 - 4$ pour tout x de IR.

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $[2 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 2]$;

2) Soit (P) la parabole d'équation $y = -x^2$.

Déterminer les points d'intersection de (P) et de $(\mathscr{C})$.

3) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes de coordonnées.

4) Construire (P) et $(\mathscr{C})$.

5) On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; \ x \geq 2 \\ g(x) = -x^2 \ ; \ x \leq 2 \end{cases}$$

a) En utilisant une couleur différente, tracer la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g.

b) En déduire le tableau de variations de g.

33 Soit f la fonction numérique définie sur IR par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes de coordonnées.

2) a) Vérifier que, pour tout x de IR, on a : $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

b) Etudier les variations de f sur les deux intervalles $[2 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 2]$.

3) Soit la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{12}{x}$.

a) Vérifier que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_g)$ se coupent au point E(4 ; 3).

b) Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_g)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < f(x)$.

34 On considère la fonction numérique $f : x \mapsto \frac{-2x}{x+1}$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b) Vérifier que, pour tout x de D_f, on a :

$$f(x) = -2+\frac{2}{x+1}$$

c) Etudier les variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

d) Déterminer le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes du repère puis tracer $(\mathscr{C})$.

2) Soit la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{-2x}{|x|+1}$.

a) Déterminer l'ensemble D_g de définition de g et vérifier que g est une fonction impaire.

b) Vérifier que pour tout réel positif x de D_g, on a : $g(x) = f(x)$.

c) Tracer, en une autre couleur, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

35 On considère la fonction numérique f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{-x}{x-1}$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b) Vérifier que, pour tout x de D_f, on a :

$$f(x) = -1-\frac{1}{x-1}$$

c) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

d) Calculer f(0) et f(2) puis construire $(\mathscr{C})$.

e) Construire, dans le même repère, la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > x - 1$.

2) On considère la fonction numérique g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{|x|}{|x|-1}$$

a) Déterminer l'ensemble D_g de définition de g.

b) Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$ et $x \neq 1$, on a :

$g(x) = -f(x)$

c) Vérifier que g est une fonction paire.

d) Construire la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g.

36 Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes du repère.

b) Vérifier que, pour tout x de D_f, on a : $f(x) = 1+\frac{4}{x-1}$

c) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

2) Résoudre dans D_f l'équation $f(x) = x$

3) a) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$, et la droite (D) d'équation $y = x$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq x$.

37 On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = -x^2 + x$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ pour tout x de IR.

b) Donner le tableau de variations de f et construire $(\mathscr{C})$.

2) Un parallélépipède de dimensions 1, x et $1-x$ et de volume $V(x)$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle $V(x)$ est maximal.

38 On considère les fonction numériques :

$$f : x \mapsto \frac{x-4}{x-2} \quad ; \quad g : x \mapsto \frac{|x|+4}{|x|+2} \quad ; \quad h : x \mapsto \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$$

1) a) Déterminer les ensembles D_f, D_g et D_h de définition des fonction f, g et h respectivement.

b) Vérifier que :

- Pour tout nombre négatif x de D_g, on a $g(x) = f(x)$.
- Pour tout x de D_f, on a : $f(x) = 1-\frac{2}{x-2}$

2) a) Donner le tableau de variations de f.

b) Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes du repère. Tracer $(\mathscr{C})$.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de D_f.

3) Montrer que g est une fonction paire.

Construire la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

4) a) Ecrire $h(x)$ en fonction de $f(x)$, sans valeur absolue, selon les valeurs de x.

b) Construire la courbe $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction h.

Géométrie dans l'espace
Intersection et parallélisme

16

Capacités attendues

* Reconnaître et représenter les parties de l'espace dans le plan.
* Percevoir les cas d'analogie et les cas de dissemblance entre les notions et les propriétés de la géométrie plane et leurs correspondantes dans l'espace.
* Emploi des propriétés de la géométrie dans l'espace pour la résolution de problèmes issus du réel.

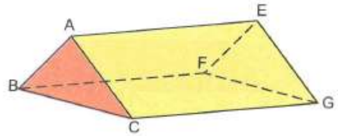
Contenu

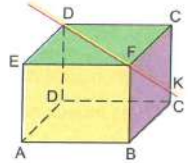
ACTIVITE 1 Dessiner des figures de l'espace dans le plan

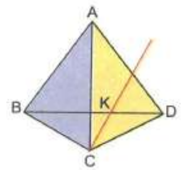
Voici quelques règles et conventions de représentations de figures de l'espace dans le plan :

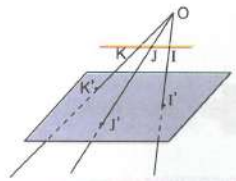
- Les traits visibles sont dessinés en traits pleins.
- Les traits cachés ou invisibles sont représentés en pointillés.
- Les droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.
- Si trois points de l'espace (réel) sont alignés, ils sont représentés sur le dessin par trois points alignés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
- En général, le rapport des longueurs est conservé.
- Les plans frontaux (ou plans vus de face) sont à l'échelle c'est-à-dire que les longueurs dans les plans frontaux sont à l'échelle.

Pour les figures suivantes, les règles précédentes sont-elles respectées ?









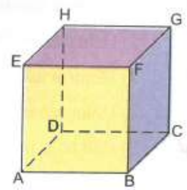
ACTIVITE 2 Positions relatives de droites

A Soit ABCDEFGH un cube de l'espace.

On dit que deux droites sont coplanaires si elles se trouvent dans le même plan.

Dans chacun des cas suivants, les droites sont-elles coplanaires ? Si oui, déterminer leur intersection.

1)	(EF)	et	(BF)	;	2)	(FH)	et	(EG) ;
3)	(GH)	et	(BF)	;	4)	(BF)	et	(CG) ;
5)	(DH)	et	(BF)	;	6)	(BF)	et	(EG).



B Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).

Soient I, J et K des points appartenant respectivement aux segments [BF], [EF] et [FG] tels que la droite (IJ) coupe (AB) en M, et la droite (IK) coupe (BC) en N.

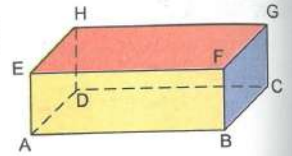
1) Les droites (IJ) et (MN) ont-elles un point commun ?

2) Montrer que les droites (JK) et (MN) sont parallèles.

3) Les droites (KJ) et (HG) se coupent en S.

Les droites (BK) et (CG) se coupent en R.

Montrer que (RS) // (BJ).



ACTIVITE 3 Parallélisme d'une droite et d'un plan

A On considère, dans l'espace, un parallélogramme de centre I inclus dans un plan (P).

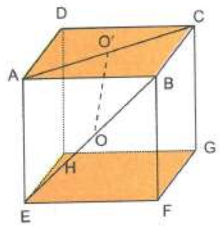
Soit S un point n'appartenant pas à (P).

Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

B Soit ABCDEFGH un cube de l'espace.

Soient O et O′ les milieux respectifs des segments [BE] et [AC].

Montrer que la droite (OO′) est parallèle au plan (ACF).



ACTIVITE 4 Positions relatives de droites et de plans

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace (voir figure).

Les points I, O et O′ sont les milieux respectifs des segments [AE], [BE], et [AC].

1) Montrer que les droites (OO′) et (CF) sont parallèles.

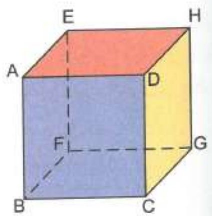
2) Déterminer l'intersection des deux plans (EBD) et (FAC).

3) Montrer que les plans (ECD) et (IOO′) sont parallèles.

4) Déterminer l'intersection de la droite (AD) et du plan (IOO′).

5) Soit M le point du segment [AB] tel que 3AM = AB.

Montrer que les deux droites (MO′) et (BC) se coupent en un point N puis déterminer l'intersection des deux plans (BCF) et (MO′F).



ACTIVITE 5 Alignement de trois points dans l'espace

A Soient B, C deux points d'un plan (P) et E un point n'appartenant pas à (P).

1) Montrer que les points B, C et E déterminent un plan.

2) Soit H un point du plan (BCE).

On suppose que la droite (EH) coupe le plan (P) en un point F.

Montrer que les points B, C et F sont alignés.

B Soit ABCD un tétraèdre.

Soient M, N, R des points appartenant respectivement aux segments [AB], [AC] et [AD].

On suppose que les droites (MN), (NR) et (MR) percent le plan (BCD) respectivement en R′, M′ et N′.

1) Montrer que les points M′, N′ et R′ appartiennent au plan (MNR) et au plan (BCD).

2) En déduire que les points M′, N′ et R′ sont alignés.

ACTIVITE 6 Parallélisme de deux plans

Soient ABC un triangle et O un point extérieur au plan (ABC).

1) Construire le point E tel que le quadrilatère OEAC soit un parallélogramme.

2) Soit I le milieu du segment [OB].

a) Montrer que le point B appartient à l'intersection des deux plans (OEI) et (ABC).

b) Soit (Δ) la droite d'intersection des deux plans (OEI) et (ABC).

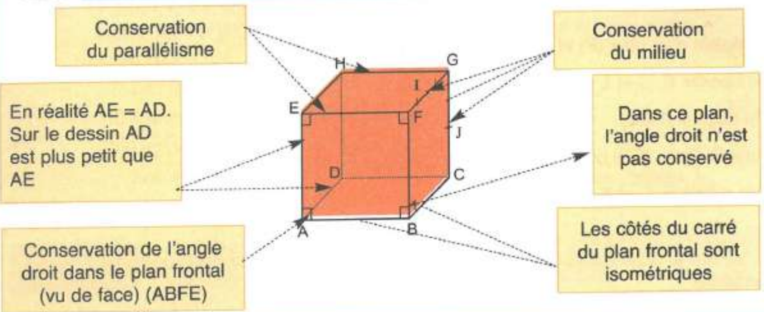
Montrer que (Δ) est parallèle à (AC).

3) a) Montrer que la droite (EI) coupe le plan (ABC) en un point F.

b) Vérifier que le point F appartient à la droite (Δ).

4) Montrer que les deux plans (EBC) et (OAF) sont parallèles.

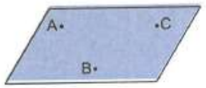
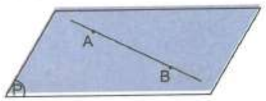
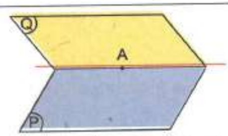
1 Représenter un cube de l'espace



On appelle plan frontal tout plan vu de face.

Sur la représentation du cube ci-contre, les faces ABFE et CDHG sont dans des plans frontaux.

2 Axiomes de la géométrie dans l'espace

 De deux points distincts A et B passe une droite unique que l'on note (AB).	 De trois points non alignés A, B et C passe un plan unique que l'on note (ABC).
 Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux points distincts A et B, alors $\mathcal{P}$ contient la droite (AB).	 Si deux plans distincts P et Q ont un point commun A, alors P et Q sont sécants et leur intersection est une droite passant par A.

Exemple

Soit (D) une droite et soit A un point, de l'espace, n'appartenant pas à (D).

Soient B et C deux points distincts de la droite (D).
Les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminent un plan unique (ABC).
Donc le point A et la droite (D) déterminent un plan unique.

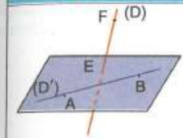
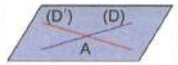
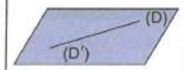
Remarques

Toutes les propriétés de la géométrie plane sont valables dans tout plan de l'espace.

Notes

Un plan peut être défini :
- par trois points non alignés ;
- par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- par deux droites sécantes ;
- par deux droites parallèles.

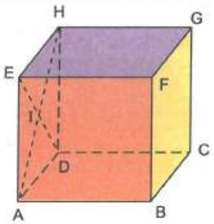
3 Positions relatives de deux droites dans l'espace

Droites non coplanaires	Droites coplanaires		
			
Il n'existe aucun plan contenant (D) et (D') (D) et (D') sont non coplanaires.	(D) et (D') sont **sécantes** en A. $(D)\cap(D')=\{A\}$	(D) et (D') sont **confondues** $(D)=(D')$	(D) et (D') sont **strictement parallèles** $(D)\cap(D')=\varnothing$

Définition On dit que deux droites (D) et (D') sont parallèles dans l'espace si les deux conditions suivantes sont réalisées :
- (D) et (D') sont coplanaires ;
- (D) et (D') sont disjointes ou confondues.

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube.
- CDHG est un carré.
  Donc les droites (CD) et (GH) sont coplanaires et disjointes. D'où : (CD) et (GH) sont strictement parallèles.
- Des droites (BF) et (HC) sont non coplanaires.
- Les droites (DE) et (AH) sont sécantes au point I centre du carré ADHE.



Remarque

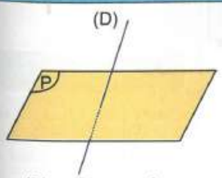
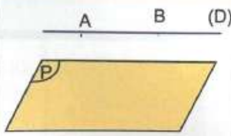
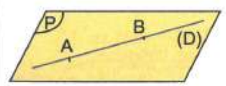
Deux droites coplanaires sont deux droites incluses dans un même plan.

Remarque

Par un point de l'espace passe une droite et une seule parallèle à une droite donnée.

4 Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Soient (D) une droite et (P) un plan dans l'espace.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
		
(D) et (P) sont **sécants**. [i.e. (D) et (P) ont un seul point commun]	(D) est **strictement parallèle** à (P). [i.e. (D) et (P) n'ont aucun point commun]	(D) est **incluse dans** (P). On écrit $(D)\subset(P)$

Définition Une droite (D) est parallèle à un plan dans l'un des deux cas suivants :
- (D) est incluse dans (P) ;
- (D) et (P) n'ont aucun point commun.

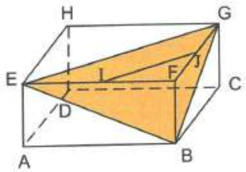
On écrit alors (D) // (P).

Remarque

(D) est strictement parallèle à (P) si leur intersection est vide : (D) ∩ (P) = ∅.

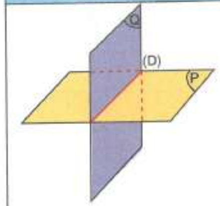
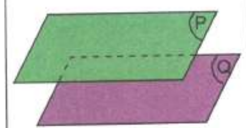
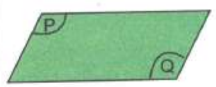
Exemples

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle.
- La droite (AB) et le plan (EFG) sont parallèles car ils n'ont aucun point commun.
- Soient I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
  La droite (IJ) est parallèle au plan (BEG).



5 Positions relatives de deux plans dans l'espace

Soit (P) et (Q) deux plans dans l'espace.

Plans sécants	Plans parallèles	
		
(P) et (Q) sont **sécants** selon la droite (D). On écrit : (P) ∩ (Q) = (D)	(P) et (Q) sont disjoints. On dit que (P) et (Q) sont **strictement parallèles** et on écrit (P) // (Q)	(P) et (Q) sont **confondus**. On écrit : (P) = (Q)

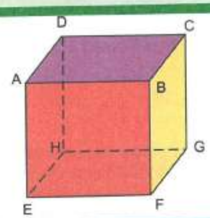
Remarque

- **(P) ≠ (Q) signifie qu'il existe au moins un point A de l'espace tel que :**
  A ∈ (P) et A ∉ (Q)
- **(P) et (Q) sont disjoints signifie que (P) et (Q) n'ont aucun point commun ; et on écrit alors :**
  (P) ∩ (Q) = ∅

Définition On dit que deux plans (P) et (Q) sont parallèles si ces deux plans sont confondus ou disjoints et on écrit (P) // (Q).

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.
- Le plan (ABC) est strictement parallèle au plan (EFG).
- Les plans (ABC) et (AED) sont sécants suivant la droite (AD).
- Les plans (EFG) et (EHG) sont confondus.



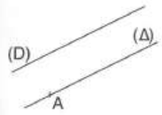
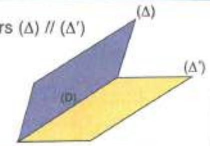
Remarque

Si deux plans (P) et (Q) sont parallèles, alors toute droite incluse dans l'un d'eux est parallèle à l'autre.

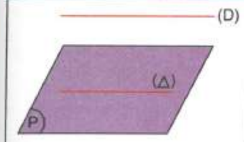
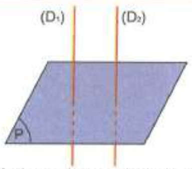
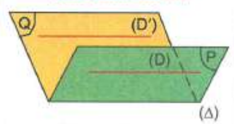
16 DEFINITIONS ET REGLES

6 Parallélisme de droites et de plans

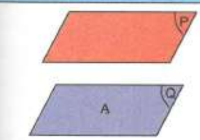
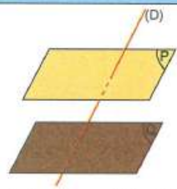
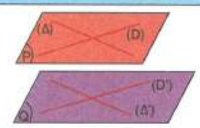
Droites

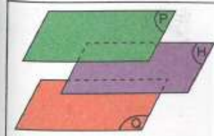
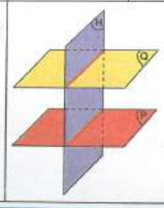
	Par un point A passe une droite (Δ) unique parallèle à une droite (D) donnée	si $\begin{cases} (\Delta) \mathbin{//} (D) \\ (\Delta') \mathbin{//} (D) \end{cases}$, alors (Δ) // (Δ') 

Droites et plans

		Théorème du toit
		
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement s'il existe une droite (Δ) incluse dans (P) et (Δ) // (D).	Si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, alors tout plan (P) qui coupe (D_1) coupe aussi (D_2).	Soient (P) et (Q) deux plans sécants selon une droite (Δ). Si (P) contient une droite (D) et (Q) contient une droite (D') tels que (D) et (D') sont strictement parallèles, alors (Δ) est parallèle à (D) et à (D').

Plans

		
Par un point A passe un plan (Q) unique parallèle à un plan (P) donné.	Si deux plans (P) et (Q) sont parallèles, alors toute droite (D) qui coupe (P) coupe aussi (Q).	Deux plans (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

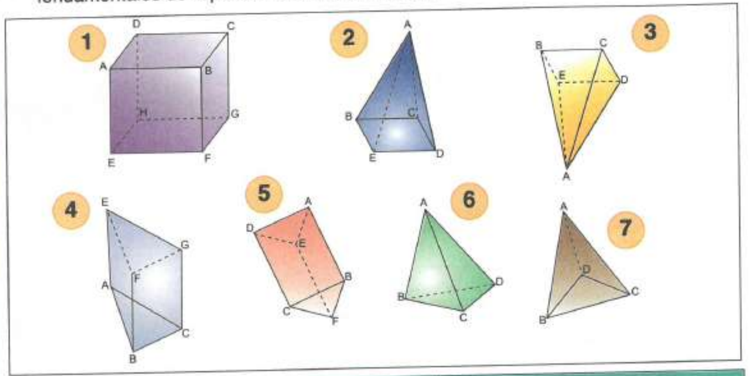
 (P), (Q) et (H) sont trois plans. si $\begin{cases} (P) \mathbin{//} (H) \\ (Q) \mathbin{//} (H) \end{cases}$, alors (P) // (Q)	 Si un plan (H) coupe deux plans parallèles (P) et (Q), alors les droites d'intersection sont parallèles.

Remarques

Si (Δ) est une droite parallèle à un plan, alors la droite passant par un point A de (P) et parallèle à (Δ) est incluse dans (P).

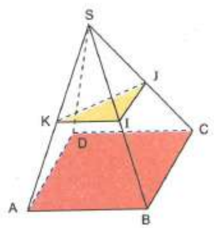
Exemples et application

- Certaines figures parmi les figures suivantes ne respectent pas les règles fondamentales de représentation dans l'espace.



Figures	Les règles fondamentales sont-elles respectées	Pourquoi
1	oui	
2	non	[AC] est visible (trait plein)
3	oui	
4	non	[EF] est visible (trait plein) [AC] est caché (trait pointillé)
5	oui	
6	oui	
7	non	[BD] et [CD] sont cachés (traits discontinus)

- Soit SABCD une pyramide de base un parallélogramme ABCD.



Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [SB], [SC] et [SA].

• Montrons que (IJ) // (AD).

- Dans le triangle SBC, I et J sont les milieux respectifs des côtés [SB] et [SC]. Donc : (IJ) // (BC) (1).
- ABCD est un parallélogramme. Donc : (BC) // (AD) (2).
- De (1) et (2), on tire : (IJ) // (AD)

Remarque

Si (Δ) est une droite parallèle à un plan (P), alors toute droite parallèle à (Δ) est parallèle au plan (P).

• Montrons que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

- On a : (IJ) // (BC) (1)
- Dans le triangle SAB, I et K sont les milieux respectifs des côtés [SB] et [SA] ; donc : (IK) // (BA) (3)
- De (1) et (3), et puisque les droites (IJ) et (IK) sont sécantes en I et que les droites (BC) et (BA) sont sécantes en B, alors les deux plans (IJK) et (ABC) sont parallèles .

- Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

Soient M et N les milieux respectifs de [AE] et [DH].

• Montrons que les points B, C, M, N sont coplanaires.

- Dans le carré ADHE, M et N sont les milieux respectifs des côtés [AE] et [DH] ; donc : (MN) // (AD) (4)
- Dans le carré ABCD, on a : (AD) // (BC) (5)
- De (4) et (5), il découle que : (MN) // (BC).

Donc les droite (BC) et (MN) sont coplanaires.

D'où : Les points B, C, M et N sont coplanaires .

• Soit K le point d'intersection des droites (BM) et (EF).

Soit L le point d'intersection des droites (CN) et (GH).

Montrons que (KL) // (BC)

Les deux plans (ABC) et (EFG) sont parallèles ; donc le plan (MBC) les coupe selon deux droites parallèles.

Or (ABC) ∩ (MBC) = (BC) et (EFG) ∩ (MBC) = (KL), par suite (KL) // (BC) .

- Soient ABCDEFGH un cube et M un point, distinct de E et F, appartenant à l'arête [EF].

Montrer que les plans (EFG) et (BDM) sont sécants selon une droite (Δ) et que (Δ) // (BD).

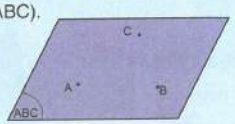
Remarque

Il existe un plan unique passant par un point et parallèle à un plan donné.

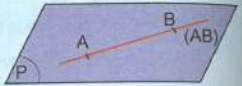
Axiomes de la géométrie dans l'espace

Deux points distincts A et B de l'espace déterminent une droite unique (AB).

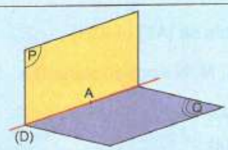
Trois points non alignés A, B, C déterminent un plan unique (ABC).



Si un plan (P) contient deux points distincts A et B, alors la droite (AB) est incluse dans (P).



Si deux plans distincts ont un point commun, alors ils se coupent selon une droite passant par ce point.



Toutes les propriétés de la géométrie plane sont valables dans tout plan de l'espace

Positions relatives de deux droites dans l'espace

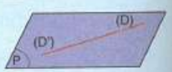
Soient (D) et (D') deux droites dans l'espace

- (D) et (D') :
  - coplanaires :
    - sécantes : (D) ∩ (D') = {A}
    - parallèles :
      - strictement parallèles : (D) ∩ (D') = ∅
      - confondues : (D) = (D')
  - non coplanaires

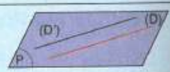
- (D) // (D') signifie que { (D) et (D') sont coplanaires ; (D) = (D') ou (D) ∩ (D') = ∅

(D) et (D') sécantes

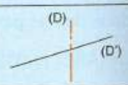
(D) et (D') confondues



(D) et (D') sont strictement parallèles



(D) et (D') non coplanaires



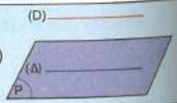
Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Soient (D) une droite et (P) un plan dans l'espace

- (D) et (P) :
  - parallèles (D) // (P) :
    - strictement parallèles : (D) ∩ (P) = ∅
    - (D) est incluse dans (P) : (D) ⊂ (P)
  - sécants : (D) ∩ (P) = {A}

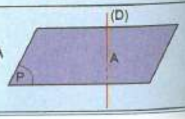
- (D) // (P) si et seulement s'il existe une droite (Δ) incluse dans (P) et (Δ) // (D).

(D) est strictement parallèle à (P)



(D) est incluse dans (P)

(D) perce (P) en point A



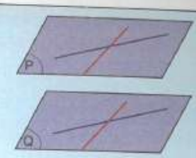
Positions relatives de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plans

- (P) et (Q) :
  - parallèles (P) // (Q) :
    - strictement parallèles : (P) ∩ (Q) = ∅
    - confondus : (P) = (Q)
  - sécants selon une droite (D) : (P) ∩ (Q) = (D)

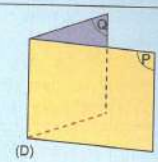
- (P) // (Q) si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- (P) // (Q) signifie que (P) = (Q) ou (P) ∩ (Q) = ∅.

(P)∩(Q)=∅



(P)=(Q)

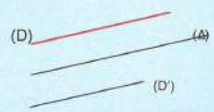
(P)∩(Q)=(D)



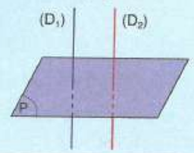
Droites parallèles

Par un point A, de l'espace, passe une droite unique parallèle à une droite donnée (D).

Si (D), (D') et (Δ) sont trois droites de l'espace telles que (D) // (Δ) et (D') // (Δ), alors (D) // (D').

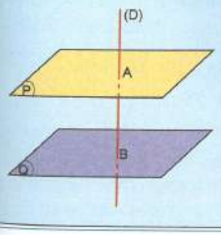


Si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, alors tout plan (P) qui coupe (D_1) coupe aussi (D_2)

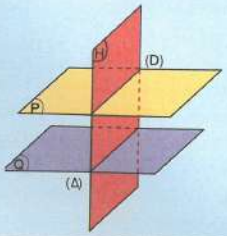


Droites et plans dans l'espace

Si (P) et (Q) sont deux plans tels que (P) // (Q), alors toute droite (D) qui perce (P), perce aussi (Q)

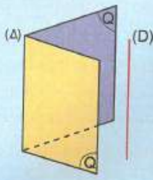


Si (P), (Q) et (H) des plans. Si (P) // (Q), et (H) coupe (P) selon une droite (D), alors (H) coupe (Q) selon une droite (Δ) telle que : (Δ) // (D).



Théorème du toit

Si une droite (D) est strictement parallèle à deux plans sécants (P) et (Q), alors (D) est parallèle à leur intersection (D) (voir l'autre formulation au (6)



1 Parallélisme d'une droite et d'un plan — Parallélisme de deux plans

Soit ABCD un tétraèdre. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

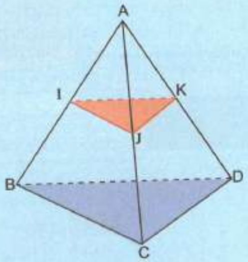
1) Construire la figure.

2) Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

3) Montrer que les deux plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

Solution

1) Construction de la figure.



2) Montrons que (IJ) est parallèle à (BCD).

Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des deux côtés [AB] et [AC].

Donc : (IJ) // (BC).

Or $(BC) \subset (BCD)$, par conséquent (IJ) // (BCD).

3) Montrons que (IJK) et (BCD) sont parallèles.

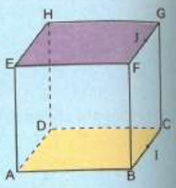
- On a : (IJ) // (BC) (1)
- Dans le triangle ACD, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AD].

  Donc : (JK) // (CD) (2)
- De (1) et (2), on déduit que (BC) et (CD) sont deux droites sécantes incluses dans le plan (BCD) et respectivement parallèles aux deux droites (IJ) et (JK) qui sont sécantes et incluses dans le plan (IJK).

Donc les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

2 Parallélisme d'une droite et d'un plan — Intersection de deux plans — Parallélisme de deux plans

Soient ABCDEFGH un cube, I et J les milieux respectifs de [AC] et [FG] (voir figure).



1) Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BFH).

2) Les droites (EJ) et (HF) se coupent en un point P.

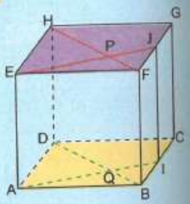
Les droites (AI) et (BD) se coupent en un point Q.

a) Montrer que les deux plans (BFH) et (EIJ) se coupent selon la droite (PQ).

b) En déduire que la droite (PQ) est parallèle à la droite (FB).

Solution

1) Montrons que (IJ) // (BFH).



- BCGF est un carré, I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [FG].

  Donc : (IJ) // (BF)
- Or $(BF) \subset (BFH)$, par conséquent : (IJ) // (BFH).

2) a) Montrons que $(BFH) \cap (EIJ) = (PQ)$.

- On a : (BFH) = (BFHD) (car (BF) // (DH)).
- On a : (EIJ) = (EAIJ) (Car (AE) // (IJ)
- On a : $E \in (EIJ)$ et $E \notin (BFH)$

  Donc : $(BFH) \neq (EIJ)$
- On a : $(FH) \cap (EJ) = \{P\}$ et $(BD) \cap (AI) = \{Q\}$

  Donc les points P et Q appartiennent (tous les deux) aux plans (BFH) et (EIJ).
- D'où : $(BFH) \cap (EIJ) = (PQ)$.

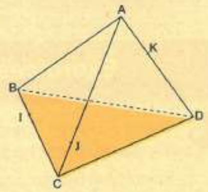
b) Déduisons que (PQ) // (FB).

- On a : (FB) // (BFH) (car $(FB) \subset (BFH)$)
- On a : (FB) // (EIJ) (car (FB) // (IJ) et $(IJ) \subset (EIJ)$)
- D'après le théorème du toit, (FB) est parallèle à la droite d'intersection des deux plans (BFH) et EIJ). Or $(BFH) \cap (EIJ) = (PQ)$, par suite : (PQ) // (FB).

Exercices d'application

Positions relatives d'une droite et d'un plan

1 Soit ABCD un tétraèdre. Le point I appartient au segment [BC], et I est distinct de B et C. Le point J appartient au segment [AC], et J est distinct de A et C. Le point K appartient au segment [AD], et K est distinct de A et D.



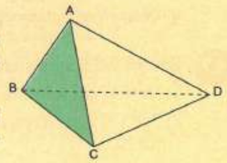
1) Les droites (AI) et (JK) sont-elles sécantes ?

2) Déterminer l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD).

2 Soit ABCD un tétraèdre.

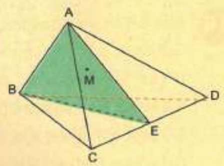
Soient M un point du segment [AB] et N un point du plan (BCD).

Construire le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (ACD).



3 Soit ABCD un tétraèdre, E un point du segment [CD] et M un point du plan (ABE).

Construire le point d'intersection de la droite (DM) et du plan (ABC).



4 Soit (D) une droite.

Soit A un point n'appartenant pas à (D).

Soit B un point n'appartenant pas au plan (P) déterminé par la droite (D) et le point A.

Les droites (AB) et (D) sont-elles sécantes ?

5 Soient A, B deux points distincts d'un plan (P) et C un point extérieur au plan (P).

Soient M un point de la droite (BC) et N un point de la droite (AC).

Montrer que si la droite (MN) perce la plan (P), alors elle coupe la droite (AB).

Positions relatives de deux plans

6 On considère, dans l'espace, un parallélogramme ABCD de centre I. Soit M un point n'appartenant pas au plan (ABC).

1) Déterminer l'intersection des plans (MAC) et (MBD).

2) Déterminer l'intersection des plans (MAB) et (MDC).

3) Soit M' le symétrique du point M par rapport au centre I du parallélogramme ABCD.

Quelle est la nature du quadrilatère MBM'D ?

7 Soient ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD], et O un point n'appartenant pas au plan (BCD).

Les droites (AC) et (BD) se coupent en un point I.

Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point J.

1) Déterminer l'intersection (Δ_1) des plans (OAC) et (OBD).

2) Déterminer l'intersection (Δ_2) des plans (OAD) et (OBC).

3) Soit (Q) le plan déterminé par les droites (Δ_1) et (Δ_2).

a) Déterminer l'intersection des deux plans (Q) et (OAB).

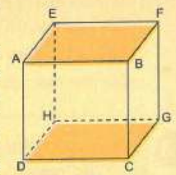
b) Déterminer l'intersection des deux plans (Q) et (OCD).

Parallélisme dans l'espace

8 On considère, dans l'espace, un cube ABCDEFGH.

Soient M, N, S, T des points appartenant respectivement aux segments [AB], [CD], [EF], [HG] tels que :

$M \neq A$, $M \neq B$ et $MB = NC = ES = HT$



1) Montrer que l'intersection des deux plans (MFG) et (ABC) est la droite (MN).

2) a) Montrer que les droites (AT) et (DS) sont parallèles au plan (MFG).

b) Prouver que les deux plans (MFG) et (AST) sont parallèles.

Exercices de renforcement des apprentissages

Points alignés

9 Soit ABCD un tétraèdre.

On considère des points M, N, P, Q qui appartiennent respectivement aux arêtes [AC], [AD], [BC], [BD] tels que :

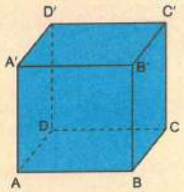
- (MN) et (PQ) sont parallèles à (CD) ;
- (PM) et (QN) sont sécantes en O.

Montrer que les points A, B et O sont alignés.

Intersection et parallélisme dans l'espace

10 Soit ABCDA'B'C'D' un cube dans l'espace.

Soit I le milieu de [DD'].



1) Montrer que les droites (D'C) et (A'B) sont parallèles.

2) Montrer que la droite (A'D) coupe le plan (AIC) en un point J.

3) Déterminer l'intersection des deux plans (AIC) et (A'IB).

11 Soient ABCD un tétraèdre. I le milieu du segment [BC] et B' le symétrique du point B par rapport au point D.

1) Montrer que la droite (CB') est parallèle au plan (AID).

2) Déterminer l'intersection des deux plans (AID) et (ACB').

12 Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

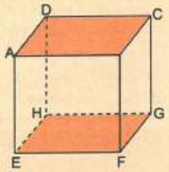
Les deux points O et O' sont les centres de gravité respectifs des deux triangles EGD et ACF.

1) Montrer que la droite (HB) coupe le plan (EGD) en O, et que la droite (HB) coupe le plan (ACF) en O'.

2) Soient I et J les milieux respectifs de [AC] et [EG].

Montrer que : (DJ) // (FI)

13 Soient ABCDEFGH un cube, I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [EF] et [GH].



1) Montrer que les points B, C, J, K sont coplanaires.

2) Montrer que les droites (IH) et (KB) sont parallèles.

3) En déduire que la droite (IH) est parallèle au plan (JKC).

14 Soient ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC].

Soit E le point du segment [AJ] tel que : $JE=\frac{1}{3}JA$

1) Montrer que la droite (IE) coupe le plan (BCD) en un point F. Construire ce point F.

2) Déterminer l'intersection des deux plans (ABC) et (ADF).

15 Soient ABC un triangle et O un point extérieur au plan (ABC). Soient A', B', C' des points de l'espace tels que les point A, B, C soient les milieux respectifs des segments [OA'], [OB'], [OC'].

1) Montrer que les deux plans (ABC) et (A'B'C') sont parallèles.

2) Déterminer l'intersection des plans (OAC) et (A'B'C').

Exercices de synthèse

16 Soient ABC un triangle et D un point, de l'espace, n'appartenant pas au plan (ABC).

Soient M et N deux points appartenant respectivement aux segments [AB] et [AC] tels que la droite (MN) soit parallèle à la droite (BC) (M ≠ A et M ≠ B).

1) Déterminer l'intersection des plans (BND) et (MND).

2) Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (MND).

3) Déterminer l'intersection des plans (BMD) et (CND).

17 Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

1) Montrer que la droite (AD) perce le plan (CFH).

2) Soit I le point d'intersection de la droite (AD) et du plan (CFH).

Montrer que les droites (FC) et (HI) sont parallèles.

18 Soit EFGH un tétraèdre.

Soit M un point du segment [EF], distinct de E et F.

(P) est le plan passant par M et parallèle au plan (EGH).

(Q) est le plan passant par M et parallèle au plan (FGH).

(P) coupe (FG) en A et (FH) en B.

(Q) coupe (EH) en C et (EG) en D.

1) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2) Comment faut-il choisir M pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme ?

19 On considère une pyramide de sommet S et de base un parallélogramme ABCD.

Soient M un point de [SA], N un point de [SB] et E un point de [SC] tels que :

$$\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SE}{SC}=\frac{3}{4}$$

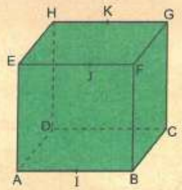
1) Montrer que les plans (MNE) et (ABC) sont parallèles.

2) En déduire que la droite (SD) coupe le plan (MNE) en un point F.

3) Quelle est la nature du quadrilatère MNEF ?

20 Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [EF] et [HG].



1) Montrer que la droite (AJ) perce le plan (BCG) en un point L.

2) Déterminer l'intersection des deux plans (AJK) et (BCG).

3) Montrer que les plans (ICG) et (AEK) sont parallèles.

21 Soit ABCDEFGH un parallélépipède (les supports des arêtes [AE], [BF], [CG] et [DH] sont parallèles).

Le point I est le milieu du segment [GH].

1) Soit M le point d'intersection des droites (EI) et (FH).

Montrer que les plans (AEI) et (AFH) se coupent selon la droite (AM).

2) a) Montrer que les points C, D, E et F sont coplanaires.

b) Montrer que les droites (DE) et (CF) sont parallèles.

3) Montrer que les deux plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

4) Montrer que la droite (CI) coupe le plan (ADH).

22 On considère, dans l'espace, un parallélogramme ABCD de centre I inclus dans un plan (P).

Soit S un point n'appartenant pas au plan (P).

Soit S' le point tel que I soit le milieu de [SS'].

1) Montrer que (CD) est parallèle au plan (SAB).

2) Quelle est la nature du quadrilatère DSBS' ?

3) Montrer que les deux plans (SAB) et (S'CD) sont parallèles.

4) Déterminer l'intersection des deux plans (SBD) et (SS'D).

23 Soient (D) et (D') deux droites non coplanaires coupant un plan (P) respectivement en A et B.

Soit (L) la droite passant par B et parallèle à la droite (D).

Soit (L') la droite passant par A et parallèle à la droite (D').

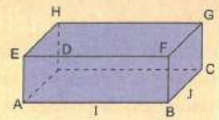
1) Déterminer l'intersection du plan (P) avec le plan déterminé par (L) et (D), puis avec le plan déterminé par (L') et (D').

2) Prouver que le plan (Q) déterminé par les droites (L) et (D), est parallèle au plan (Q') déterminé par les droites (L') et (D').

3) Montrer que les deux intersections de (P) avec (Q) et de (P) avec (Q') sont parallèles.

24 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].



1) Montrer que les deux droites (IJ) et (GE) sont parallèles. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (BGE).

2) Montrer que les points B, J, H et E sont coplanaires.

3) Soit M le point d'intersection des droites (HJ) et (BE).

Soit (Δ) l'intersection des plans (EBG) et (IJH).

Montrer que la droite (Δ) est parallèle à la droite (IJ). Construire alors M et (Δ).

25 Soit ABCD un tétraèdre.

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [BD], [AD] et [AC].

Soit G le centre de gravité du triangle ADC.

1) a) Construire la figure.

b) Montrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

2) a) Déterminer l'intersection des plans (BCG) et (ABD).

b) Construire le point E d'intersection de la droite (GI) et du plan (ABD) (Justifier la réponse).

Géométrie dans l'espace
Orthogonalité

17

Capacités attendues

Emploi des propriétés de la géométrie dans l'espace pour la résolution de problèmes issus du réel.

Contenu

• Activités préparatoires

- Droites orthogonales
- Droite perpendiculaire à un plan
- Théorème des trois droites perpendiculaires
- Plans perpendiculaires
- Calcul dans l'espace

• Définitions et règles

- Droites orthogonales
- Orthogonalité d'une droite et d'un plan
- Perpendicularité de deux plans
- Parallélisme et orthogonalité
- Formules d'aires et de volumes

• Points essentiels

• Exercices résolus

• Exercices et problèmes

17 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Droites orthogonales

A Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

1) a) Les droites (AE) et (HE) sont-elles caplanaires ?

b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AEH}$.

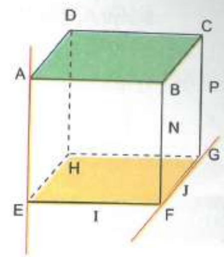
2) a) Les droites (AE) et (FG) sont-elles caplanaires ?

b) Déterminer la droite (Δ_1) passant par B et parallèle à la droite (AE).

c) Déterminer la droite (Δ_2) passant par B et parallèle à la droite (FG).

d) (Δ_1) et (Δ_2) sont-elles perpendiculaires ?

e) Que peut-on dire des droites (AE) et (FG) ?



3) Soient I, J, N et P les milieux respectif des segments [AB], [BC], [BF] et [CG].

Les deux droites suivantes sont-elles orthogonales ?

Justifier la réponse dans chaque cas :

a) (NP) et (AE).

b) (PJ) et (EF).

c) (FC) et (AH).

d) (BH) et (AG).

B Soit ABCD un tétraèdre tel que $(AB) \perp (CD)$ et $(AD) \perp (BC)$.

Soient I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], (AC], [AD], [CD], [DB] et [BC].

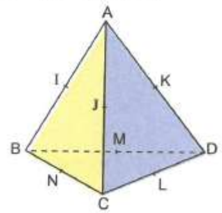
1) a) Montrer que les points J, K, M et N sont caplanaires.

b) Montrer que JKMN est un rectangle.

c) Montrer, de même, que IJLM est un rectangle.

2) Montrer que les points I, K, L et N sont caplanaires et que IKLN est un rectangle.

3) Montrer que les deux droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

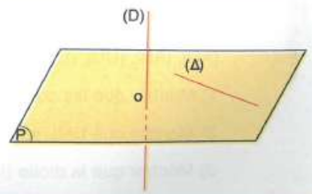


ACTIVITE 2 Droite perpendiculaire (orthogonale) à un plan

A Soient (P) un plan dans l'espace et (D) une droite perçant (P) en O telle que (D) soit perpendiculaire à toute droite passant par O et incluse dans le plan (P).

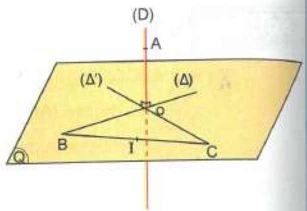
Soit (Δ) une droite ne passant pas par O, et incluse dans (P).

Montrer que (D) et (Δ) sont orthogonales.



B Soient (Q) un plan dans l'espace et (D) une droite perçant (Q) en un point O telle que (D) soit perpendiculaire à deux droites (Δ) et (Δ') sécantes en O et incluses dans (Q).

Soient A, B et C des points appartenant respectivement à (D), (Δ) et (Δ') ; soit I le milieu du segment [BC] (voir figure).



1) Montrer que : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ et $OB^2+OC^2=2OI^2+\frac{1}{2}BC^2$

En déduire que : $AI^2=OA^2+OI^2$

2) Montrer que : (D) ⊥ (BC).

ACTIVITE 3 Théorème des trois droites perpendiculaires

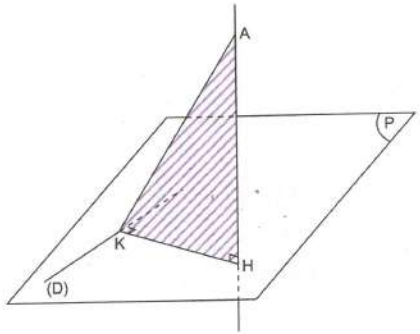
A Soient (D) une droite incluse dans un plan (P) et A un point n'appartenant par à (P).

La droite passant par A et perpendiculaire au plan (P) coupe ce plan en un point H.

Le point K est le projeté orthogonal du point H sur la droite (D).

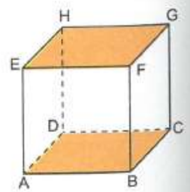
1) Montrer que la droite (D) est orthogonale au plan (AHK).

2) Montrer que les droites (AK) et (D) sont perpendiculaires.



B Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

Soient I, J, K, L et M les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [CD], [EH] et [EF].



1) Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

2) Montrer que IJML est un rectangle.

3) Montrer que la droite (IK) est perpendiculaire au plan (IJL).

ACTIVITE 4 Plans perpendiculaires

A Soit ABCD un tétraèdre tel que AC = BC et DA = DB.

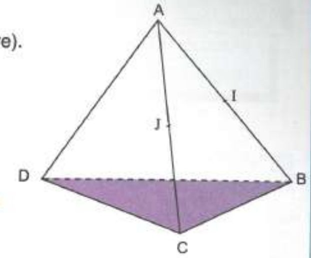
Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] (voir figure).

1) Montrer que : (CI) ⊥ (AB) et (DI) ⊥ (AB).

2) En déduire que la droite (AB) est orthogonale au plan (CDI).

(AB) est incluse dans (ABC) et (AB) ⊥ (CDI).

On dit que les deux plans (ABC) et (CDI) sont perpendiculaires.

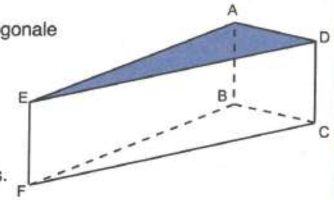


B Soient ABCD un carré et E un point appartenant à la droite orthogonale (perpendiculaire) au plan (ABC) en A tel que E ≠ A.

On considère le point F tel que EFCD soit un parallélogramme.

1) Montrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABE)

2) Montrer que les deux plans (EBD) et (AEC) sont perpendiculaires.



ACTIVITE 5 Calcul dans l'espace

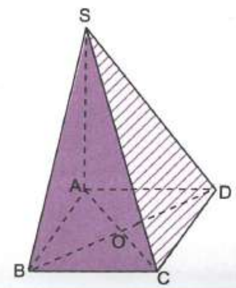
Soit SABCD une pyramide de base un carré ABCD de centre O de côté de longueur 6 tel que (AS) soit orthogonale au plan (ABCD).

On pose AS = x.

1) Peut-on trouver une valeur de x pour laquelle le triangle SBD est rectangle en S ?

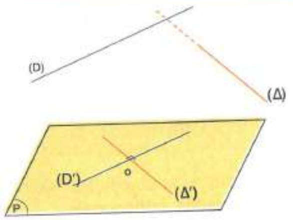
2) Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le triangle SBD est équilatéral ?

3) Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le triangle SBC est rectangle ?



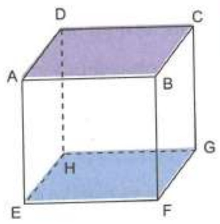
1 Droites orthogonales

Définition On dit que deux droites (D) et (Δ) sont **orthogonales** dans l'espace si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires (dans le plan qu'elles déterminent). On note (D) $\perp$ (Δ).



Exemples

- Soit ABCDEFGH un cube (figure)
  - Montrons que (AE) est orthogonale à (DC).
    - $\rightarrow$ ABCD est un carré ; donc : (AB) // (DC) (1)
    - $\rightarrow$ ABEF est un carré ; donc : (AB) $\perp$ (AE) (2)
    - $\rightarrow$ De (1) et (2), on tire (AE) $\perp$ (DC)
  - Montrons que (BF) $\perp$ (GH).
    Puisque (AE) $\perp$ (DC), (BF) // (AE) et (GH) // (DC) , alors (BF) $\perp$ (GH).



Propriété 1
- Si deux droites sont orthogonales dans l'espace, alors toute droite parallèle à l'une d'elles est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une d'elles est orthogonale à l'autre.

Soient (D), (Δ), (D') et (Δ') des droites de l'espace.

- Si $\begin{cases} (D) \perp (\Delta) \\ (D) \parallel (D') \end{cases}$, alors (D') $\perp$ (Δ)
- Si $\begin{cases} (D) \perp (\Delta) \\ (D) \parallel (D') \\ (\Delta) \parallel (\Delta') \end{cases}$, alors (D') $\perp$ (Δ')

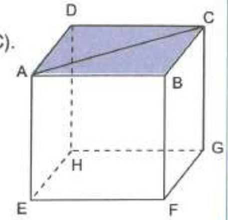
2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition On dit qu'une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans (P). On note (D) $\perp$(P).

Propriété 2 Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemples et applications

- Soit ABCDEFGH un cube (voir figure).
  - Montrons que la droite (BF) est orthogonale au plan (ABC).
    ABFE et BFGC son des carrés ; donc :
    (BF) $\perp$ (AB) et (BF) $\perp$ (BC)
    Comme (AB) et(BC) sont deux droites incluses dans le plan (ABC) et sécantes en B. alors la droite (BF) est orthogonale au plan (ABC).
  - Montrons que (BF) $\perp$ (AC)
    (BF) $\perp$ (ABC) et (AC)$\subset$(ABC) ; donc (BF) $\perp$ (AC).



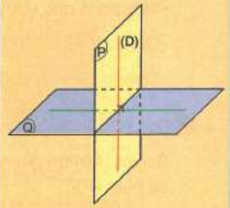
- Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle.
  1) Montrer que la droite (EF) est orthogonale au plan (BCG).
  2) En déduire que (EF) $\perp$ (BG).

Remarque importante

Pour démontrer que deux droites sont orthogonales dans l'espace, on cherche généralement un plan contenant l'une de ces droites et orthogonal à l'autre.

3 Perpendicularité de deux plans

Définition On dit que deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre et on note alors (P) $\perp$ (Q).

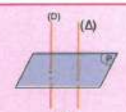


Exemple et application

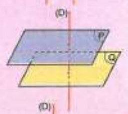
- Dans un cube ABCDEFGH, on a : (ABC) $\perp$ (BDH) puisque (DH) $\perp$ (ABC) et que (DH) $\subset$ (BDH).
- Dans un cube ABCDEFGH, montrer que : (ABG) $\perp$ (DCF).

4 Parallélisme et orthogonalité

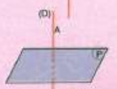
Propriété 3
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une d'elles est orthogonal à l'autre.



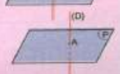
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un d'eux est orthogonale à l'autre.



- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.
- D'un point A passe une droite unique (D) orthogonale à un plan donné (P).



- D'un point A passe un plan unique (P) orthogonal à une droite donnée (D).

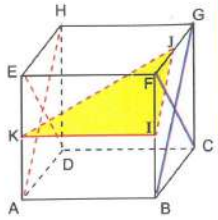


Soient (D) et (Δ) deux droites.
Soient (P) et (Q) deux plans.

- Si $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (D) \perp (P) \end{cases}$, alors (D) $\perp$ (Q).
- Si $\begin{cases} (D) \parallel (\Delta) \\ (D) \perp (P) \end{cases}$, alors ($\Delta$) $\perp$ (P).
- Si $\begin{cases} (P) \perp (D) \\ (Q) \perp (D) \end{cases}$, alors (P) // (Q).
- Si $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases}$, alors (D) // ($\Delta$).

Exemples et applications

■ Soit ABCDEFGH un cube.



I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BF], [FG] et [AE].

- Montrons que (DE) ⊥ (IJK).

→ ADHE est un carré ; ses diagonales sont perpendiculaires ; donc : (ED) ⊥ (AH).

→ Dans le triangle BFG, I et J sont les milieux respectifs des côtés [FB] et [FG]. Donc : (IJ) // (BG)

Or (BG) // (AH), par conséquent : (DE) ⊥ (IJ) (1)

→ On a : (EF) ⊥ (AED).

Comme (DE)⊂(AED) , on a : (EF) ⊥ (DE).

Or (EF) // (KI), par conséquent : (DE) ⊥ (KI) (2)

→ De (1) et (2), on déduit que : (DE) ⊥ (IJK).

- Montrons que (CF) ⊥ (IJK).

On a : (DE) ⊥ (IJK) et (DE) // (CF).

Donc : (CF) ⊥ (IJK).

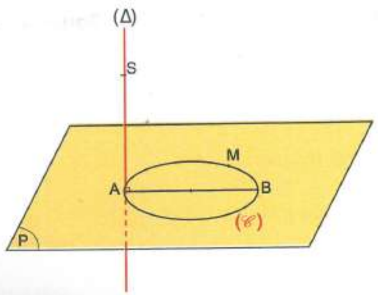
■ Soit ($\mathscr{C}$) un cercle inclus dans un plan (P).

Soient [AB] un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) et (Δ) la droite passant par A et orthogonal au plan (P).

Soit S un point de la droite (Δ), distinct de A.

Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}$), distinct de B.

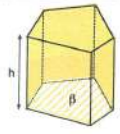
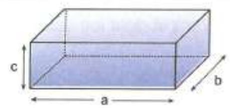
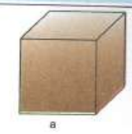
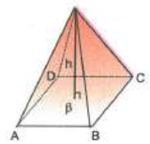
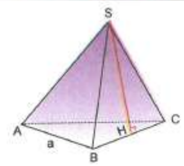
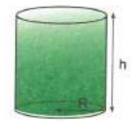
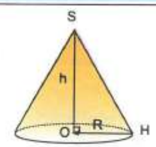
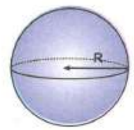
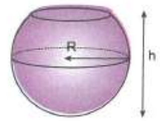
Montrer que le triangle SMB est rectangle en M.



Pythagore
(−580/−495)

Philosophe grec s'est intéressé à l'étude des nombres et leur relation avec les notions géométriques.

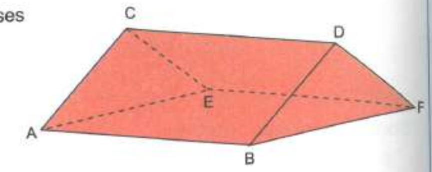
5 Formules d'aires et de volumes

Prisme droit	Parallélépipède rectangle	Cube
		
Soient h la hauteur du prisme, β l'aire de la base, ℓ le périmètre de la base. L'aire latérale est $S_L = \ell \times h$ L'aire totale est $S_T = \ell \times h + 2\beta$ Le volume est $V = \beta \times h$	Soient a, b et c la longueur, la largeur et la hauteur respectives du parallélépipède. L'aire latérale est $S_L = 2(a + b) \times c$ L'aire totale est $S_T = 2(a + b) \times c + 2ab$ Le volume est $V = abc$	Soit a la longueur de l'arête du cube. L'aire latérale est $S_L = 4a^2$ L'aire totale est $S_T = 6a^2$ Le volume est $V = a^3$
Pyramide	**Tétraèdre régulier**	**Cylindre de révolution**
		
h : hauteur de la pyramide SABCD. β : aire de la base ABCD. Le volume est : $V = \frac{1}{3}\beta \times h$.	Soient a la longueur du côté du tétraèdre régulier, ℓ le périmètre de la base. Toutes les faces ont la même longueur de la hauteur h = SH. La surface latérale est : $S_L = \frac{1}{2}\ \ell \times h$ Le volume est : $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	R : rayon de la base. h : hauteur du cylindre droit. La surface latérale est : $S_L = 2\pi R \times h$ Le volume est : $V = \pi R^2 \times h$
Cône de révolution	**Boule (sphère)**	**Portion de sphère tronquée**
		
h : hauteur du cône de révolution. e = SH. L'aire latérale est : $S_L = \pi R \times e$ Le volume est : $V = \frac{\pi R^2 \times h}{3}$	R : rayon de la boule. L'aire latérale est : $S_L = 4\pi R^2$ Le volume est : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	Le volume est : $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

Exemples et applications

Le prisme droit

Soit ABCDEF un prisme droit tel que AB = 7cm et dont les bases sont des triangles rectangles isocèles tels que AC = CE = 1,5cm.



Déterminons l'aire latérale S_L, l'aire totale S_T et le volume V du prisme ABCDEF.

• On a : $S_L = \ell \times h$ où ℓ est le périmètre de la base et h la hauteur du prisme.

On a : $\ell = AC + CE + AE$.

Or $AE = \sqrt{2}\,CE$ (car $AE^2 = AC^2 + CE^2 = 2CE^2$), par conséquent :

$\ell = (2+\sqrt{2})CE$

Donc : $\ell = (2+\sqrt{2}) \times \frac{3}{2}$ cm

Comme h = AB = 7cm, on a : $S_L = (2+\sqrt{2}) \times \frac{21}{2}$ cm²

• On a : $S_T = \ell \times h + 2\beta$ où β est l'aire de la base ACE.

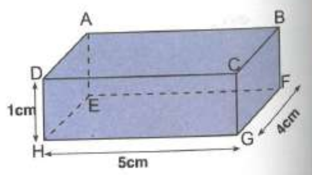
On a : $\beta = \frac{1}{2} AC \times CE$ c'est-à-dire : $\beta = \frac{9}{8}$ cm²

Donc : $S_T = \left[(2+\sqrt{2})\frac{21}{2} + \frac{9}{8}\right]$ cm² c'est-à-dire : $S_T = \frac{177 + 84\sqrt{2}}{8}$ cm²

• On a : V = β × h c'est-à-dire $V = \left(\frac{9}{8} \times 7\right)$ cm³ ou encore $V = \frac{63}{8}$ cm³ $= 7,875$ cm³

Le parallélépipède

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :



AB = 5cm , AD = 4cm et DH = 1cm

Déterminons l'aire latérale S_L, l'aire totale S_T et le volume V du parallélépipède ABCDEFGH.

• On a : $S_L = 2(AB + AD) \times DH$ c'est-à-dire : $S_L = 2(5 + 4) \times 1$.

D'où : $S_L = 18$cm².

• On a $S_T = S_L + 2AB \times AD$ c'est-à-dire : $S_T = 18 + 2 \times 4 \times 5$.

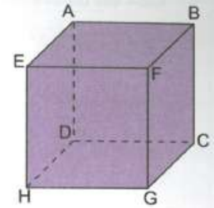
D'où : $S_T = 58$cm².

• On a : V = AB × AD × DH c'est-à-dire : V = 5 × 4 × 1.

D'où : V = 20cm³.

Le cube

Soit ABCDEFGH un cube d'arête de longueur a = 3cm



Déterminons l'aire latérale S_L, l'aire totale S_T et le volume V du cube ABCDEFGH.

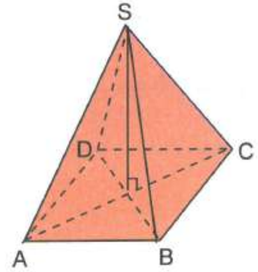
• On a : $S_L = 4a^2$; donc : $S_L = 36$cm²

• On a : $S_T = 6a^2$; donc : $S_T = 54$cm²

• On a : $V = a^2$; donc : V = 27cm³

La pyramide

Soit SABCD une pyramide de base un carré de côté de longueur 10cm, de hauteur 8cm.



Calculons le volume de la pyramide SABCD.

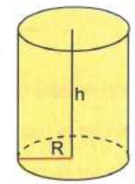
On a : $V = \frac{1}{3}\beta \times h$ où β est l'aire de la base ABCD.

On a : $\beta = 10^2$cm² c'est-à-dire β = 100cm².

Donc : $V = \frac{1}{3} \times 100 \times 8$ cm³ c'est-à-dire $V = \frac{800}{3}$ cm³

Le cylindre de révolution (droit)

Calculons l'aire latérale et le volume d'un cylindre droit de rayon R = 3cm et de hauteur h = 14cm.



$\left(\text{On prend } \pi \simeq \frac{22}{7}\right)$.

Soient S_L l'aire latérale et V le volume de ce cylindre.

• On a : $S_L = 2\pi R \times h$; donc : $S_L \simeq 2 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 14$

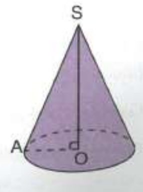
$S_L \simeq 264$ cm²

• On a : $V = \pi R^2 \times h$; donc : $V \simeq \frac{22}{7} \times 3^2 \times 14$

$V \simeq 396$ cm³

Le cône de révolution

On considère le cône de révolution (figure ci-contre) tel que :



SO = 20cm et OA = 15cm (On prend $\pi \simeq 3,14$).

Calculons l'aire latérale et le volume de ce cône de révolution.

Soient S_L l'aire latérale et V le volume de ce cône de révolution.

• On a : $S_L = \pi \times OA \times SA$

OSA est un triangle rectangle en O ; donc : $SA^2 = SO^2 + OA^2$

c'est-à-dire: $SA^2 = 15^2 + 20^2 = 625$. D'où : $SA = 25cm$.

Il en découle : $S_L \simeq 3,14 \times 15 \times 25\,cm^2$ c'est-à-dire $S_L \simeq 1177,5\,cm^2$

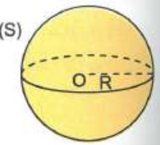
• On a : $V = \dfrac{\pi \times OA^2 \times OS}{3}$ c'est-à-dire : $V \simeq \dfrac{3,14 \times 15^2 \times 20}{3}\,cm^3$

ou encore : $V \simeq 4710\,cm^3$

La boule

■ Soit (S) une boule de rayon R = 4cm (On prend $\pi \simeq 3,14$).

(S)



• L'aire latérale de la sphère (S) est : $S_L = 4\pi R^2$

Donc : $S_L \simeq 4 \times 3,14 \times 4^2\,cm^2$ c'est-à-dire : $S_L \simeq 200,96\,cm^2$

• Le volume de la boule est : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Donc : $V \simeq \dfrac{4}{3} \times 3,14 \times 4^3\,cm^3$ c'est-à-dire : $V \simeq 267,9\,cm^3$

■ On considère un prisme droit de volume $36cm^3$ et tel que l'aire de la base soit égale à $12cm^2$.

Calculer la hauteur de ce prisme.

■ Calculer l'aire latérale, l'aire totale et le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur, largeur et hauteur 5,9cm, 3,7cm et 1,2cm (respectivement).

■ On considère une pyramide de base un carré de côté de longueur $5\sqrt{2}$ cm , de hauteur 7,72cm.

Calculer le volume de cette pyramide.

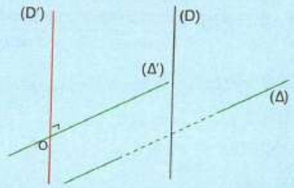
■ Calculer l'aire latérale et le volume d'un cylindre de révolution de rayon de base égale à 2cm, de hauteur 10cm.

■ Calculer l'aire latérale et le volume d'un cône de révolution de hauteur 4cm et de rayon de base 2,5cm.

■ Calculer l'aire latérale et le volume d'une boule de rayon 5cm.

Orthogonalité de deux droites

• Deux droites (D) et (Δ) sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles respectives menées par un point quelconque O sont perpendiculaires (déterminent un angle droit et on écrit : (D) ⊥ (Δ).



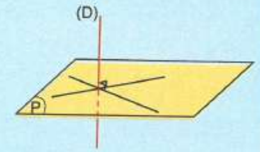
• Soient (D), (Δ), (D') et (Δ') des droites dans l'espace.

Si $\begin{cases} (D) \perp (\Delta) \\ (D') \,//\, (D) \\ (\Delta') \,//\, (\Delta) \end{cases}$, alors (D') ⊥ (Δ').

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

• Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si (D) est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan (P) et on écrit (D) ⊥ (P).

• Pour qu'une droite (D) soit orthogonale à un plan (P) il faut et il suffit que (D) soit orthogonale à deux droites sécantes de (P).



Soient (D), (Δ) deux droites et (P), (Q) deux plans.

• Si $\begin{cases} (P) \,//\, (Q) \\ (D) \perp (P) \end{cases}$, alors (D) ⊥ (Q).

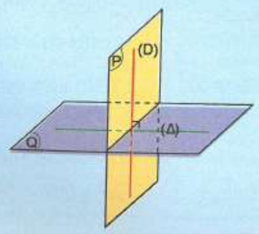
• Si $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases}$, alors (D) // (Δ).

• Si $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (D) \perp (Q) \end{cases}$, alors (P) // (Q).

• D'un point de l'espace passe une droite unique orthogonale à un plan donné.
• D'un point de l'espace passe un plan unique orthogonal à une droite donnée.

Perpendicularité de deux plans

Deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre



1 Orthogonalité d'une droite et d'un plan Orthogonalité de deux droites

Soit ABCD un tétraèdre tel que les triangles ABC et ABD soient rectangles en B.

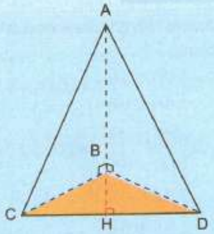
1) Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCD).

2) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

3) Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

Montrer que les droites (AH) et (CD) sont orthogonales.

Solution



1) Montrons que (AB) $\perp$ (BCD)

ABC et ABD sont deux triangles rectangles en B ;
donc (AB) $\perp$ (BC) et (AB) $\perp$ (BD).

(BC) et (BD) étant deux droites sécantes du plan (BCD) ;
donc (AB) $\perp$ (BCD).

2) Montrons que (AB $\perp$ (CD)

Comme (AB) $\perp$ (BCD), alors (AB) est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan (BCD).

Or (CD) $\subset$ (BCD) , par conséquent (AB) $\perp$ (CD).

3) Montrons que (CD) $\perp$ (AH)

H étant le projeté orthogonal du point B sur (CD), on a :

(CD) $\perp$ (BH) (1)

Par ailleurs : (CD) $\perp$ (AB) (2)

De (1) et (2), on déduit : (CD) $\perp$ (ABH).

Comme (AH) $\subset$ (ABH) , alors : (CD) $\perp$ (AH).

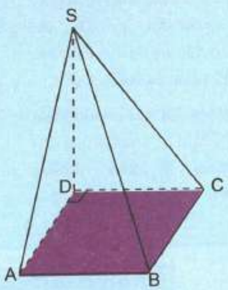
2 Perpendicularité de deux plans

Soit SABCD une pyramide de base un rectangle ABCD tel que la droite (SD) soit perpendiculaire au plan (ABC).

1) Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (SCD).

2) En déduire que les deux plans (SAD) et (SCD) sont perpendiculaires.

Solution



1) Montrons que (AD) $\perp$ (SCD)

• ABCD est un rectangle ; donc : (AD) $\perp$ (CD) (1)

• On a : (SD) $\perp$ (ABC) et (AD) $\subset$ (ABC)

Donc : (AD) $\perp$ (SD) (2)

• De (1) et (2), on déduit : (AD) $\perp$ (SCD)

2) Montrons que les deux plans (SAD) et (SCD) sont perpendiculaires.

On a : (AD) $\perp$ (SCD)

Or (AD) $\subset$ (SAD) , par suite les deux plans (SAD) et (SCD) sont perpendiculaires.

Orthogonalité

Exercices d'application

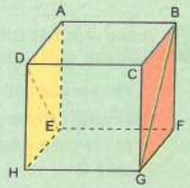
1 Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BF], [FG] et [AE].

1) Montrer que les deux droites (BG) et (DE) sont orthogonales.

2) Montrer que (BF) $\perp$ (AC) et (DE) $\perp$ (IJ).

3) Monter que (IK) $\perp$ (ADE) et (CF) $\perp$ (IK).



2 Soient ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O inclus dans un plan (P),
A un point du cercle ($\mathscr{C}$),
(Δ) la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en A,
(E) la droite orthogonale au plan (P) en O,
B un point de (E),
(P_1) le plan déterminé par A et (E),
(P_2) le plan déterminé par B et (Δ).
Montrer que (P_1) $\perp$ (P_2).

3 Soient ABCDEFGH un parallélépipède rectangle, O et I les milieux respectifs des segments [AG] et [AH].

1) a) Montrer que les deux droites (OI) et (CD) sont parallèles.

b) En déduire que (OI) $\perp$ (BCG) puis que (OI) $\perp$ (BF).

2) Déterminer l'intersection des deux plans (OIC) et (CGD).

3) Soit P le milieu du segment [CH].

Montrer que les plans (OPI) et (ABF) sont perpendiculaires.

4 Soient ABCDEFGH un cube dans l'espace.
Montrer que les deux plans (AFG) et (BEH) sont perpendiculaires.

5 Soient ABC un triangle rectangle en A, D le symétrique de B par rapport au milieu du segment [AC] et S un point de la droite passant par A et orthogonale au plan (ABC).
Montrer que les deux plans (SAC) et (SCD) sont perpendiculaires.

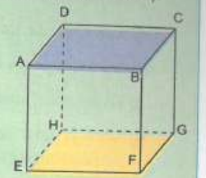
Exercices de renforcement des apprentissages

6 Soient ABCDEFGH un cube dans l'espace;
I le milieu de [AC] et J un point de [AE] ($J \neq A$ et $J \neq E$).

1) Déterminer l'intersection des deux plans (AED) et (IJC).

2) Montrer que la droite (BF) est orthogonale au plan (ABC).

3) Montrer que les deux plans (BIF) et (IJC) sont perpendiculaires.



7 Dans l'espace, on considère un rectangle ABCD de centre O.
Soit S un point de la droite orthogonale au plan (ABC) en A.

1) Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

2) Montrer que les deux plans (SAB) et (SDC) sont sécants et déterminer leur intersection.

3) Prouver que la droite (CD) est orthogonale au plan (SAD).

8 Soit ABCD un carré de centre O inclus dans un plan (P).
Soient E et F deux points de l'espace tels que (AF) et (BE) soient orthogonales au plan (P).

1) Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BDE).
En déduire que les deux plans (BDE) et (ACF) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les deux plans (EBC) et (FAD) sont parallèles.

3) Déterminer l'intersection des deux plans (BEF) et (ACD).

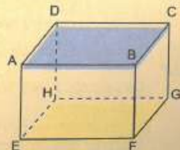
4) Montrer que les deux plans (FAD) et (FBC) sont sécants et déterminer leur intersection (Δ), puis montrer que (Δ) $\perp$ (ABE).

9 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle.
Soient I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [DG].

1) Montrer que les deux droites (EH) et (BC) sont parallèles, puis que les droites (CH) et (BE) sont parallèles.

2) Déterminer l'intersection des deux plans (BCE) et (CGH).

3) Montrer que la droite (BC) est orthogonale à la droite (BE).
Quelle est la nature du quadrilatère BCHE ?



4) Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (AFG).

Exercices de synthèse

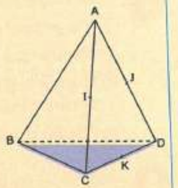
10 Soient ABCD un parallélogramme de centre I, M un point, distinct de A, appartenant à la droite orthogonale au plan (ABC) en A, et J le milieu de [MC].

1) Construire la figure.
2) Montrer que les droites (MA) et (IJ) sont parallèles.
3) Déterminer l'intersection des plans (BDJ) et (MAC).
4) Montrer que les deux plans (ABC) et (BDJ) sont perpendiculaires.

11 On considère, dans l'espace, un tétraèdre ABCD.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [AC], [AD] et [CD].

G est le centre de gravité du triangle ACD.



1) Déterminer l'intersection des deux plans (BCJ) et (BDI).
2) Montrer que les deux plans (BIJ) et (BCD) se coupent selon la droite (Δ) passant par B et parallèle à la droite (CD).
3) On suppose que le triangle BCD est isocèle en B et que la droite (AK) est orthogonale au plan (BCD).
   a) Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABK).
   b) En déduire que les deux droites (BG) et (Δ) sont orthogonales (G étant le centre de gravité du triangle ACD).

12 Soient ABCD un parallélogramme et O un point extérieur au plan (ABC) tels que (OB) ⊥ (BC) et (BD) ⊥ (AD).

a) Montrer que : (BC) ⊥ (AD).
b) Montrer que : (OAD) ⊥ (OBD).

13 Soit ABCD un tétraèdre tel que : AD = BC et AC = BD.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Montrer que la droite (IJ) est orthogonale à chacune des droites (AB) et (CD).

14 Soient ABC un triangle isocèle en A et S un point de la droite passant par A et orthogonale au plan (ABC) tel que S ≠ A.

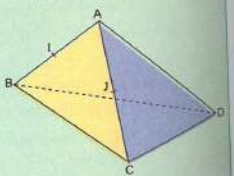
Les points A′, B′ et C′ sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1) Montrer que les deux plans (SBC) et (SAA′) sont perpendiculaires.
2) Montrer que les deux droites (B′C′) et (SA′) sont orthogonales.

15 Soient ABCDEFGH, I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [FG].

1) Montrer que : (IJ) // (FBH).
2) Montrer que les droites (EJ) et (HF) se coupent en un point P, et que les droites (AI) et (BD) se coupent en un point Q.
3) a) Montrer que les plans (HBF) et (EIJ) se coupent selon la droite (PQ).
   b) En déduire que la droite (PQ) est parallèles à la droite (FB).
   c) Montrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (ABC), puis en déduire que (AI) ⊥ (PQ).

16 Soient ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] (voir figure).



1) Déterminer l'intersection des deux plans (BCD) et (DIJ).
2) On suppose que :
   CA = CB et DA = DB.
   Montrons que les deux plans (ABC) et (CDI) sont perpendiculaires et déterminer leur intersection.

17 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :
AB = AD = a et AE = x

Les points I et K sont les centres respectifs de ABCD et EFGH.

Soit M un point de la droite (BF).

1) Montrer que : (MI) ⊥ (AC) et (MK) ⊥ (EG).
2) En déduire que : pour que les plans (MAC) et (MEG) soient perpendiculaires il faut et il suffit que (MI) ⊥ (MK).
3) Montrer que : pour qu'il existe un point M de (BF) tel que (MAC) ⊥ (MEG) il faut et il suffit que $x > a\sqrt{2}$.

Aires et volumes

Exercices d'application

18 Soit ABCDEFGH un cube d'arête de longueur 4cm.

1) Calculer l'aire latérale et l'aire totale de ce cube.
2) Calculer le volume de ce cube.

19 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :

AB = 3cm, AD = 3cm et AE = 4cm

1) Calculer l'aire latérale et l'aire totale de ce parallélépipède.
2) Calculer le volume du parallélépidède.

20 Soit ABCD un losange tel que AC = 4cm et BD = 6cm.

On considère le prisme droit de base ABCD et de hauteur h = AS = 15cm.

1) Calculer l'aire latérale et l'aire totale de ce prisme.
2) Calculer le volume de ce prisme.

21 Calculer l'aire latérale et le volume d'un cylindre dont le diamère de base est 4cm et dont la hauteurs est 10cm.

22 Calculer la hauteur d'un cylindre droit de volume $2{,}6m^3$ et d'aire de base égale à $3{,}25m^2$.

23 Calculer l'aire latérale et le volume d'un cône de révolution de hauteur 4m et de rayon de base égal à 2,5m.

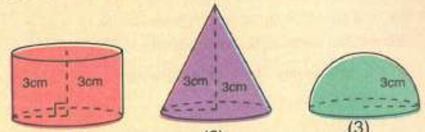
24 Calculer le rayon d'une sphère dont l'aire latérale est $2{,}56m^2$, puis calculer le volume de cette sphère.

Exercices de renforcement des apprentissages

25 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :
AB = 8cm, BC = 6cm et AE = 6cm.
1) Montrer que : (AE) ⊥ (HFG)
2) Calculer CF et AB.
3) Calculer le volume du tétraèdre AEHF.

26 Soit ABCD un losange tel que AC = 6cm et BD = 8cm.
On considère le prisme droit de base le losange ABCD et dont la hauteur est égale au périmètre du losange ABCD.
1) Calculer l'aire latérale et l'aire totale de ce prisme.
2) Calculer le volume de ce prisme.

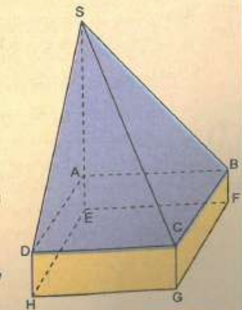
27 On considère les solides suivants :



(1) (2) (3)

Le solide (1) est un cylindre droit de hauteur 3cm et de rayon de base de longueur 3cm.
Le solide (2) est un cône de révolution de hauteur 3cm et de rayon de base de longueur 3cm.
Le solide (3) est une demi-sphère de rayon 3cm.
Soient V_1, V_2, V_3 les volumes respectifs des solides (1), (2), (3).
1) Exprimer sous la forme $k\pi$ (en cm^3) chacun des volumes V_1, V_2 et V_3.
2) Calculer V_2 en fonction de V_3.
3) Vérifier que $V_1 = V_2 + V_3$.

28 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
SABCD est une pyramide de sommet S, de base ABCD et de hauteur [SA].
On suppose : AE = 0,6cm ;
SA = 6cm ; FG = 1,6cm ;
EF = 2,5cm.

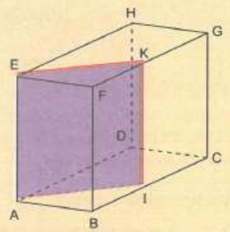


1) Calculer le volume V_1 du parallélépipède.
2) Calculer la longueur des diagonales du parallélépipède ABCDEFGH.
3) Calculer le volume V_2 de la pyramide SABCD.

17 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices de synthèse

29 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que :
AB = 4cm, BC = 6cm, AE = 7cm (voir figure)

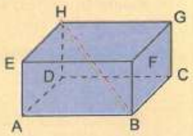


Soient I et K les milieux respectifs de [BC] et [FG].

1) Déterminer la nature du quadrilatère AIKE ; calculer son périmètre et son aire.
2) Calculer AK.
3) Calculer le volume du solide ABFEKI.

30 On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
On pose : AB = a, BC = b, CG = c.

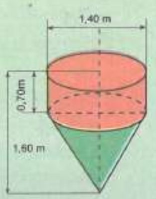
1) Calculer BH en fonction de a, b et c.
2) On suppose dans cette question seulement que :
$a + b + c = 14$ et $BH = 10$



a) Montrer que :
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.
b) Calculer l'aire totale du parallélépipède.

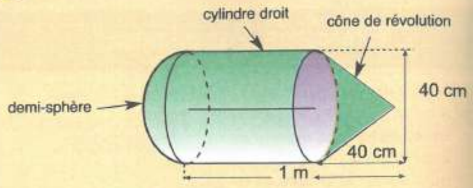
3) On suppose maintenant que :
$ab = 24$, $bc = 72$ et $ca = 48$
Calculer le volume du parallélépipède.

31 Un réservoir d'eau est composé d'une partie cylindrique et d'une partie sous forme de cône de révolution.



Calculer le volume de ce réservoir.

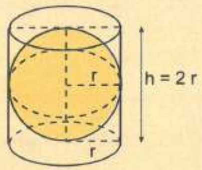
32 On considère le solide suivant :



1) Calculer le volume de ce solide.
2) On pose, dans ce solide, que le cône de révolution et le cylindre ont la même hauteur r et que r est le rayon de la demi-sphère.

Exprimer le volume V de ce solide en fonction du volume W du cylindre.

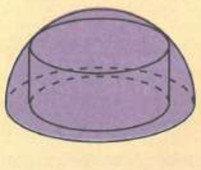
33 Dans un cylindre droit de rayon de base de longueur 6cm, une boule de même rayon est inscrite (voir figure).



Déterminer le volume d'eau dont on a besoin pour couvrir la boule.

34 Sur une table, on pose :

- un vase cylindrique en verre, de diamètre 30cm.
- Sur le vase, on pose une demi-sphère de diamètre 40cm (voir figure).



Calculer le volume du vase.

Formulaire

Notions d'arithmétique

Nombres pairs et impairs

Soit a un nombre entier naturel.
- a est un nombre pair signifie que $a = 2k$ où k est un entier naturel.
- a est un nombre impair signifie que $a = 2k + 1$ où k est un entier naturel.

Multiples et diviseurs

Soient b, m et d des nombres naturels.
- m est un multiple de b signifie que $m = kb$ où k est un entier naturel.
- d est un diviseur de b signifie que $b = kd$ où k est un entier naturel ; on écrit alors $d \mid b$

Plus grand diviseur commun

Soient a, b et d des nombres entiers naturels.
d est le plus grand diviseur commun de a et b signifie que d est un diviseur de a et de b et que d est le plus grand parmi les diviseurs de a et b. On le note : $d = a \wedge b$

Plus petit multiple commun

Soient a, b et m des entiers naturels.
m est le plus petit multiple commun de a et b signifie que m est un multiple de a et de b et que m est le plus petit parmi les multiples non nuls de a et b. On le note :
$m = a \vee b$

Notations des ensembles de nombres

Notation de l'ensemble	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Appellation de ses éléments	Ensemble des nombres **entiers naturels**	Ensemble des nombres **entiers relatifs**	Ensemble des nombres **décimaux**	Ensemble des nombres **rationnels**	Ensemble des nombres **réels**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Valeur absolue

Valeur absolue d'un réel

soit x un nombre réel

$$|x| = \begin{cases} x \;;\; x \geqslant 0 \\ -x \;;\; x \leqslant 0 \end{cases}$$

Distance entre deux nombres réels

Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B sur un axe, la distance entre a et b est la distance entre A et B :

$$AB = |b - a|$$

Intervalles de IR

Soient a, b, x des réels et r un réel positif

Ensemble des nombres réels x qui vérifient	Représentation sur une droite numérique	Notation
$a \leq x \leq b$	a b	[a, b]
$a < x < b$	a b	]a, b[
$a \leq x < b$	a b	[a, b[
$a < x \leq b$	a b	]a, b]
$a \leq x$	a	[a, +∞[
$a < x$	a	]a, +∞[
$x \leq b$	b	]–∞, b]
$x < b$	b	]–∞, b[

Ecriture en utilisant la valeur absolue	Ecriture en utilisant les intervalles	Représentation sur une droite numérique
$\lvert x\rvert \leqslant r$	$x \in [-r, r]$	–r 0 r
$\lvert x\rvert < r$	$x \in]-r, r[$	–r 0 r
$\lvert x-a\rvert \leqslant r$	$x \in [a-r, a+r]$	a – r a a + r
$\lvert x-a\rvert < r$	$x \in]a-r, a+r[$	a – r a a + r
$\lvert x\rvert \geqslant r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	–r 0 r
$\lvert x\rvert > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	–r 0 r
$\lvert x-a\rvert \geqslant r$	$x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$	a – r a a + r
$\lvert x-a\rvert > r$	$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	a – r a a + r

Approximations

Approximations par défaut et par excès

Soient $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ ou $a < x < b$ des encadrements du nombre réel x d'amplitude b – a.

- Le nombre réel a est appelé approximation du nombre x à b – a par défaut.
- Le nombre réel b est appelé approxation du nombre x à b – a par excès.

Valeur approchée

Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
Tout nombre réel a qui vérifie l'une des relations :

$$|x-a|<r \quad \text{ou} \quad |x-a| \leqslant r$$

est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r près).

Approximations décimales

Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \leq x < (N+1) \times 10^{-p}$ où $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé approximation décimale du nombre x à 10^{-p} par défaut.
- Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé approximation décimale de x à 10^{-p} par excès.

Equations du second degré

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.

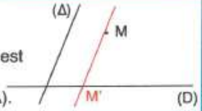
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes à savoir

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

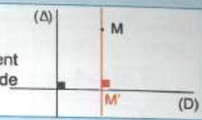
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double qui est $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans IR.
- **Factorisation**
- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

La projection

(D) et (Δ) sont sécantes.
M' est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) signifie que M' est l'intersection de (D) et de la droite passant pa M et parallèle à (Δ).



(D) et (Δ) sont des droites perpondiculaires
M', projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ), est appelé projeté orthogonal de M sur (D).



La droite dans le plan

Représentation paramétrique d'une droite

Le système $\begin{cases} x = x_0 + k\alpha \\ y = y_0 + k\beta \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

est appelé représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha;\beta)$.

Déterminant de deux vecteurs

Le déterminant des deux vecteurs $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ est le nombre réel noté $\det(\vec{u};\vec{v})$ et défini par :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Equation cartésienne

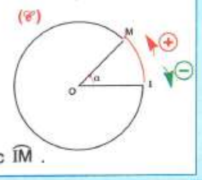
Toute droite du plan a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$;
$\vec{u}\,(-b;a)$ est un vecteur directeur d'une telle droite.

Calcul trigonométrique

Unités de mesure des angles

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, I et M sont deux points de $(\mathscr{C})$.
Si α, β et γ sont les mesures respectives de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ en degrés, radians et grades, alors :

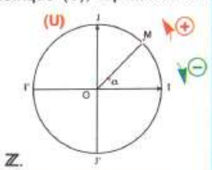
$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$



En outre β désigne la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

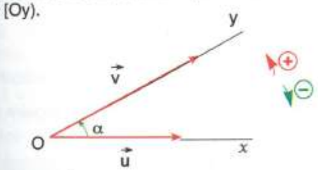
Abscisses curvilignes d'un point du cercle trigonométrique

- Tout point M du cercle trigonométrique (U), représente un nombre réel unique α de l'intervalle $]-\pi; \pi]$, qui est l'abscisse curviligne principale du point M.
- Les nombres $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, sont appelés les abscisses curvilignes du point M ; on écrit alors $M(\alpha)$ ou $M(\alpha + 2k\pi)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.



Angle orienté de deux demi-droites - Angle orienté de deux vecteurs

- Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectifs des deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.



Le "couple" $(\widehat{Ox;Oy})$ est appelé angle orienté des demi-droites $[ox)$ et $[oy)$.
Le "couple" $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est appelé angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

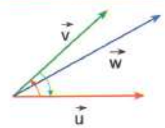
- Le nombre α est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$ ou de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Soit $(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ l'une des mesures de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a : $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \alpha + 2k\pi$ où $(k \in \mathbb{Z})$

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs non nuls.

- $(\overline{\vec{u};\vec{u}}) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $(\overline{\vec{v};\vec{u}}) = -(\overline{\vec{u};\vec{v}}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.



- **relation de Charles :**

$$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = (\overline{\vec{u};\vec{w}}) + (\overline{\vec{w};\vec{v}}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

- **Cas particuliers**

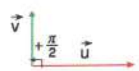
Angle plat

$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

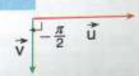
Angle nul

$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Angle droit



$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

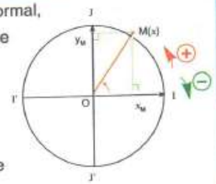


$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Cosinus et sinus d'un nombre réel x

$(O;\vec{OI},\vec{OJ})$ est un repère orthonormal, (U) est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I tels que

$$(\widehat{\vec{OI},\vec{OJ}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

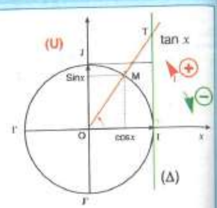


Soient x un nombre réel et M le point du cercle (U) dont x est l'une des abscisses curvilignes.

- L'abscisse x_M du point M est appelé cosinus de x et on écrit : $x_M = \cos x$.
- L'ordonnée y_M du point M est appelé sinus de x et on écrit : $y_M = \sin x$.
- $M(\cos x; \sin x)$.

Tangente d'un nombre réel x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Soient x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ et M le point du cercle (U) dont x est l'une des abscisses curvilignes. Soit (Δ) la tangente au cercle (U) au point I. Soit T le point d'intersection de (OM) et (Δ).



- Le nombre $\frac{\sin x}{\cos x}$ est appelé tangente du nombre x et on note

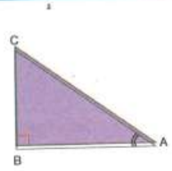
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $|\tan x| = IT$

Tableau des valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle



$$\cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB}$$

Relations trigonométriques

- Pour tout x de IR, on a :

$$-1 \le \cos x \le 1 \quad \text{et} \quad -1 \le \sin x \le 1.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- Pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Pour tout x de IR et k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

- Pour tout x de $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Fonctions trigonométriques

- **Fonction cosinus**

cos : $x \mapsto \cos x$ est une fonction définie sur IR, paire et périodique de période 2π.

- **Fonction sinus**

sin : $x \mapsto \sin x$ est une fonction définie sur IR, impaire et périodique de période 2π.

- **Fonction tangente**

tan : $x \mapsto \tan x$ est une fonction définie sur $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ impaire et prériodique de période π.

Relations entre les rapports trigonométriques de deux "angles" dont la somme ou la différence est $\frac{\pi}{2}$ ou π

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

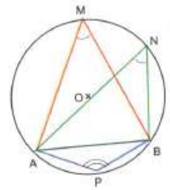
$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles

Angles inscrits

Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, [AB] une corde de ce cercle et M un point de $(\mathscr{C})$.

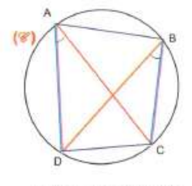


- L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit interceptant la corde [AB].
- Si deux angles inscrits, dans un cercle $(\mathscr{C})$, interceptent la même corde [AB], ils sont ou bien isométriques, ou bien supplémentaires.

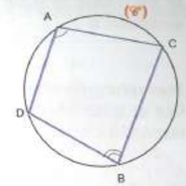
On a : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB} + \widehat{APB} = \pi$

- $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Quadrilatères inscriptibles



ABCD quadrilatère inscriptible



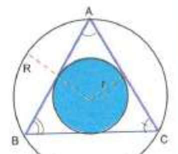
ABCD quadrilatère inscriptible

D appartient au cercle (C) si et seulement si

$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ ou $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \pi$

Formule des sinus et aire d'un triangle

Soient ABC un triangle, BC = a, CA = b, AB = c
S l'aire du triangle ABC, p son demi-périmètre (2p = a + b + c),
r le rayon de son cercle inscrit et R le rayon de son cercle circonscrit.



On a :

- $\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R} = \frac{2S}{abc}$
- $S = pr$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

Statistique

Effectif - fréquence - pourcentage

Soit une série statistique discrète (ou discontinue) $(x_i; n_i)$ ou continue $(I_i; n_i)$ exprimée en classes

$I_i = [a_{i-1}; a_i[$ où $1 \le i \le p$.

- n_i est l'effectif de la valeur x_i du caractère étudié ou l'effectif de la classe I_i.
- **L'effectif cumulé** de la valeur x_i ou de la classe I_i est le nombre :

$$N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$$

- La fréquence de la valeur x_i ou de la classe I_i est le nombre :

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

où N est l'effectif total :

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_p.$$

- **La fréquence cumulée** de la valeur x_i ou de la classe I_i est le nombre

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

- **Le pourcentage** de la valeur x_i ou de la classe I_i est : $P_i = f_i \times 100$

Caractéristiques de position

- Le **mode** d'une série statistique est toute valeur du caractère ou toute classe qui a le plus grand effectif.
- La **médiane** d'une série statistique (ordonnée) est toute valeur M qui sépare cette série en deux groupes de même effectif.
- La **moyenne** d'une série statistique (x_i, n_i) est le nombre :

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + \dots + x_p \times n_p}{N}$$

La moyenne d'une série statistique (I_i, n_i) exprimée en classes est la moyenne de la série statistique (x_i, n_i) où :

$$x_i = \frac{a_i + a_{i-1}}{2}$$

(lorsque $I_i = [a_{i-1}; a_i[$)

Caractéristiques de dispersion

- **Ecart moyen :**

$$V = \frac{n_1 \times |x_1 - \bar{x}| + \dots + n_p \times |x_p - \bar{x}|}{N}$$

- **Variance :**

$$V = \frac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

ou encore :

$$V = \frac{n_1 x_1^2 + \dots + n_p x_p^2}{N} - \bar{x}^2$$

- **Ecart-type :**

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Transformations

La translation

- M' est l'image de M par la translation t de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

- Pour qu'une transformation t du plan soit une translation, il faut et il suffit que : Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par t, on ait :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

L'homothétie

- M' est l'image de M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport k si et seulement si :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

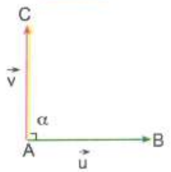
- Pour qu'une transformation h soit une homothétie de rapport k différent de 1, il faut et il suffit que :
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h, on ait :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

Produit scalaire

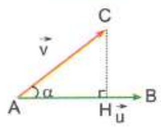
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, H le projeté orthogonal du point C sur la droit (AB) et α une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$



$\vec{u}.\vec{v} = 0$

$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$

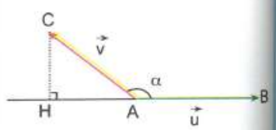


$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$

$\vec{u}.\vec{v} > 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$

$\vec{u}.\vec{v} < 0$

Formule trigonométrique du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$

Propriétés du produit scalaire

- Soient k un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On a :
  - → $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$
  - → $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
  - → Pour tout vecteur $\vec{w}$:

$$\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u}.\vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

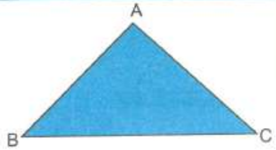
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Applications du produit scalaire

Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\widehat{BAC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

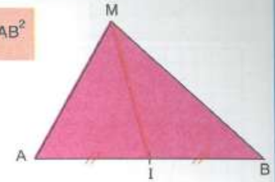
Théorème de la médiane

A et B étant deux points du plan et I le milieu du segment [AB], on a :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

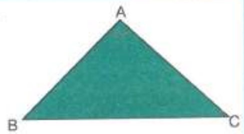
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$



Aire d'un triangle

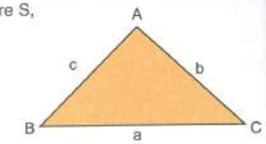
Soit S l'aire d'un triangle ABC.



$S = \frac{1}{2}AB \times AC \sin\widehat{A}$

Formule des sinus dans un triangle

Soient ABC un triangle d'aire S,
a = BC, b = CA et c = AB.



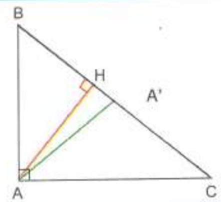
$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$

Relations métriques dans un triangle rectangle

Soient ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Pour que le triangle ABC soit rectangle en A il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

a) $AB^2 + AC^2 = BC^2$; b) $AA' = \frac{1}{2}BC$

c) $BA^2 = BH \times BC$; d) $AH^2 = HB \times HC$



Fonctions numériques

Fonction paire - fonction impaire

Soit f une fonction numérique.

- f est paire signifie que :
  - → D_f est symétrique par rapport à 0.
  - → Deux nombres opposés de D_f ont la même image par f.

f est paire signifie que pour tout x de D_f :
$-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

- f est impaire signifie que :
  - → D_f est symétrique par rapport à 0.
  - → Deux nombres opposés de D_f ont des images opposées par f.

f est impaire signifie que pour tout x de D_f :
$-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Maximum et minimum

Soient f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.

- f(a) est le maximum de la fonction f sur I signifie que : $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.
- f(a) est le minimum de la fonction f sur I signifie que : $f(a) \leq f(x)$ pour tout x de I.

Remarque :

Si $f(x) \leq M$ pour tout x de I et il existe un élément x_0 de I tel que $M = f(x_0)$, alors M est le maximum de la fonction f sur I.

La parabole

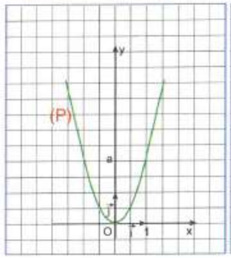
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f : x \mapsto ax^2 \quad (a \neq 0)$
et (P) sa courbe dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

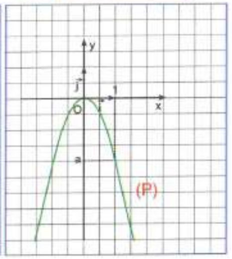
a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	↘	0	↗

a < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	↗	0	↘





La courbe (P) est appelée **parabole** de sommet O.

L'hyperbole

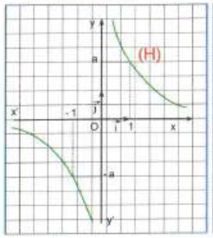
On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f : x \mapsto \frac{a}{x} \quad (a \neq 0)$
et (H) sa courbe dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

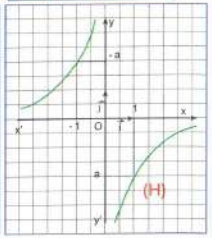
a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	↘	‖	↘

a < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	↗	‖	↗



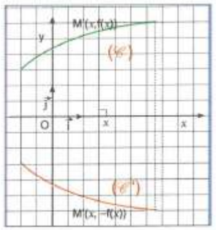


La courbe (H) est appelée **hyperbole** de centre O d'asymptotes les axes de coordonnées.

Fonctions se ramenant aux fonctions usuelles

Fonction du type : $x \mapsto -f(x)$

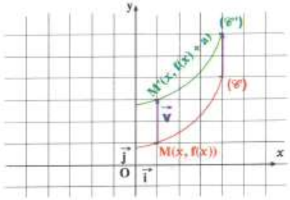
Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes respectives des fonctions f et –f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



$M(x; f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x; -f(x)) \in (\mathscr{C}')$.
Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Fonction du type : $x \mapsto f(x)+a$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes respectives des fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x)+a$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



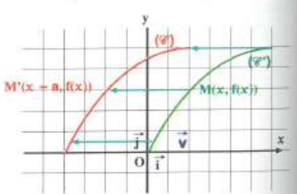
$M(x; f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x; f(x)+a) \in (\mathscr{C}')$.

$\overrightarrow{MM'} = a\vec{j}$

$(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{v} = a\vec{j}$.

Fonction du type : $x \mapsto f(x+a)$

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes respectives des fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x+a)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



$M(x; f(x)) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $M'(x-a; f(x)) \in (\mathscr{C}')$.

$\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i}$

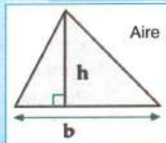
$(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{v} = -a\vec{i}$.

Calcul de périmètres et d'aires

Disque

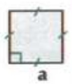
périmètre : $2\pi R$
Aire : πR^2

Triangle

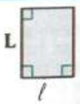


Aire : $\frac{b \times h}{2}$

Rectangle - Carré

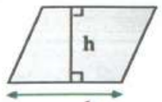


Aire : $L \times \ell$



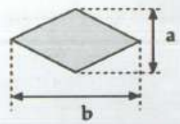
Aire : a^2

Parallélogramme



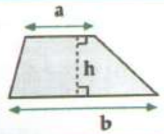
Aire : $b \times h$

Losange



Aire : $\frac{a \times b}{2}$

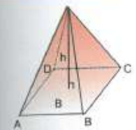
Trapèze



Aire : $\frac{(a+b) \times h}{2}$

Calcul de valeurs et d'aires latérales

Pyramide

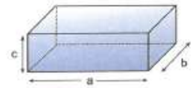


h hauteur de la pyramide SABCD
b l'aire de la base ABCD.
Volume :
$V = \frac{1}{3}\beta \times h$

Cube

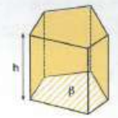
Soit a la longueur de l'arête du cube :
Surface latérale : $S_L = 4a^2$
Surface totale : $S_T = 6a^2$
Volume : $V = a^3$

Parallélépipède rectangle



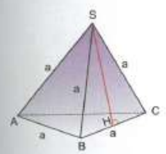
Soient a, b et c la longueur, la largeur et la hauteur (respectivement) du parallélépipède.
Surface latérale : $S_L = 2(a+b)c$
Surface totale : $S_T = 2(a+b)c + 2ab$
Volume : $V = abc$

Prisme droit



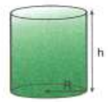
Soient h la hauteur du prisme, ℓ et β le périmètre et l'aire de la base.
Surface latérale : $S_L = \ell \times h$
Surface totale : $S_T = \ell \times h + 2\beta$
Volume : $V = \beta \times h$

Tétraèdre régulier



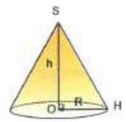
Soit a la longueur de l'arête du tétraèdre régulier.
Toutes les faces sont des triangles de même hauteur h = SH.
Soit ℓ le périmètre de la base.
Surface latérale :
$S_L = \frac{1}{2}\ell \times h$
Volume :
$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Cylindre droit



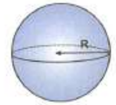
R rayon et h hauteur du cylindre droit.
Surface latérale :
$S_L = 2\pi R \times h$
Volume :
$V = \pi R^2 \times h$

Parallélépipède rectangle



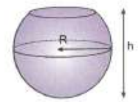
h hauteur du cône de révolution e = SH.
Surface latérale :
$S_L = \pi R \times e$
Volume :
$V = \frac{\pi R^2 \times h}{3}$

Sphère



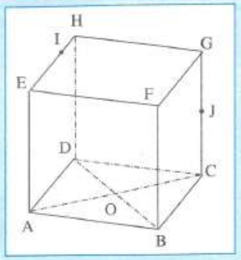
R rayon de la sphère.
Surface latérale :
$S_L = 4\pi R^2$
Volume :
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Prisme droit



Volume :
$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

Utilisation du logiciel de la géométrie dans l'espace pour visualiser les positions relatives



Soient ABCDEFGH un cube, O le centre de la face ABCD, J le milieu de l'arête [CG] et H le point de l'arête [EH] tel que : $HI = \frac{1}{4}HE$

L'objectif de cette activité est de déterminer la section du plan (OIJ) avec toutes les faces du cube et de visualiser l'opération en utilisant l'ordinateur (logiciel de la géométrie dans l'espace)

1 Utilisation du logiciel de la géométrie dans l'espace

- Pour représenter le cube, on opère selon les étapes suivantes en appuyant sur les touches suivantes :

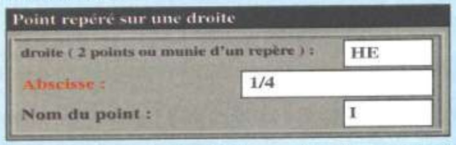
▶ Fichier / Charger une figure / Répertoires / [Bases] (pour charger un cube enregistré dans les documents du logiciel)

▶ On clique deux fois successives sur Cube 2.G3W puis on clique sur Ok pour valider l'opération.

▶ Pour faire apparaître le cube comme présenté ci-haut, on clique successivement sur Vues / Projection oblique puis Vues / Vue standard avec oyz de face (F7)

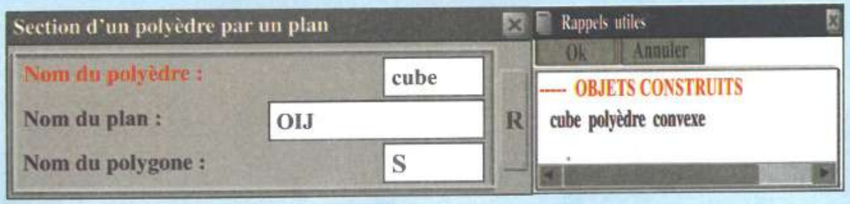
▶ Définir et construire O et J milieux respectifs de [AC] et [CG] (utiliser la barre d'outils).

▶ Pour définir et construire le point I, on utilise les touches Créer / Point / Point repéré / Sur une droite puis on valide sur la fenêtre suivante :



- Pour faire apparaître la section du cube par le plan (OIJ), on suit les étapes suivantes :

▶ Créer / Ligne / Polygone convexe / Section d'un polyèdre par un plan puis on valide par la fenêtre suivante :



Pour un rappel (au besoin), on appuie sur la touche R

▶ Pour voir la section du cube par le plan (OIJ) en vraie grandeur, on met ce dernier dans le plan frontal (vue de face) comme suit :

- On clique sur plan isolé puis on valide l'apparition de la fenêtre :

- Pour voir la figure en perspective, on clique sur la touche

2 Déterminer et définir l'intersection de (OIJ) avec les faces du cubes

Symboles et notations

Droite (Δ)	(Δ)	Appartient	∈
Parallélisme	//	N'appartient pas	∉
Orthogonalité	⊥	Inclus	⊂
L'ensemble vide	∅	Non inclus	⊄
Le plus grand diviseur commun de deux entiers a et b	a ∧ b	Intersection	∩
Le plus petit multiple commun de deux entiers a et b	a ∨ b	Réunion (Union)	∪
a indece i	a_i	Ensemble des nombres entiers naturels	IN
a exposant i	a^i	Ensemble des nombres entiers relatifs	ℤ
Le vecteur $\vec{u}$	$\vec{u}$	Ensemble des nombres décimaux	ID
Norme du vecteur $\vec{u}$	$\lVert\vec{u}\rVert$	Ensemble des nombres rationnels	ℚ
Le radian	rad	Ensemble des nombres réels	IR
Degré du polynôme P	d°P	Intervalle fermé a, b	[a,b]
Courbe de la fonction f	$\mathscr{C}_f$	Intervalle ouvert a, b	]a, b[
Ensemble de définition de la fonction f	D_f	Intervalle ouvert a, +∞	]a, +∞[
Angle géométrique $\widehat{BAC}$	$\widehat{BAC}$	Intervalle fermé a, +∞	[a, +∞[
Angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$	$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$	Valeur absolue de x	$\lvert x\rvert$
Déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$\det(\vec{u}, \vec{v})$	Symétrie axiale d'axe Δ	$S_{(\Delta)}$
Segment AB	[AB]	Symétrie centrale de centre Ω	S_Ω
Produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$	La distance AB	AB

Indications de solutions de quelques exercices d'évaluation

Chapitre 1

4 Noter que $n(n+1)$ est pair pour tout entier n, puis écrire les expressions A, B et C sous la forme :

$$A = n(n+1) + 2(6n+8) + 1$$
$$B = n(n+1)(n-1) + 1$$
$$C = 4(n+1) - 1$$

9 On peut montrer que :

$$A + B = 11(x+y)$$

35 1) $15 \vee 9 = 45$
2) $45 + 7 = 52$

36 Le nombre d'employés de la société est multiple de 24, 28, et 36 c'est-à-dire multiples de 504.
Le seul nombre qui vérifie les conditions imposées est 504×3 c'est-à-dire 1512.

Chapitre 2

9 Noter que $\frac{1001}{5577} = \frac{7}{39}$ et $\frac{285}{665} = \frac{3}{7}$

puis que $\frac{7}{39} + \frac{3}{7} = \frac{166}{273}$

Comme $166 \wedge 273 = 1$, on a $x = 166$ et $y = 273$.
D'où : $x + y = 439$.

59 Noter que :

$$xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - (x^2+y^2)\right)$$
$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 = 56$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy) = 20$$
$$x^6 + y^6 = (x^3+y^3)^2 - 2(xy)^3 = 416$$

78 $\sqrt{n+\sqrt{n+7}} \in \mathbb{N}$

On démontre que $4 < \sqrt{n+7} < 11$

En déduire que $n = 42$.

Chapitre 3

26 1) $A = |a+2| + |b+1|$
$= a - b + 1$
$A = 7$

2) $a = b + 6 \leq 5$ (puisque $b \leq -1$)
on a : $a \geq -2$ et $b = a - 6$
Donc $b \geq -8$

3) Noter que $-10 \leq a + b \leq 4$
Donc : $B = -(a+b-4) + (a+b+10)$
c'est-à-dire : $B = 14$

100 On établit que :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Signifie que :

$$(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 + (\sqrt{z-2}-1)^2 = 0$$

$x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$

On en déduit alors que :

$$x = 1,\ y = 2 \text{ et } z = 3$$

120

$$\frac{x}{x+y+1} < \frac{x}{x+1}$$
$$\frac{y}{x+y+1} < \frac{y}{y+1}$$

D'où la relation demandée.

Chapitre 4

24 1) $(2x - 3\sqrt{3})^2 - 3$
$= 4x^2 - 12\sqrt{3}\,x + 24$
$= 4A(x)$

2) $A(x) = (x - 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

3) a) $B(1) = 0$

b) $A(x) = C(x)$
$B(x) = (x-1)(x-2\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

49 $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$
$P(x) = ax^3 - 6ax^2 + 11ax - 6a$

71 $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

Chapitre 5

4 (1) $S_1 = \{-5; 5\}$; (2) $S_2 = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

(3) $S_3 = \left\{\frac{7}{2}\right\}$; (4) $S_4 = \{-10; 15\}$

(5) $S_5 = \varnothing$; (6) $S_6 = \varnothing$

7 (1) $S_1 = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$

(2) $S_2 = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$

(3) $S_3 = \left]-2; 0\right[$

(4) $S_4 = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$

(5) $S_5 = \left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right]$

(6) $S_6 = \left]\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right[$

15 $S_1 = \{(3; 4)\}$
$S_2 = \{(2; 3)\}$
$S_3 = \varnothing$

18 $\begin{cases} x + y = 30000 \\ 0,06x + 0,04y = 1440 \end{cases}$

$x = 12000$ et $y = 18000$

25 (1) $S_1 = \{49\}$; (2) $S_2 = \{-1\}$

(3) $S_3 = \varnothing$; (4) $S_4 = \left\{\frac{17}{8}\right\}$

(5) $S_5 = \{9\}$; (6) $S_6 = \{5\}$

48 Si $m = -3$, alors $S = \varnothing$.
Si $m = 3$, alors $S = \{(x; 3-x) / x \in \mathbb{R}\}$
Si $m \neq -3$ et $m \neq 3$, alors :

$$S = \left\{\left(\frac{m^2+3m+9}{m+3}; \frac{-3m}{m+3}\right)\right\}$$

Chapitre 6

14 $S_1 = \left\{\frac{21}{10}\right\}$; $S_2 = \{3\}$

$S_3 = \{10\}$; $S_4 = \left\{3; \frac{11}{3}\right\}$

35 Noter que :

$$x + 4 - 4\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 2)^2$$
$$x + 9 - 6\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 3)^2$$

On se ramène à l'équation :

$$\left|\sqrt{x} - 2\right| + \left|\sqrt{x} - 3\right| = 1$$

et après étude, on trouve $S = [4, 9]$.

47 Soient v_1 v_2 les vitesses respectives de la voiture et du camion et soit t la durée nécessaire au camion pour parcourir la distance entre les deux villes.
On démontre que :

$$v_1 = \frac{450}{t-4} \text{ et } v_2 = \frac{450}{t}$$

Comme $v_1 = v_2 + 30$, alors $t^2 - 4t - 60 = 0$.
Il s'ensuit $t = 10$.
D'où : $v_1 = 75$ km/h et $v_2 = 45$ km/h.

Chapitre 7

35 On a : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF} = -3\overrightarrow{CE}$
D'où : (BF) // (CE

55 $\overrightarrow{AM} = \frac{1-3x}{2}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$

A, C et M sont alignés si et seulement si :

$x = \frac{1}{3}$

75 1) On a : $\overrightarrow{AE} = 7\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$

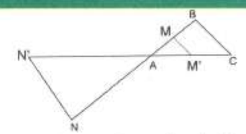
Or $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM} = \beta\overrightarrow{MB}$

Par suite $(\alpha - 7)\overrightarrow{AM} = (3 - 4\beta)\overrightarrow{MB}$

2) En notant que les points A, B et M ne sont pas alignés, on déduit : $\alpha - 7 = 0$ et $3 - 4\beta = 0$ c'est-à-dire $\alpha = 7$ et $\beta = \frac{3}{4}$
Ainsi : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AE}$

Chapitre 8

3



- On a : $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- A, C, N' sont les projetés respectifs de A, B, N sur (AC) ; donc : $\overrightarrow{AN'} = -2\overrightarrow{AC}$
- A, C, M' sont les projetés repectifs de A, B, M sur (AC) ; donc : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- De $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

on tire $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

- De même : $\overrightarrow{NN'} = -2\overrightarrow{BC}$

Chapitre 9

9 1) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -5$;
$\det(\vec{u}; \vec{w}) = --1 - 4m$;
$\det(\vec{v}; \vec{w}) = 3m + 4$

2) $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

3) $m = -\frac{1}{4}$; $m = -\frac{4}{3}$

16 1) $(D) : x - 2y + 3 = 0$
2) $(D) : x + y + 1 = 0$
3) $(D) : 2x + 3y - 2 = 0$
4) $(D) : 2x + 2y + 3 = 0$

38 3) $I(5; -1)$

Chapitre 10

4 α et β sont les abscisses curvilignes d'un même point du cercle trigonométrique s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta - \alpha = k(2\pi)$

1) Non $\left(\beta - \alpha = 447\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$
2) Oui $(\beta - \alpha = -12\pi)$
3) Non $\left(\beta - \alpha = 42\pi + \frac{4\pi}{5}\right)$
4) Oui $(\beta - \alpha = -4\pi)$

15 1) $10\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $-2\cos x$

17 1) $S_1 = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$

2) $S_2 = \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

3) $S_3 = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

4) $S_4 = \left]-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right[$

5) $S_5 = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$

6) $S_6 = \left]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[$

26 Les mesures principales des angles $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ sont respectivement :

$$0 \; ; \; \frac{\pi}{2} \; ; \; -\frac{3\pi}{8} \; ; \; \frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{4}$$

37 On peut utiliser :

$\sin t = \cos t \times \tan t$ et $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

58 1) $\widehat{EAD} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\widehat{ADE} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

$\widehat{EDH} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

2) • On calcule la hauteur h du triangle équilatéral EAB ; on trouve $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit : $EH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

• Dans le triangle HDE rectangle en H,

on a : $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\widehat{EDH}$
$= \frac{EH}{DH}$

Donc : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

• On utilise la relation $1 + \tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}}$ pour calculer $\cos\frac{\pi}{12}$

3) Remarquer que :

$\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$

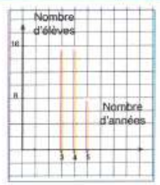
71 1) Montrer que $\widehat{HIC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

2) Montrer que $BC = 2CH$ puis en déduire $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Chapitre 11

7 1) Tableau des effectifs :

Nombre d'année x_i	3	4	5
Nombre d'élèves n_i	16	16	8



2) Le mode de cette série est 3 ou 4 parce qu'elles correspondent toutes deux au plus grand effectif qui est 16.
La médiane est 4.
La moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 16 + 4 \times 16 + 5 \times 8}{40} \simeq 3,8$$

22 1) La moyenne $\bar{x}_1$ de la série du type L_1 est :

$$\bar{x}_1 = \frac{400 + 1200 + 2400 + 2000 + 1200}{9}$$

c'est-à-dire : $\bar{x}_1 = 800$

La moyenne $\bar{x}_2$ de la série du type L_2 est :

$$\bar{x}_2 = \frac{780 + 1580 + 2400 + 1620 + 820}{9}$$

c'est-à-dire : $\bar{x}_2 = 800$

Ce qui signifie que la moyenne de la durée de validité pour les deux types L_1 et L_2 est 800 h.

2) L'écart moyen e_1 du type L_1 est :

$$e_1 = \frac{400 \times 1 + 200 \times 2 + 0 \times 3 + 200 \times 2 + 400 \times 1}{9}$$

$e_1 \simeq 177,77$

L'écart moyen e_2 du type L_2 est :

$$e_2 = \frac{20 \times 1 + 10 \times 2 + 0 \times 3 + 10 \times 2 + 20 \times 1}{9}$$

$\simeq 8,88$

3) On a $e_2 < e_1$. Ce qui montre que le type L_2 est plus homogène que le type L_1 car les valeurs du caractère de L_2 sont moins dispersées autour de la valeur moyenne que celles du caractère L_1 c'est-à-dire que les durées de validité des lampes du type L_2 sont proches de 800 heures.

Chapitre 12

6 Le centre de l'homothétie h est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').
Le rapport de l'homothétie h est $\frac{3}{2}$.

14 1) On a : $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. Donc t est la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

2) L'image du cercle $(\mathscr{C})$ par la translation est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A' et de rayon 2 tel que $\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

16 1) I est définie par $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{IM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$

3) f est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

22 1) On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Donc M' est l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Lorsque M varie sur le cercle (C), M' varie sur le cercle (C') image de (C) par la translation t.

2) On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM'}$; donc I est l'image de M' par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
Donc I varie sur le cercle (C) image de (C') par h.

Chapitre 13

3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KO} = 0$; $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -a^2$; $\overrightarrow{LJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{LJ} \cdot \overrightarrow{DB} = a^2$; $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{KO} = -\frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$; $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{IL} = -\frac{a^2}{2}$

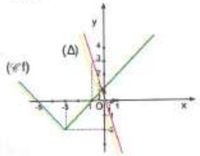
16 1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ signifie que (MA) et (MB) sont perpendiculaires (ou M est confondu avec A ou avec B).
Donc (E) est le cercle de diamètre [AB].
2) $MA^2 - MB^2 = 0$ signifie que MA = MB.
donc (F) est la médiatrice de [AB].
3) $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MB}\right)^2$
$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
$MA^2 + MB^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
donc (G) est confondu avec (E).

38 1) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = DE \times AF$
$= \frac{3}{4} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)$
D'où : $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$
2) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF})$
$= -AD^2 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}$
$= -1 + 1$
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$
3) a) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AF}$
$= \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$
b) Calculer AE et AF puis utiliser
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = AE \times AF \cos \widehat{EAF}$

Chapitre 14

6 1) $M(x; y) \in (\mathscr{C}_f)$ signifie que $f(x) = y$
Les points qui appartiennent à $(\mathscr{C}_f)$ sont A, C et D.
2) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :
$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$
$(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en $M_1(x_1; 0)$ et $M_2(x_2; 0)$.
3) $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0; -1)$.
4) Le point $M(x; 1) \in (\mathscr{C}_f)$ si et seulement si $f(x) = 1$. On résout cette équation.

39 1) $\begin{cases} f(x) = -x - 5 \text{ si } x \leq -3 \\ f(x) = x + 1 \text{ si } x \geq -3 \end{cases}$
2) a)



b)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-2	↗

3) Tracé de (Δ).
4) et 5) On résout l'équation $f(x) = -3x$.
On trouve le point $A\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$
6) Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ situés au-dessous de (D). Donc :
$S = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right]$

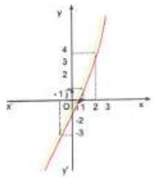
42 1) $f(a) - f(b) = 4(a^2 - b^2) + \frac{b - a}{ab}$
$= (a - b)\left(4(a + b) - \frac{1}{ab}\right)$
2) En étudiant le signe de $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$
On trouve le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖ ↘	3	↗

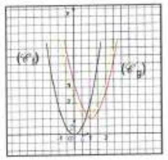
3) Noter que f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Chapitre 15

5 1) On a : $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$
$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$
$f(1) = 1$ et $f(2) = 4$

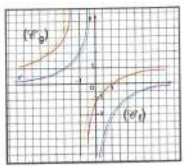


12 1) Pour tout x de IR, on a :
$g(x) = 2(x^2 - 2x) + 3$
$g(x) = 2[(x - 1)^2 - 1] + 3$
$g(x) = 2(x - 1)^2 + 1$
Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.
2) a)



b) Noter que $g(x) = f(x - 1) + 1$ pour tout réel x. En déduire que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.
3) Voir la figure.

15 1) $\alpha = 1$ et $\beta = -2$.
2) a)



b) On a : $g(x) = 1 + f(x + 1)$
Donc $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $-\vec{i} + \vec{j}$
3) Voir la figure

Chapitre 16

6 1) (MAC) ∩ (MBD) = (MI).
2) (MAB) ∩ (MDC) est la droite passant par M et parallèle à chacune des droites (AB) et (CD).
3) MBM'D est un parallélogramme.

9 Noter que :
$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = (AB) \\ (MNP) \cap (ABC) = (MP) \\ (MNP) \cap (ABD) = (NQ) \end{cases}$

19 1) On a (MN) // (AB) et (NE) // (BC).
Donc (MNE) // (ABC).
2) On a (ABC) // (MNE) et (SD) perce (ABC) en D. Donc (SD) perce (MNE) en un point F.
3) MNEF est un parallélogramme.

Chapitre 17

1 1) ADHE est un carré ; donc (AH) ⊥ (DE). Or (AH) // (BG), donc (BG) ⊥ (DE).
2) • (BF) ⊥ (ABC) et (AC) ⊥ (ABC) ; donc (BF) ⊥ (AC).
• On a : (DE) ⊥ (BG) et (BG) // (IJ) ; donc (DE) ⊥ (IJ).
3) • (AB) ⊥ (ADE) et (IK) // (AB) ; donc (IK) ⊥ (ADE) ; donc (IK) ⊥ (DE). Or (DE) // (CF), par suite (IK) ⊥ (CF).

6 1) (AED) ∩ (IJC) = (AJ).
2) (BF) ⊥ (AB) et (BF) ⊥ (BC) ; donc (BF) ⊥ (ABC).
3) (IC) ⊥ (IB) et (IC) ⊥ (BF) ; donc (IC) ⊥ (BIF).
Or (IC) ⊂ (IJC), par suite (BIF) ⊥ (IJC)

16 1) L'intersection de (BCD) et (DIJ) est la droite passant par D et parallèle à (BC).
2) On a : (AB) ⊥ (CI) et (AB) ⊥ (DI) ; donc : (AB) ⊥ (CDI). Or (AB) ⊂ (ABC), par suite (ABC) ⊥ (CDI).

20 $S_L = 60\sqrt{13}\ cm^2$
$S_T = 12(5\sqrt{13} + 2)\ cm^2$
$V = 180\ cm^3$

25 2) $CF = 6\sqrt{2}$; $AG = 2\sqrt{34}$
3) $V = 48\ cm^3$

31 Le volume du réservoir est :
$V = 0{,}49\pi\ m^3$; $V \simeq 1{,}54\ m^3$

Index

Table des matières

مطبعة النجاح الجديدة

IMPRIMERIE NAJAH AL JADIDA

17, Rue Haj Jilali AL Aoufir - Casablanca

Tél.: 05.22.25.38.38/25.58.89 - Fax: 05.22.25.52.81