

maxi.maths

Exercices résolus

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Mathématiques

Tronc Commun Scientifique

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Exercices de synthèse

Tome 1

TCS

$\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{D}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$

Maxi.Maths

MATHEMATIQUES

Tronc commun scientifique
Tronc commun technologique

Exercices résolus

Tome 1

Auteurs:

Groupe d'auteurs

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage **tome 1**, couvre le programme du premier semestre de la classe du Tronc Commun Scientifique et Technologique (Option Français) dont les chapitres sont les suivants :

- ▶ L'ensemble $\mathbb{N}$ - notion d'arithmétique.
- ▶ Les ensembles des nombres.
- ▶ L'ordre dans $\mathbb{R}$.
- ▶ Les polynômes.
- ▶ Les équations - inéquations et systèmes.
- ▶ Le calcul vectoriel.
- ▶ Projection.
- ▶ La droite dans le plan.

Chaque chapitre est présenté comme suit:

- ▶ Un résumé concis de chaque paragraphe.
- ▶ Des exercices d'application directe de chaque paragraphe pour une bonne assimilation.
- ▶ Des exercices de synthèse demandant plus de technique et réflexion.

Tous les exercices sont corrigés, détaillés et commentés.

Cet ouvrage vise à développer les capacités des élèves et l'acquisition de méthodes et la pratique de la rigueur, sans autant négliger l'auto-apprentissage et l'auto-formation.

Notre souci majeur est de rendre l'élève autonome dans son travail.

Nous souhaitons vivement que ce livre répond à votre attente et participe à votre réussite.

Les auteurs

1 Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Définition 1:

Soit a et b deux entiers naturels tel que $b \neq 0$

On dit que b divise a et on note $b|a$ s'il existe un entier naturel k tel que : $a = k \times b$.

On dit aussi que b est un diviseur de a , ou que a est divisible par b ou a est un multiple de b

On note $D(a)$ (ou D_a) l'ensemble des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$.

Conséquences :

- ▶ tout entier naturel divise 0
- ▶ Le seul diviseur de 1 dans $\mathbb{N}$ est 1.
- ▶ Pour tout entier naturel a , 1 et a sont des diviseurs de a .

Exemples :

$$D(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$D(15) = \{1; 3; 5; 15\}$$

$$D(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Définition 2:

Soit n un entier naturel

▶ On dit que a est un nombre pair s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$ c'est-à-dire a est un multiple de 2.

(ou encore a est divisible par 2 ou 2 divise a)

▶ On dit que a est un nombre impair s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k + 1$ (c'est-à-dire 2 ne divise pas a)

Exemples :

▶ Les nombres 0; 2; 4; 6; 8;; 240; sont des nombres pairs.

▶ Les nombres 1; 3; 5; 7; 9;; 241; sont des nombres impairs.

2 Critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 9

Propriété (admise) :

Soit N un entier naturel

- (1) N est divisible par 2 si son chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8
- (2) N est divisible par 5 si son chiffre des unités est: 0 ou 5
- (3) N est divisible par 3 (respectivement par 9) si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 (respectivement de 9).
- (4) N est divisible par 4 si le nombre formé par son chiffre des unités et son chiffre de dizaines dans cet ordre est un multiple de 4.

Exemples :

► 2015 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.

► 2016 est divisible par 2 et par 4 et aussi par 3 et 9, car:

Son chiffre des unités est 6 et le nombre formé par son chiffre des unités et son chiffre des dizaines est 16 qui est un multiple de 4. Et on a $2 + 0 + 1 + 6 = 9$

Donc 2016 est multiple de 3 et 9.

Exercices

Exercice 1

1 Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs parmi les nombres suivants:

1965 ; 2006 ; 2011; 2014 et 2017¹³

2 Déterminer les nombres divisibles par 2, 3, 4, 5 ou 9 parmi les nombres suivants : $N_1 = 12345678$; $N_2 = 111222$; $N_3 = 727272$ et $N_4 = 1235235$

Exercice 2

Déterminer les diviseurs de l'entier naturel n dans les cas suivants:

a. $n = 96$ b. $n = 120$ c. $n = 111$

Exercice 3

- 1 Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.
- 2 Montrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

Exercice 4

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}$; Étudier la parité des nombres entiers naturels suivants :
 $a = 2n + 7$, $b = 4n + 6$, $c = n^2 + n = n(n + 1)$
 $d = n^2 + 5n + 2$, $e = n^2 + 3n + 1$
- 2 Soit a et b deux entiers naturels ($a \geq b$)
 Montrer que si a et b sont de même parité alors $a + b$ (respectivement $a - b$) est un entier naturel pair.
 Étudier la réciproque.

Exercice 5

Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre $N = 12x34y6$ soit divisible par 4 et par 9.

Solutions

Exercice 1

- 1 ▶ Les nombres pairs sont : 2006 ; 2014 (car le chiffre des unités est pair)
 ▶ Les nombres impairs sont : 1965 ; 2011 (car le chiffre des unités est impair)
 ▶ 2017 est un nombre impair (car son chiffre des unités est 7 et 7 est impair).
 Donc le nombre 2017^{13} est impair du fait que le produit de nombres impairs est impair.
- 2 ▶ $N_1 = 12345678$
 On a : ▶ N_1 est divisible par 2 (car son chiffre des unités est pair)
 ▶ N_1 n'est pas divisible par 5 (car son chiffre des unités est différent de 0 et de 5)
 ▶ N_1 n'est pas divisible par 4 (car 78 n'est pas un multiple de 4)
 ▶ On a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ (somme des chiffres du nombre N_1)

et puisque 36 est un multiple de 9 et de 3

Donc N_1 est divisible par 3 et par 9

▶ $N_2 = 111222$

On a : ▶ N_2 est divisible par 2

▶ N_2 n'est pas divisible par 5 (car son chiffre des unités est différent de 0 et de 5)

▶ N_2 n'est pas divisible par 4 (car 22 n'est pas un multiple de 4)

▶ on a $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9$ et 9 est un multiple de 3 et de 9

Donc N_2 est divisible par 3 et par 9

▶ $N_3 = 727272$

On a : ▶ N_3 est divisible par 2

▶ N_3 est divisible par 4 (car 72 est un multiple de 4 : $72 = 4 \times 18$)

▶ on a $7 + 2 + 7 + 2 + 7 + 2 = 27$ est un multiple de 3 et de 9

Donc N_3 est un multiple de 3 et de 9

▶ $N_4 = 1235235$

On a : ▶ N_4 est divisible par 5, non divisible ni par 2 ni par 4 (35 n'est pas un multiple de 4)

▶ on a : $1 + 2 + 3 + 5 + 2 + 3 + 5 = 21$ est multiple de 3 mais pas de 9,

donc N_4 est un multiple de 3

Exercice 2

a. Les diviseurs de 96 :

On divise successivement 96 par les nombres 1,2,3,4,5,6.... et on s'arrête dès que $\frac{96}{n} < n$

On a : $96 = 1 \times 96$

$96 = 2 \times 48$

$96 = 3 \times 32$

$96 = 4 \times 24$

$96 = 6 \times 16$

$96 = 8 \times 12$

Donc $D_{96} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$

b. Les diviseurs de 120 :

$$\text{On a : } 120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20$$

$$120 = 8 \times 15 = 10 \times 12$$

$$\text{et } \frac{120}{11} < 11$$

Donc les diviseurs de 120 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

c. Les diviseurs de 111

$$\text{On a : } 111 = 1 \times 111 = 3 \times 37; \text{ donc } D_{111} = \{1; 3; 37; 111\}$$

Exercice 3

1 Montrons que la somme de 3 nombres consécutifs est un multiple de 3

Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$\text{On a : } n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) \text{ et } n + 1 \in \mathbb{N}.$$

Donc $n + (n + 1) + (n + 2)$ est un multiple de 3

2 Montrons que la somme de 2 nombres impairs consécutifs est un multiple de 4 (NB un nombre impair s'écrit $2k + 1$)

$$\text{On a : } (2k + 1) + (2k + 3) = 4k + 4 = 4(k + 1); k \in \mathbb{N}.$$

Donc $(2k + 1) + (2k + 3)$ est un multiple de 4

Exercice 4

1 Étudions la parité des entiers naturels suivants :

$$\triangleright \text{ On a } 2n + 7 = 2(n + 3) + 1 = 2k + 1$$

$$\text{où } k = n + 3$$

Donc a est impair

Infos:

Tout nombre pair s'écrit $2k$ et tout nombre impair s'écrit $(2k + 1)$

$$\triangleright \text{ On a } b = 4n + 6 = 2(2n + 3) = 2k$$

$$\text{où } k = 2n + 3$$

Donc b est pair

$$\triangleright c = n^2 + n = n(n + 1)$$

1^{er} cas : si n est pair alors $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$

$$\text{et donc } c = 2k(2k + 1) = 2m$$

où $m = k(2k + 1)$ et $m \in \mathbb{N}$;

Donc c est pair

2ème cas : si n est impair alors $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$

et donc $c = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1)$

soit $c = 2m$ où $m = (2k + 1)(k + 1)$

d'où: c est pair.

Conclusion:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1) = n^2 + n$ est un nombre pair.

C'est-à-dire le produit de deux entiers consécutifs est pair.

► On a : $d = n^2 + 5n + 2 = n^2 + n + 4n + 2$.

donc : $d = n(n + 1) + 2(2n + 1)$

et comme $n(n + 1)$ est pair alors $n(n + 1) = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$

d'où: $d = 2k + 2(2n + 1) = 2m$ où $m = k + 2n + 1$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc: d est pair

► On a: $e = n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1$
 $= n(n + 1) + 2n + 1$

et on a: $n(n + 1) = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

donc: $e = 2k + 2n + 1 = 2(k + n) + 1$

ainsi: $e = 2m + 1$ où $m = k + n$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc e est pair

2 Soit a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$

Supposons que a et b sont de même parité.

1er cas : a et b sont pairs

On a: $a = 2k$ et $b = 2k'$ $\begin{cases} \text{où } k \in \mathbb{N} \text{ et } k' \in \mathbb{N} \\ (a \geq b \text{ c'est-à-dire } k \geq k') \end{cases}$

donc: $a + b = 2(k + k')$ et $a - b = 2(k - k')$

D'où $a + b$ (respectivement $a - b$) est pair

2ème cas : a et b sont impairs

On a: $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ (où $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$ et $k \geq k'$).

$$\text{On a: } a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1) = 2m$$

$$\text{où } m = k + k' + 1 \text{ (} m \in \mathbb{N} \text{)}$$

donc $a + b$ est pair

$$\begin{aligned} \text{et on a: } a - b &= 2k + 1 - (2k' + 1) = 2k - 2k' = 2(k - k') \\ &= 2m' \end{aligned}$$

$$\text{où } m' = k - k' \text{ (} m' \in \mathbb{N} \text{)}$$

Donc $a - b$ est pair

Étudions la réciproque:

Supposons que $a + b$ est pair

Par l'absurde si a et b ne sont pas de même parité alors l'un pair et l'autre impair par exemple $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$

$$\text{Donc } a + b = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1 \text{ où } k'' = k + k' \text{ (} k'' \in \mathbb{N} \text{)}$$

C'est-à-dire $a + b$ est impair

Ce qui est absurde (car $a + b$ est pair)

D'où a et b sont de même parité

Montrer de même que si $a - b$ est pair alors a et b sont de même parité.

Exercice 5

Déterminons les chiffres x et y pour que le nombre $N = 12x34y6$ soit divisible par 4 et par 9.

N est divisible par 4 si et seulement si le nombre $y6$ est un multiple de 4.

$$\text{où } y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\text{donc } y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

et on sait que N est divisible par 9 si et seulement si

$$1 + 2 + x + 3 + 4 + y + 6 = 16 + x + y \text{ est un multiple de 9}$$

$$\text{avec } x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$\text{Si } y = 1 \text{ alors } x = 1 \text{ et } 16 + x + y = 18$$

Si $y = 3$ alors $x = 8$ et $16 + x + y = 27$

Si $y = 5$ alors $x = 6$ et $16 + x + y = 27$

Si $y = 7$ alors $x = 4$ et $16 + x + y = 27$

Si $y = 9$ alors $x = 2$ et $16 + x + y = 27$

D'où les couples $(x ; y)$ solutions du problème sont $(1;1)$; $(8;3)$, $(6;5)$, $(4;7)$ et $(2;9)$

3 Nombres premiers dans $\mathbb{N}$

Définition:

Un entier naturel est dit premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui même.

Soit p un entier naturel ; p est premier signifie que $D(p) = \{1; p\}$

Exemples :

▶ 2,3,5,7,11,13,17 et 19 sont des nombres premiers inférieurs à 20

▶ 9 n'est pas premier, car $D(9) = \{1; 3; 9\}$

Remarque :

Soit a un entier naturel.

Un diviseur de a différent de 1 et de a s'appelle diviseur propre de a

Ainsi ; a n'est pas premier si a admet au moins un diviseur propre.

Propriété (admise) :

1 Tout entier naturel a tel que $a \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ;

n est premier ou n peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

Conséquences :

(Décomposition en produit de facteurs premiers)

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 s'écrit de façon unique sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}$ où $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des entiers naturels non nuls.

Cette écriture est la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemples :

$$\triangleright 24 = 3 \times 8 = 2^3 \times 3$$

$$\triangleright 60 = 12 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\triangleright 57 = 3 \times 19$$

Exercices

Exercice 6

Déterminer les nombres premiers compris entre 46 et 98

Exercice 7

Montrer sans calcul que les nombres suivants ne sont pas premiers :

$$a = 105 \quad b = 27 \times 17 + 18 \quad c = 3 \times 5 \times 7 \times 9 + 63$$

Exercice 8

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $a = n^2 + 5n + 6$ n'est pas premier.

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 n'est pas premier.

Exercice 9

Soit p un nombre premier et $p \geq 3$

1 Déterminer les diviseurs de p^3

2 On note S la somme des diviseurs de p^3 .

Déterminer la parité de S

Exercice 10

Soit p un nombre premier et $p \geq 3$

Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 8 et que $p^4 - 1$ est un multiple de 16.

Solutions

Exercice 6

Les nombres premiers compris entre 46 et 98 sont :

47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

Remarque : un entier naturel non nul et différent de 1 est un nombre premier, si aucun nombre premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ ne divise n

Exercice 7

On a: $a = 105$ est divisible par 5 et 5 est un diviseur propre de a , donc a n'est pas premier.

On a: $b = 27 \times 17 + 18 = 9(3 \times 17 + 2)$

donc 9 divise b et $9 \neq 1$ et $9 \neq b$

d'où b n'est pas premier.

On a: $c = 3 \times 5 \times 7 \times 9 + 63 = 7(3 \times 5 \times 9 + 9)$

donc 7 est un diviseur propre de c

D'où c n'est pas premier

Exercice 8

$$\begin{aligned} \text{1 Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a: } n^2 + 5n + 6 &= n^2 + 2n + 3n + 6 \\ &= n(n + 2) + 3(n + 2) \\ &= (n + 2)(n + 3) \end{aligned}$$

alors: $a = n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$.

On a: $n + 2 \neq 1$ et $n + 2 \neq a$

donc $n + 2$ est un diviseur propre de a

D'où a n'est pas un nombre premier

2 Soit $n \in \mathbb{N}$

Si $n = 0$ alors $n^2 = 0$ donc n^2 n'est pas premier

Si $n = 1$ alors $n^2 = 1$ donc n^2 n'est pas premier

Si $n \geq 2$ alors n est un diviseur propre de n^2

Donc n^2 n'est pas premier

Exercice 9

Soit p un nombre premier et $p \geq 3$

1 Les diviseurs de p^3 sont : 1, p , p^2 et p^3

$$\begin{aligned} 2 \text{ On a } S &= 1 + p + p^2 + p^3 = 1 + p + p^2(p + 1) \\ &= (1 + p)(1 + p^2) \end{aligned}$$

On a: p est impair donc $p = 2k + 1; (k \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} \text{d'où } S &= (2k + 2)(1 + (2k + 1)^2) \\ &= 2m \quad \text{où } m = (k + 1)(1 + (2k + 1)^2) \end{aligned}$$

Donc S est pair

Exercice 10

On a: p un nombre premier et $p \geq 3$

donc p est un nombre impair

ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k + 1$

$$\begin{aligned} \text{par suite: } p^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k + 1) \end{aligned}$$

et on a: $k(k + 1) = 2m \quad (m \in \mathbb{N})$ (Voir exercice 4)

d'où $p^2 - 1 = 8m$; avec m un entier naturel.

ainsi $p^2 - 1$ est un multiple de 8.

d'autre part on a: $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$

comme $p^2 - 1 = 8m$

$$\text{et } p^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) = 2m'$$

$$\text{où } m' = 2k^2 + 2k + 1$$

alors $p^4 - 1 = (8m)(2m') = 16mm'$; avec mm' un entier naturel.

Ainsi $p^4 - 1$ est un multiple de 16

4 Le plus grand diviseur commun $PGCD$ et le plus petit multiple commun $PPCM$

Définition :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1 Si d divise a et b ; on dit que d est un diviseur commun de a et b .

Le plus grand diviseur commun de a et b (au sens de l'ordre $\leq$) est appelé le plus grand diviseur commun de a et b , et on le note $PGCD(a;b)$.

2 On dit que a et b sont premiers entre eux si $PGCD(a;b) = 1$

3 Si m est un multiple de a et b , on dit que m est un multiple commun de a et b . Le plus petit multiple commun de a et b (au sens de l'ordre $\leq$) est appelé le plus petit multiple commun de a et b , on le note $PPCM(a;b)$

Remarque :

► $PGCD(a;b) \geq 1$

► $PPCM(a;b) \geq 1$

Exemples :

1 On a : $D(9) = \{1;3;9\}$ et $D(12) = \{1;2;3;4;6;12\}$

Donc $PGCD(9;12)=3$

2 On a $D(16) = \{1;2;4;8;16\}$ et $D(21) = \{1;3;7;21\}$

Donc $PGCD(16;21) = 1$

C'est-à-dire 16 et 21 sont premiers entre eux.

3 les multiples de 6 sont : 0,6,12,18,24,30,36,.....

Les multiples de 9 sont : 0,9,18,27,36,.....

Donc : $PPCM(6;9) = 18$

Propriété (admise) :

1 Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b est le produit des facteurs premiers communs dans leur décomposition en produit de facteurs premiers élevés au plus petit exposant.

2 Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels a et b est le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b dans leur décomposition en produit de facteurs premiers élevés au plus grand exposant.

Exercice 11

- 1 Déterminer $PGCD(45, 63)$ et $PGDC(68; 105)$
- 2 Déterminer $PGDC(7; 9)$ et $PPCM(4; 11)$

Exercice 12

- 1 Montrer que les nombres 33 et 70 sont premiers entre eux .
- 2 Soit a et b et d trois entiers naturels non nuls.
Montrer que si $d|a$ et $d|b$.
Alors $d|a+b$ et $d|a-b$ (avec $a \geq b$)
- 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: les nombres n et $n+1$ sont premiers entre eux.
- 4 Montrer que: $PGCD(2n+3; 2n+1) = 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13

Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers, en déduire $PGCD(a; b)$ et $PPCM(a; b)$ dans les deux cas suivants:

- 1 $a = 18$ et $b = 60$
- 2 $a = 214$ et $b = 816$

Exercice 14

- 1 Décomposer 4410 en produit de facteurs premiers et déterminer le plus petit entier naturel non nul n , tel que : $4410 \times n$ soit le carré d'un entier naturel .
- 2 Déterminer $PGCD(70; 4410)$

Solutions

Exercice 11

1 Déterminons $PGCD(45, 63)$

On a: $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ (ou $45 = 3^2 \times 5$)

donc: $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

et on a: $63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$ (ou $63 = 3^2 \times 7$)

donc: $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

d'où: $D_{45} \cap D_{63} = \{1, 3, 9\}$

Par suite: $PGCD(45; 63) = 9$

Déterminons: $PGCD(68; 105)$

On a: $68 = 1 \times 68 = 2 \times 34 = 4 \times 17$ (ou $68 = 2^2 \times 17$)

$D_{68} = \{1; 2; 4; 17; 34; 68\}$

et $105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$

$D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$

$D_{68} \cap D_{105} = \{1\}$

Donc: $PGCD(68; 105) = 1$.

Ainsi 68 et 105 sont premiers entre eux.

2 Déterminons: $PGCD(7; 9)$ et $PGCD(4; 11)$

7 est un nombre premier donc $D_7 = \{1; 7\}$ et $D_9 = \{1; 3; 9\}$

d'où: $PGCD(7; 9) = 1$

on a 11 est un nombre premier donc $D_{11} = \{1; 11\}$ et $D_4 = \{1; 2; 4\}$

D'où: $PGCD(11; 4) = 1$

Exercice 12

1 On a: $33 = 1 \times 33 = 3 \times 11$

$D_{33} = \{1; 3; 11; 33\}$

et $70 = 1 \times 70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$

d'où: $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

et $D_{33} \cap D_{70} = \{1\}$

Donc: $PGCD(33; 70) = 1$

et par suite 33 et 70 sont premiers entre eux.

2 Soit a et b et d , trois entiers naturels.

Montrons que si $d|a$ et $d|b$ alors $d|a+b$ et $d|a-b$ ($a \geq b$).

On a: $d|a$ et $d|b$

donc: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kd$

et il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $b = k'd$.

On a $a+b = d(k+k') = dk''$ où $k+k' = k''$ et $k'' \in \mathbb{N}$

donc $d|a+b$

et $a-b = d(k-k') = dk_1$ où $k_1 = k-k'$ ($k_1 \in \mathbb{N}$) ($a \geq b$ signifie que $k \geq k'$) Donc $d|a-b$

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $d = \text{PGCD}(n, n+1)$; avec $d \in \mathbb{N}^*$.

On a: $\begin{cases} d|n \\ d|n+1 \end{cases}$, Donc: $d|n+1-n$ c'est-à-dire $d|1$.

d'où $d = 1$

Ainsi $\text{PGCD}(n; n+1) = 1$ et par suite n et $(n+1)$ sont premiers entre eux.

4 Soit $d = \text{PGCD}(2n+3, 2n+1)$, avec $d \in \mathbb{N}^*$.

On a $d|2n+1$ et $d|2n+3$ Donc $d|(2n+3)-(2n+1)$ c'est-à-dire $d|2$.

d'où $d = 1$ ou $d = 2$

et comme $2n+1$ et $2n+3 = 2(n+1)+1$ sont deux entiers naturels impairs alors $d \neq 2$

d'où $d = 1$

Ainsi $(2n+1)$ et $(2n+3)$ sont premiers entre eux.

Exercice 13

1 $a = 18 = 2 \times 3^2$ et $b = 60 = 4 \times 15 = 2^2 \times 3 \times 5$

donc: $\text{PGCD}(a, b) = 2^1 \times 3^1 = 6$

Et $\text{PPCM}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

2 $a = 214 = 2 \times 107$

On a: $\sqrt{107} \simeq 10$,

et 107 n'est pas divisible par les nombres premiers suivants 2,3,5,7 et on a $11^2 > 107$.

donc 107 est un nombre premier.

$$b = 816 = 2 \times 408 = 2^2 \times 204 = 2^3 \times 102$$

$$b = 2^4 \times 51 = 2^4 \times 3 \times 17$$

Donc: $PGCD(a, b) = 2$

$$PPCM(a, b) = 2^4 \times 3 \times 17 \times 107$$

Exercice 14

1 On a: $4410 = 2 \times 2205 = 2 \times 5 \times 441$
 $= 2 \times 3 \times 5 \times 147$
 $= 2 \times 3^2 \times 5 \times 49$
 $= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

D'où: $4410 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

► On cherche le plus petit n non nul ($n \in \mathbb{N}^*$) tel que $4410 \times n$ soit un carré parfait.

c'est-à-dire : $3^2 \times 7^2 \times 10n$ soit un carré parfait.

donc il suffit de prendre $n = 2 \times 5 = 10$

on obtient donc : $4410n = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$
 $= (2 \times 3 \times 5 \times 7)^2$
 $= (210)^2$

2 On a: $4410 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

et $70 = 2 \times 5 \times 7$

Donc $PGCD(70, 4410) = 2 \times 5 \times 7 = 70$

Infos:

Si $N = a^2$ alors la décomposition de N en facteurs premiers s'écrit $N = P_1^{2a_1} \times P_2^{2a_2} \times \dots \times P_k^{2a_k}$

Exercices de synthèse

Exercice 15

Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

1 Montrer que :

(1) $a \mid a$

(2) $a \mid b$ et $b \mid a$ équivaut à $a = b$

- (3) si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$
- (4) si $d|a$ et $d|b$ alors $d|au + bv$ et $d|au - bv$ pour tout $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$
- 2 Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $n+3|2n+11$
- 3 Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que: $\frac{n+5}{n+1} \in \mathbb{N}$
- 4 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si: $2|a+b$ alors: $2|a^2 + b^2$

Exercice 16

- 1 Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq b$
Montrer que: $a+b$ et $a-b$ sont de même parité
- 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$
- Montrer que: si $n+m$ est pair alors n et m sont de même parité.
 - Montrer que: si nm est impair alors n et m sont impairs
- 3 Déterminer les entiers naturels x et y tels que: $x^2 - y^2 = 12$

Exercice 17

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

- 1 Montrer que :
- si n pair alors n^2 est pair .
 - si n impair alors n^2 est impair.
- 2 En déduire que:
- si n^2 est pair alors n pair.
 - si n^2 est impair alors n impair.
- 3 Montrer que $\sqrt{6} \notin \mathbb{N}$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- 1 a. Montrer que: $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$
b. En déduire que: $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.
- 2 On pose $a_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$
Soit $k \in \{2; 3; \dots; n\}$
- Montrer que: $a_n + k$ n'est pas premier.
 - En déduire les dix nombres consécutifs non premiers.
- 3 Soit p un nombre premier impair.
Déterminer les entiers naturels x et y , tels que: $x^2 - y^2 = p$

Exercice 19

1 Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que $(a + 3)(b + 2) = ab + 3b + 2a + 6$

2 Déterminer les entiers naturels x et y tels que: $xy + 3x + 2y = 9$

3 Déterminer les entiers naturels x et y tels que: $xy - x - y = 2$

Solutions

Exercice 15

1 Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

(1) On a : $a = 1 \times a$ donc $a | a$

(2) Si $a | b$ et $b | a$ alors $a = kb (k \in \mathbb{N}^*)$ et $b = k'a (k' \in \mathbb{N}^*)$

Donc: $a = kb = kk'a$

Comme $a \neq 0$ alors $kk' = 1$ et par suite $k = k' = 1$

Ainsi $a = b$

réciroquement si $a=b$ alors $a | b$ et $b | a$ (car $a | a$)

(3) Si $a | b$ et $b | c$ alors $b = ka (k \in \mathbb{N}^*)$ et $c = k'b (k' \in \mathbb{N}^*)$

Donc: $c = kk'a = k''a$ où $k'' = kk' (k'' \in \mathbb{N}^*)$

D'où $a | c$.

Ainsi si: $a | b$ et $b | c$ alors $a | c$

(4) Si $d | a$ et $d | b$ alors $a = kd (k \in \mathbb{N}^*)$ et $b = k'd (k' \in \mathbb{N}^*)$

Soit u et v deux entiers naturels on a:

$$au + bv = d(ku + k'v) = dk'' \text{ où } k'' = ku + k'v \text{ donc } d | au + bv$$

$$au - bv = d(ku - k'v)$$

$$|au - bv| = d|ku - k'v| = d\gamma \text{ où } \gamma = |ku - k'v|$$

$$\text{Donc: } d | |au - bv|$$

Conclusion :

Si $d | a$ et $d | b$ alors $d | au + bv$ et $d | |au - bv|$ pour tout $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$

2 Déterminons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + 3 | 2n + 11$

$$\text{On a: } \begin{cases} n + 3 | 2n + 11 \\ n + 3 | n + 3 \end{cases} \text{ Donc } n + 3 | 2n + 11 - 2(n + 3) \text{ (d'après (4))}$$

C'est-à-dire $n + 3 \mid 5$

Réciproquement:

Si $n + 3 \mid 5$ alors $\begin{cases} n + 3 \mid 5 \\ n + 3 \mid n + 3 \end{cases}$, donc $n + 3 \mid 2(n + 3) + 5$

c'est-à-dire: $n + 3 \mid 2n + 11$

ainsi: $n + 3 \mid 2n + 1$ si et seulement si $n + 3 \mid 5$

or $D_5 = \{1; 5\}$ d'où $n + 3 = 1$ ou $n + 3 = 5$

c'est-à-dire: $n = -2 \in \mathbb{N}$ ou $n = 2$

Ainsi: $n = 2$ est l'unique entier naturel tel que $n + 3 \mid 2n + 11$

3 Déterminons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n+5}{n+1} \in \mathbb{N}$

$$\text{On a: } \frac{n+5}{n+1} = \frac{n+1+4}{n+1} = 1 + \frac{4}{n+1}$$

ainsi: $\frac{n+5}{n+1} \in \mathbb{N}$ signifie que $n+1$ divise 4

signifie que $n+1 \in \{1; 2; 4\}$

signifie que $n \in \{0; 1; 3\}$

Donc: $\frac{n+5}{n+1} \in \mathbb{N}$ signifie que $n \in \{0, 1, 3\}$

4 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

montrons que si $2 \mid a+b$ alors $2 \mid a^2 + b^2$

on a: $2 \mid a+b$ et $2 \mid 2ab$, donc: $2 \mid (a+b)(a+b) - 2ab$

C'est-à-dire: $2 \mid a^2 + b^2$

Exercice 16

1 Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq b$

Montrons que $a+b$ et $a-b$ sont de même parité.

$$\text{On a } a+b = (a-b) + 2b$$

donc: si $a-b$ est pair c'est-à-dire $a-b = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$,

alors: $a+b = 2k + 2b = 2(k+b)$; avec $k+b \in \mathbb{N}$.

d'où: $a+b$ est pair.

si $a-b$ est impair, c'est-à-dire $a-b = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

alors: $a+b = 2k+1 + 2b = 2(b+k) + 1$; avec $b+k \in \mathbb{N}$.

d'où $a + b$ est impair.

Ainsi $a + b$ et $a - b$ sont de même parité.

2 a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n + m$ soit pair.

Par l'absurde supposons que , n et m ne soient pas de même parité par exemple n pair et m impair.

On a $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) et $m = 2k' + 1$ ($k' \in \mathbb{N}$)

et par suite $n + m = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$

où $k'' = k + k'$ ($k'' \in \mathbb{N}$)

donc $n + m$ est impair ce qui est absurde (car $n + m$ est pair)

Ainsi si $n + m$ est pair alors n et m sont de même parités.

3 Déterminons les entiers naturels x et y tel que $x^2 - y^2 = 12$

On a $x^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 12$

comme $(x - y)(x + y)$ est pair et $x - y$ et $x + y$ ont même parité (d'après 1)

alors: $x - y$ et $x + y$ sont pairs et comme $x - y \leq x + y$

alors: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ($12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$)

soit : $\begin{cases} x = y + 2 \\ y + 2 + y = 6 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 2 \end{cases}$, ainsi $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

D'où: $(x; y) = (4; 2)$

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$

1 a. Si n est pair alors $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), donc $n^2 = 4k^2 = 2k'$

où $k' = 2k^2$ ($k' \in \mathbb{N}$)

d'où: n^2 est pair.

Conclusion: si n pair alors n^2 est pair

b. Si n est impair alors: $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

donc: $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

c'est-à-dire: $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$

où: $k' = 2k^2 + 2k$ ($k' \in \mathbb{N}$)

Ainsi n^2 est impair

Conclusion:

Si n est impair alors n^2 est impair.

2 c. Si n^2 est pair alors n est pair.

Supposons n^2 pair alors n pair.

En effet si n est impair alors d'après b) n^2 est impair,

ce qui est absurde, donc n est pair

d'où: si n^2 est pair alors n est pair.

De même d) si n^2 est impair alors n est impair.

En effet : supposons n^2 est impair.

Si n est pair alors $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) alors d'après a) n^2 est pair,

Ce qui est absurde, donc n est impair

3 Montrons que $\sqrt{6} \notin \mathbb{N}$

Par l'absurde: supposons que $\sqrt{6} \in \mathbb{N}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{6} = n$

et par suite $6 = n^2$;

ainsi n^2 est pair et d'après c) n est pair, c'est-à-dire $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

d'où $6 = 4k^2$ c'est-à-dire $3 = 2k^2$

ainsi 3 est pair, ce qui est absurde.

Donc: $\sqrt{6} \notin \mathbb{N}$

Exercice 18

1 a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2$

$$= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$$

$$= (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$$

$$= (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

b. Si $n \neq 1$ alors $n > 1$

$n^2 + 2n + 2 > 1$ et $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1$

donc: $n^2 - 2n + 2 > 1$

d'où: $n^2 + 2n + 2$ et $n^2 - 2n + 2$ sont des diviseurs propres de $n^4 + 4$
et par suite $n^4 + 4$ n'est pas premier.

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ on a : $(n^4 + 4)$ n'est pas premier

et si $n = 1$ alors $n^4 + 4 = 5$ est premier.

Donc $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.

2 On a : $a_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

Soit: $k \in \{2, 3, 4, 5, \dots, n\}$

on a: $a_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-1) \times k \times (k+1) \times \dots \times n$

donc: $a_n + k = k((1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-1)(k+1) \times \dots \times n) + 1)$

d'où: k est un diviseur propre de $a_n + k$

Par suite : $a_n + k$ n'est pas premier.

b. Déduisons les dix nombres consécutifs non premiers

$a_{11} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 11$ et $k \in \{2; 3; \dots; 11\}$

On a: $a_{11} + 2; a_{11} + 3; a_{11} + 4; \dots$ et $a_{11} + 11$

sont les dix nombres consécutifs non premiers.

3 Soit p un nombre premier impair; c'est-à-dire $p \geq 3$

On a: $(x - y)(x + y) = p$; $x - y \leq x + y$ et $p = 1 \times p$

d'où: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = p \end{cases}$

doit : $\begin{cases} x = y + 1 \\ y + y + 1 = p \end{cases}$

donc: $y = \frac{p-1}{2}$

et $x = \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$

et comme p est impair alors: $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs

d'où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$

Par suite : $(x; y) = \left(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2} \right)$

Exercice 19

1 On a: $(a+3)(b+2) = a(b+2) + 3(b+2)$
 $= ab + 2a + 3b + 6$

Donc: $(a+b)(6+2) = ab + 2a + 3b + 6$

2 Déterminons x et y tels que $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $xy + 3x + 2y = 9$

On a: $xy + 3x + 2y + 6 = 15$

puisque: $xy + 3x + 2y + 6 = (x+3)(y+2)$

alors $(x+3)(y+2) = 15$

et comme $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$

alors: $\begin{cases} x+3 = 1 \\ y+2 = 15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+3 = 3 \\ y+2 = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+3 = 15 \\ y+2 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+3 = 5 \\ y+2 = 3 \end{cases}$

D'où: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

3 Déterminons les entiers naturels x et y tels que: $xy - x - y = 2$.

On a l'égalité: $xy - x - y = 2$

s'écrit: $x(y-1) - y + 1 = 3$

c'est-à-dire: $(y-1)(x-1) = 3$

d'où: $\begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 = 3 \\ y-1 = 1 \end{cases}$

soit: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Ainsi: $x = 2$ et $y = 4$ ou $x = 4$ et $y = 2$

1 Ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

- ▶ L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- ▶ L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- ▶ L'ensemble $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux et défini par:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Un nombre décimal a une écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

- ▶ L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels et défini par:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- ▶ L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble qui contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Remarque :

$\frac{1}{4} = 0,25$ est un nombre décimal.

$\frac{1}{3} = 0,33.....$ n'est pas un nombre décimal.

▶ Si $x = \frac{a}{2^n \times 5^p}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{D}$

Exercices

Exercice 1

Recopie le tableau suivant et le compléter en utilisant l'un des symboles : $\in$ et $\notin$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-7^2					
$\frac{21}{4-11}$					
$\frac{1}{4} + \frac{11}{4}$					
$\frac{\sqrt{36}-1}{(4)^2-1}$					

$\frac{-3}{2^5 \times 5^2}$					
$\sqrt{3}$					
$-\pi$					
$\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$					
$\sqrt{20} \times \sqrt{45}$					

Exercice 2

Déterminer les nombres entiers naturels parmi les nombres suivants :

$$a = \frac{125}{50}$$

$$d = -\frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}$$

$$b = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$$

$$e = \frac{2}{3} \div \frac{1}{9}$$

$$c = (1 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}$$

$$f = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2$$

Exercice 3

1 Montrer que : $\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 \in \mathbb{Q}$

2 Montrer que : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \in \mathbb{N}$

3 Montrer que : $\frac{2^{12}}{5^{15}} \in \mathbb{D}$

4 Montrer que : $\frac{9^{12} + 9^{11}}{3^{23} - 3^{22}} \in \mathbb{N}$

Solutions

Exercice 1

► On a : $-7^2 = -49$ donc $-7^2 \notin \mathbb{N}$ et appartient à tous les autres ensembles.

► On a : $\frac{21}{4-11} = \frac{21}{-7} = -3$ donc : $\frac{21}{4-11} \notin \mathbb{N}$ et appartient à tous les autres ensembles.

► On a : $\frac{1}{4} + \frac{11}{4} = \frac{12}{4} = 3$ donc : $\frac{1}{4} + \frac{11}{4}$ appartient à tous les ensembles.

► On a : $\frac{\sqrt{36}-1}{(4)^2-1} = \frac{6-1}{16-1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,33\ldots$

donc $\frac{\sqrt{36}-1}{(4)^2-1}$ n'appartient ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$ ni à $\mathbb{D}$ mais appartient à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$

► On a : $\frac{-3}{2^5 \times 5^2} = \frac{-3 \times 5^3}{2^5 \times 5^2 \times 5^3} = \frac{-3 \times 125}{10^5} = \frac{-375}{10^5}$

donc $\frac{-3}{2^5 \times 5^2} \notin \mathbb{N}$ et $\frac{-3}{2^5 \times 5^2} \notin \mathbb{Z}$ mais $-\frac{3}{2^5 \times 5^2} \in \mathbb{D}$ et $-\frac{3}{2^5 \times 5^2} \in \mathbb{Q}$
et $-\frac{3}{2^5 \times 5^2} \in \mathbb{R}$

► On a $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel donc $\sqrt{3}$ n'appartient ni à $\mathbb{N}$ ni à $\mathbb{Z}$ ni à $\mathbb{D}$ ni à $\mathbb{Q}$ mais appartient seulement à $\mathbb{R}$.

► On a : $-\pi$ est un nombre irrationnel donc $-\pi$ n'appartient ni à $\mathbb{N}$ ni à $\mathbb{Z}$ ni à $\mathbb{D}$ ni à $\mathbb{Q}$ mais appartient seulement à $\mathbb{R}$.

► On a : $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$

donc $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ appartient à tous les ensembles.

► On a : $\sqrt{20} \times \sqrt{45} = 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 30$ donc $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$ appartient à tous les ensembles.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-7^2	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{21}{4-11}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{1}{4} + \frac{11}{4}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{\sqrt{36}-1}{(4)^2-1}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\frac{-3}{2^5 \times 5^2}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$-\pi$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{20} \times \sqrt{45}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

Déterminons les nombres entiers  les nombres suivants :

► On a : $a = \frac{125}{50} = \frac{25 \times 5}{25 \times 2} = \frac{5}{2}$ donc $a \notin \mathbb{N}$

► On a : $b = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ donc $b \in \mathbb{N}$

► On a : $c = (1 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} = 3$ donc $c \in \mathbb{N}$

► On a : $d = -\frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{-\frac{1}{12}} = 12$ donc $d \in \mathbb{N}$

► On a : $e = \frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ donc $e \in \mathbb{N}$

► On a : $f = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 8$
donc $f \in \mathbb{N}$

Exercice 3

1 Montrons que : $\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{5}} + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \\ &= \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2}{5} - 2 = \frac{25 + 4 - 20}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même on a : } \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} + \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} - 2\sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{9 + 16 - 24}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{9}{10} + \frac{1}{12} = \frac{54 + 5}{60} = \frac{59}{60}$$

$$\text{Donc } \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 \in \mathbb{Q}$$

2 Montrons que : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times 2 \\
 &= ((\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2) \times 2 \\
 &= (4) \times 2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Donc: $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \in \mathbb{N}$

3 Montrons que : $\frac{2^{12}}{5^{15}} \in \mathbb{D}$

$$\text{On a : } \frac{2^{12}}{5^{15}} = \frac{2^{15} \times 2^{12}}{2^{15} \times 5^{15}} = \frac{2^{27}}{10^{15}}$$

puisque $2^{27} \in \mathbb{Z}$ alors $\frac{2^{27}}{5^{10}} \in \mathbb{D}$ car ce nombre s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

4 Montrons que : $\frac{9^{12} + 9^{11}}{3^{23} - 3^{22}} \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } \frac{9^{12} + 9^{11}}{3^{23} - 3^{22}} = \frac{9^{11}(9 + 1)}{3^{22}(3 - 1)} = \frac{9^{11} \times 10}{(3^2)^{11} \times 2} = \frac{9^{11} \times 5}{9^{11}} = 5$$

$$\text{donc : } \frac{9^{12} + 9^{11}}{3^{23} - 3^{22}} \in \mathbb{N}$$

2 Racines carrées

Définition:

Soit x et y deux réels positifs .

on a: $x = y^2$ équivaut à $y = \sqrt{x}$

Propriétés :

- ▶ Pour tout réel positif $x : (\sqrt{x})^2 = x$
- ▶ Pour tout réel positif $x : \sqrt{x^2} = x$
- ▶ $\sqrt{x^2} = -x$ pour tout réel négatif x
- ▶ $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \sqrt{y}$ pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$
- ▶ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ pour tout $x \geq 0$ et $y > 0$

Exercice 4

Calculer :

$$A = \frac{\sqrt{60} \times \sqrt{108}}{\sqrt{125}}$$

$$B = 5\sqrt{\frac{35}{10}} - \frac{39}{4}\sqrt{\frac{28}{8}} + \sqrt{\frac{63}{8}}$$

$$C = \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$$

$$D = \sqrt{37\sqrt{10^{16}} - 10^8}$$

Exercice 5

Calculer :

$$A = \sqrt{\frac{5}{7}} + 3\sqrt{\frac{20}{63}} - 4\sqrt{\frac{45}{112}}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} + 2}{2 - \sqrt{3}} \div \frac{2 + \sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{5}} \right)$$

$$D = (1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{5} - 1)^2$$

Exercice 6

Calculer :

$$A = \sqrt{588} - 2\sqrt{12} - \sqrt{300}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + 1}$$

$$C = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \div \frac{2 - \sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$D = \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Exercice 7

1 a. Calculer $(5 + 2\sqrt{6})^2$

b. Déterminer la valeur de : $\frac{1}{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}} + \sqrt{24} - 5$

2 Vérifier que : $\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}} - \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = 1$

Exercice 8

Calculer :

$$A = \frac{6 - \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$B = \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{7} - 1} \right)^{-2} - 8 \right)^3$$

$$C = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}} - \sqrt{2}$$

$$D = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - \frac{2}{5}\sqrt{75}}$$

Exercice 9

Calculer :

$$A = \sqrt{3 - \sqrt{7 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} - \frac{4}{\sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})}}$$

$$C = \sqrt{\frac{4^{30} + 16^{16}}{4^{28} + 16^{15}}}$$

Exercice 10

1 On pose : $a = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

a. Calculer a^2

b. En déduire que : $a = 2$

2 On pose : $b = (4 + \sqrt{2})(4\sqrt{2} - 9)\sqrt{4\sqrt{2} + 9}$

a. Calculer b^2

b. En déduire la valeur de b .

Exercice 4

Calculons A :

$$\text{On a : } 60 = 4 \times 15 = 4 \times 5 \times 3 \text{ donc } \sqrt{60} = 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

$$108 = 9 \times 12 = 9 \times 3 \times 4 \text{ donc } \sqrt{108} = 3 \times \sqrt{3} \times 2 = 6\sqrt{3}$$

$$125 = 5 \times 25 \text{ donc } \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\text{Donc : } A = \frac{\sqrt{60} \times \sqrt{108}}{\sqrt{125}} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times 6 \times \sqrt{3}}{5 \times \sqrt{5}} = \frac{12 \times 3}{5} = \frac{36}{5}$$

Calculons B :

$$\text{On a : } \frac{35}{10} = \frac{5 \times 7}{5 \times 2} = \frac{7}{2}; \frac{28}{8} = \frac{7}{2} \text{ et } \frac{63}{8} = \frac{9 \times 7}{4 \times 2}$$

$$\text{d'où : } \sqrt{\frac{35}{10}} = \sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{28}{8}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ et } \sqrt{\frac{63}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\text{donc : } B = 5\sqrt{\frac{35}{10}} - \frac{39}{4}\sqrt{\frac{28}{8}} + \sqrt{\frac{63}{8}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{39}{4}\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \left(5 - \frac{39}{4} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Calculons C :

$$\text{On a : } C = \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{7^2 \times 3}{7}} - \sqrt{\frac{3^2 \times 7}{3}}\right)^3 = (\sqrt{21} - \sqrt{21})^3 = 0^3 = 0$$

$$\text{ou } C = \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$$

Infos:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$$

$$= \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 \times \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

$$= \left[\left(7\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 - 2 \times 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times 3\sqrt{\frac{7}{3}} + \left(3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2\right] \times \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

$$= \left(7\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^3 - 3\left(7\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 \left(3\sqrt{\frac{7}{3}}\right) + 3\left(7\sqrt{\frac{3}{7}}\right) \left(3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 - \left(3\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$$

$$= 7^3 \times \frac{3}{7} \times \sqrt{\frac{3}{7}} - 3 \times 7^2 \times \frac{3}{7} \times 3\sqrt{\frac{7}{3}} + 3 \times 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times 3^2 \times \frac{7}{3} - 3^3 \times \frac{7}{3} \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$= 3 \times 7^2 \sqrt{\frac{3}{7}} - 3^3 \times 7\sqrt{\frac{7}{3}} + 3^2 \times 7^2 \sqrt{\frac{3}{7}} - 3^2 \times 7\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$= 3 \times 7^2 \left(\sqrt{\frac{3}{7}} + 3\sqrt{\frac{3}{7}}\right) - 3^3 \times 7 \left(3\sqrt{\frac{7}{3}} + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

$$= 4 \times 3 \times 7^2 \sqrt{\frac{3}{7}} - 3^3 \times 7 \times 4\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$= 4 \times 3 \times 7 \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = 84 \left(7\sqrt{\frac{3}{7}} - 3\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = 84(\sqrt{21} - \sqrt{21}) = 0$$

$$\text{Donc : } C = 0$$

► **Calculons D :** On a : $D = \sqrt{37\sqrt{10^{16}} - 10^8}$

$$= \sqrt{37 \times 10^8 - 10^8}$$

$$= \sqrt{10^8(37 - 1)}$$

$$= \sqrt{10^8 \times 36}$$

$$= \sqrt{10^8} \times \sqrt{36}$$

$$= 10^4 \times 6 = 60000$$

Donc : $D = 6 \times 10^4$

Exercice 5

► **Calculons A :**

on a : $\frac{20}{63} = \frac{4 \times 5}{9 \times 7}$ donc $\sqrt{\frac{20}{63}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$

et $\frac{45}{112} = \frac{9 \times 5}{16 \times 7}$ donc $\sqrt{\frac{45}{112}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$

D'où : $A = \sqrt{\frac{5}{7}} + 3\sqrt{\frac{20}{63}} - 4\sqrt{\frac{45}{112}}$

$$= \sqrt{\frac{5}{7}} + 3 \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}} - 4 \times \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{7}} + 2\sqrt{\frac{5}{7}} - 3\sqrt{\frac{5}{7}} = 3\sqrt{\frac{5}{7}} - 3\sqrt{\frac{5}{7}} = 0$$

Donc : $A = 0$

► **Calculons B :**

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$ (On a multiplié par l'expression conjuguée)

$$= \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

D'où : $B = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} = (2\sqrt{2} + \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{3})$

Donc : $B = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

► **Calculons C :**

On a : $\frac{\sqrt{5} + 2}{2 - \sqrt{3}} \div \frac{2 + \sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 2}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2 + \sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}+2}{2-\sqrt{3}} \div \frac{2+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{5}+2)(5-2\sqrt{5})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{5\sqrt{5}-10+10-4\sqrt{5}}{(2)^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } C = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+2}{2-\sqrt{3}} \div \frac{2+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1$$

Donc : $C = 1$

► Calculons D :

On a deux méthodes pour calculer D

► **Première méthode** : utiliser l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\begin{aligned}\text{on a : } D &= (1+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}-1)^2 \\ &= [(1+\sqrt{5}) - (\sqrt{5}-1)][(1+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-1)] \\ &= (1+\sqrt{5}-\sqrt{5}+1)(1+\sqrt{5}+\sqrt{5}-1) \\ &= 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc : $D = 4\sqrt{5}$

► **Deuxième méthode** : utiliser les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{On a : } (1+\sqrt{5})^2 &= (1)^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5} \\ (1-\sqrt{5})^2 &= (1)^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5} \\ \text{d'où : } D &= (1+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}-1)^2 = (6 + 2\sqrt{5}) - (6 - 2\sqrt{5}) \\ &= 6 + 2\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}, \text{ Ainsi : } D = 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

Exercice 6

► Calculons A :

$$\text{On a : } 588 = 2^3 \times 3^1 \times 7^2 \text{ donc } \sqrt{588} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3},$$

$$12 = 4 \times 3 \text{ donc } \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{et } 300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \text{ donc } \sqrt{300} = 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où : } A &= \sqrt{588} - 2\sqrt{12} - \sqrt{300} \\ &= 14\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ainsi : $A = 0$

► Calculons B :

$$\begin{aligned}\text{On a : } B &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2 - (1)^2} = \frac{3 - 5}{7 - 1} = \frac{-2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc : $B = -\frac{1}{3}$

► Calculons C :

$$\begin{aligned}\text{On a : } C &= \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \div \frac{2 - \sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{2(7 - 4\sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})^2} = \frac{2(7 - 4\sqrt{3})}{4 - 4\sqrt{3} + 3} = \frac{2(7 - 4\sqrt{3})}{7 - 4\sqrt{3}} = 2\end{aligned}$$

Donc : $C = 2$

► Calculons D :

$$\begin{aligned}\text{On a : } \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} + 3}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = 9 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{d'où : } D = \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 9 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 9$$

Donc : $D = 9$

1 a. Calculons $(5 + 2\sqrt{6})^2$

$$\begin{aligned}\text{On a : } (5 + 2\sqrt{6})^2 &= (5)^2 + 2 \times 5 \times 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 \\ &= 25 + 20\sqrt{6} + 24 \\ &= 49 + 20\sqrt{6}\end{aligned}$$

b. Déterminons la valeur de : $\frac{1}{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}} + \sqrt{24} - 5$

On a d'après la question a) : $49 + 20\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^2$

Donc $\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}$ et on a : $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } \frac{1}{\sqrt{49+20\sqrt{6}}} + \sqrt{24} - 5 &= \frac{5-2\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} + 2\sqrt{6} - 5 \\
 &= \frac{5-2\sqrt{6}}{25-24} + 2\sqrt{6} - 5 \\
 &= 5 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 5 = 0
 \end{aligned}$$

(On a multiplié par l'expression conjuguée)

$$\text{Donc : } \frac{1}{\sqrt{49+20\sqrt{6}}} + \sqrt{24} - 5 = 0$$

2 Vérifions que : $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1$

$$\text{On a : } \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$$\text{donc : } \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

et on a :

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{d'où : } \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1 - \sqrt{5} + 1}{2} = 1$$

$$\text{Donc : } \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1$$

Exercice 8

► Calculons A :

$$\text{On a } \frac{6-\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)}{1-2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{1-2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } A = \frac{6-\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}} + \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

► Calculons B :

$$\text{On a : } \left(\frac{1}{\sqrt{7}-1}\right)^{-2} = (\sqrt{7}-1)^2 = (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} + 1 = 8 - 2\sqrt{7}$$

$$\text{et } \left(\frac{1}{\sqrt{7}-1}\right)^{-2} - 8 = 8 - 2\sqrt{7} - 8 = -2\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } B &= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{7}-1} \right)^{-2} - 8 \right)^3 \\
 &= \frac{\sqrt{7}}{7} \times (-2\sqrt{7})^3 \\
 &= \frac{\sqrt{7}}{7} \times (-2)^3 (\sqrt{7})^3 \\
 &= \frac{\sqrt{7}}{7} \times (-8) \times 7 \times \sqrt{7} \\
 &= -56
 \end{aligned}$$

Donc : $B = -56$

► Calculons C :

$$\text{On a : } \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$$\text{d'où : } \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\text{donc : } C = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2} = 1$$

Donc : $C = 1$

► Calculons D :

$$\text{On a : } 27 = 3^3 \quad \text{donc : } \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{et } 48 = 16 \times 3 \quad \text{donc : } \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{et } 75 = 25 \times 3 \quad \text{donc : } \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } D &= \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - \frac{2}{5}\sqrt{75}} \\
 &= \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt{3}} \\
 &= \frac{5\sqrt{3}}{-5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{-7\sqrt{3}} = -\frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

Donc : $D = -\frac{5}{7}$

Exercice 9

► Calculons A :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } A &= \sqrt{3 - \sqrt{7 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}} \\
 &= \sqrt{(3 - \sqrt{7 + \sqrt{3}})(3 + \sqrt{7 + \sqrt{3}})} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{(3)^2 - (\sqrt{7 + \sqrt{3}})^2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{9 - 7 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{(2 - \sqrt{3}) \times (2 + \sqrt{3})} \\
 &= \sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 3} = 1
 \end{aligned}$$

Donc : $A = 1$

► Calculons B :

$$\text{On a : } 11 - 2\sqrt{30} = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{5} = (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$$

$$\text{donc : } \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{5} \quad (\text{Car } \sqrt{6} - \sqrt{5} > 0).$$

$$\text{On a : } 7 - 2\sqrt{10} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$$

$$\text{donc : } \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} \quad (\text{Car } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0).$$

$$\text{On a : } 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$\text{donc } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1 \quad (\text{Car } \sqrt{3} + 1 > 0)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} - \frac{4}{\sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} - \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} - \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{1} - \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} - \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \\
 &= \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2} = 0
 \end{aligned}$$

Donc : $B = 0$

► Calculons C : On a
$$\begin{aligned}\frac{4^{30} + 16^{16}}{4^{28} + 16^{15}} &= \frac{4^{30} + (4^2)^{16}}{4^{28} + (4^2)^{15}} = \frac{4^{30} + 4^{32}}{4^{28} + 4^{30}} \\ &= \frac{4^{30}(1 + 4^2)}{4^{28}(1 + 4^2)} \\ &= \frac{4^{30}}{4^{28}} = 4^2 = 16\end{aligned}$$

d'où : $C = \sqrt{\frac{4^{30} + 16^{16}}{4^{28} + 16^{15}}} = \sqrt{16} = 4$

Donc : $C = 4$

Exercice 10

1 a. Calculons a^2

On a : $a = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

donc :
$$\begin{aligned}a^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 \\ &= ((\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2)(2 - \sqrt{3}) \\ &= (8 + 2\sqrt{12})(2 - \sqrt{3}) \\ &= (8 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \quad (\text{Car } \sqrt{12} = 2\sqrt{3}) \\ &= 4(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\ &= 4((2)^2 - (\sqrt{3})^2) \\ &= 4(4 - 3) = 4\end{aligned}$$

Donc : $a^2 = 4$

b. En déduire que $a = 2$

On a $a^2 = 4$ donc $a = 2$ ou $a = -2$

Puisque a est positif donc $a = 2$

2 a. Calculons b^2

On a : $b = (4 + \sqrt{2})(4\sqrt{2} - 9)\sqrt{4\sqrt{2} + 9}$

donc :
$$\begin{aligned}b^2 &= (4 + \sqrt{2})^2 (4\sqrt{2} - 9)^2 (\sqrt{4\sqrt{2} + 9})^2 \\ &= ((4)^2 + 2 \times 4 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2) \times (4\sqrt{2} - 9)^2 \times (4\sqrt{2} + 9) \\ &= (18 + 8\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 9)(4\sqrt{2} - 9)(4\sqrt{2} + 9) \\ &= 2(9 + 4\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 9)((4\sqrt{2})^2 - (9)^2) \\ &= 2((4\sqrt{2})^2 - (9)^2)((4\sqrt{2})^2 - (9)^2) \\ &= 2 \times (-49) \times (-49) \\ &= 2 \times (49)^2\end{aligned}$$

b. En déduire la valeur de b

On a : $b^2 = 2 \times (49)^2$

donc : $b = 49\sqrt{2}$ ou $b = -49\sqrt{2}$

puisque $b < 0$, Car $4\sqrt{2} - 9 < 0$ et $(4 + \sqrt{2})\sqrt{4\sqrt{2} + 9} > 0$

Alors : $b = -49\sqrt{2}$

3 Puissances dans $\mathbb{R}$

Définition:

Soit a un réel et n un entier naturel non nul

▶ Par convention, si $a \neq 0$ alors $a^0 = 1$

▶ $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $a^1 = a$

Propriétés :

Pout tout a et b de $\mathbb{R}^*$ et m et n de $\mathbb{Z}$ on a :

▶ $a^{n+m} = a^n \times a^m$

▶ $(a^n)^m = a^{nm}$

▶ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

▶ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

▶ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

▶ $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^n$ pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{Z}$

▶ si $a \neq 0$ alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

▶ Puissances de 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$10^n = \underbrace{100\dots00}_{0 \text{ écrit } n \text{ fois}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,00\dots01}_{0 \text{ écrit } n \text{ fois}}$

▶ Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Définition et propriétés

▶ Tout nombre décimal positif x peut s'écrire sous la forme $x = a10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$ vérifiant $1 \leq a < 10$

L'écriture $x = a.10^p$ s'appelle l'écriture scientifique du nombre x

▶ Tout nombre décimal négatif y peut s'écrire sous la forme $y = -a10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$ vérifiant $1 \leq a < 10$

▶ L'écriture $y = -a10^p$ s'appelle l'écriture scientifique du nombre y .

Exercices

Exercice 11

Calculer :

$$1 \quad A = \frac{25 \times 5^{18} \times 6^{10} \times 3^{-4}}{2^9 \times (5^4)^5 \times 3^6}$$

$$2 \quad B = \left(\left(\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \right)^3 - 28 \right)^{-16}$$

$$3 \quad C = \frac{100^{-8} \times 5^{13} \times 20^4}{2^{-9}}$$

$$4 \quad D = \frac{2^{13} \times (7^4)^3 \times 3^9}{49 \times 7^{10} \times 6^{11} \times 3^{-2}}$$

Exercice 12

Calculer :

$$A = \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \times \left(\frac{1}{9} - 1 \right)^{-1} \right)^2$$

$$B = \sqrt{3^2 - 2^2} \times \sqrt{3^2 \times 2^3} \times \sqrt{1000}$$

$$C = \frac{1000^{-4} \times 5^{14} \times 2^5}{2^{-10}}$$

Exercice 13

Calculer :

$$A = \left(\frac{10^4 \times 5 \times 10^{-2}}{2,5 \times 10^3} \right)^{-3}$$

$$B = \frac{(-50)^3 \times (-121)^2 \times 18^5}{(-242)^3 \times (-125)^2 \times (-54)^3}$$

$$C = \frac{50 \times (10^4)^2 \times 10^{-5}}{125 \times 0,4 \times (10^3)^{-1}}$$

Solutions

Exercice 4

► Calculons A :

$$\begin{aligned} \text{On a : } A &= \frac{25 \times 5^{18} \times 6^{10} \times 3^{-4}}{2^9 \times (5^4)^5 \times 3^6} = \frac{5^2 \times 5^{18} \times (2 \times 3)^{10} \times 3^{-4}}{2^9 \times 5^{20} \times 3^6} \\ &= \frac{5^{20} \times 2^{10} \times 3^{10} \times 3^{-4}}{2^9 \times 5^{20} \times 3^6} = \frac{5^{20} \times 2^{10} \times 3^6}{2^9 \times 5^{20} \times 3^6} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

Donc $A = 2$

► Calculons B :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } B &= \left(\left(\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \right)^3 - 28 \right)^{-16} \\
 &= \left(\left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)^3 - 28 \right)^{-16} \\
 &= \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right)^3 - 28 \right)^{-16} \\
 &= (27 - 28)^{-16} \\
 &= (-1)^{-16} = 1
 \end{aligned}$$

Donc : $B = 1$

► Calculons C :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } C &= \frac{100^{-8} \times 5^{13} \times 20^4}{2^{-9}} \\
 &= \frac{(10^2)^{-8} \times 5^{13} \times (2^2 \times 5)^4}{2^{-9}} \\
 &= \frac{(5 \times 2)^{-16} \times 5^{13} \times 2^8 \times 5^4}{2^{-9}} \\
 &= \frac{5^{-16} \times 2^{-16} \times 5^{17} \times 2^8}{2^{-9}} \\
 &= 5^1 \times 2^{-8} \times 2^9 = 5^1 \times 2^1 = 10
 \end{aligned}$$

Donc : $C = 10$

► Calculons D :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } D &= \frac{2^{13} \times (7^4)^3 \times 3^9}{49 \times 7^{10} \times 6^{11} \times 3^{-2}} \\
 &= \frac{2^{13} \times 7^{12} \times 3^9}{7^2 \times 7^{10} \times 2^{11} \times 3^{11} \times 3^{-2}} \\
 &= \frac{2^{13} \times 7^{12} \times 3^9}{7^{12} \times 2^{11} \times 3^9} \\
 &= \frac{2^{13}}{2^{11}} = 2^{13-11} = 2^2 = 4
 \end{aligned}$$

Donc $D = 4$

Exercice 12

► Calculons A :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } A &= \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \times \left(\frac{1}{9} - 1 \right)^{-1} \right)^2 \\
 &= \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(-\frac{9}{8} \right) \right)^2
 \end{aligned}$$

$$A = \left(\frac{4}{9} \times \left(-\frac{9}{8} \right) \right)^2$$

$$= \left(-\frac{4}{8} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Donc : $A = \frac{1}{4}$

► Calculons B :

$$\text{On a : } B = \sqrt{3^2 - 2^2} \times \sqrt{3^2 \times 2^3} \times \sqrt{1000}$$

$$= \sqrt{9 - 4} \times 3 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{10^3}$$

$$= \sqrt{5} \times 6\sqrt{2} \times 10\sqrt{10}$$

$$= 6\sqrt{10} \times 10\sqrt{10}$$

$$= 600$$

Donc : $B = 600$

► Calculons C :

$$\text{On a : } C = \frac{1000^{-4} \times 5^{14} \times 2^5}{2^{-10}}$$

$$= (10^3)^{-4} \times 5^{14} \times 2^{5+10}$$

$$= (10)^{-12} \times 5^{14} \times 2^{15}$$

$$= 2^{-12} \times 5^{-12} \times 5^{14} \times 2^{15}$$

$$= 2^3 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$$

Donc : $C = 200$

Exercice 13

► Calculons A :

$$\text{On a : } \frac{10^4 \times 5 \times 10^{-2}}{2,5 \times 10^3} = \frac{10^2 \times 5}{2,5 \times 10 \times 10^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

donc : $A = \left(\frac{1}{5} \right)^{-3} = 5^3 = 125$

► Calculons B :

$$\text{On a : } 50 = 25 \times 2 = 2 \times 5^2$$

$$\text{Et } 121 = 11^2$$

$$\text{Et } 18 = 9 \times 2 = 2 \times 3^2$$

$$\text{Et } 242 = 2 \times 121 = 2 \times 11^2$$

$$\text{Et } 125 = 5 \times 25 = 5^3$$

$$\text{Et } 54 = 27 \times 2 = 3^3 \times 2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } B &= \frac{(-50)^3 \times -(121)^2 \times (18)^5}{(-242)^3 \times (-125)^2 \times (-54)^3} \\ &= \frac{-(2 \times 5^2)^3 \times (11^2)^2 \times (2 \times 3^2)^5}{-(2 \times 11^2)^3 \times (5^3)^2 \times (-2 \times 3^3)^3} \\ &= -\frac{2^3 \times 5^6 \times 11^4 \times 2^5 \times 3^{10}}{2^3 \times 11^6 \times 5^6 \times 2^3 \times 3^9} \\ &= -\frac{2^2 \times 3}{11^2} = -\frac{12}{121} \end{aligned}$$

► Calculons C :

$$\text{On a : } 50 = 2 \times 25 = 2 \times 5^2$$

$$\text{Et } (10^4)^2 = 10^8 = (2 \times 5)^8 = 2^8 \times 5^8$$

$$\text{Et } 10^{-5} = (2 \times 5)^{-5} = 2^{-5} \times 5^{-5}$$

$$\text{Et } 125 = 5^3 \text{ et } (10^3)^{-1} = (2 \times 5)^{-3} = 2^{-3} \times 5^{-3}$$

$$\text{Et } 0,4 = 4 \times 10^{-1} = 2^2 \times (2 \times 5)^{-1} = 2^2 \times 2^{-1} \times 5^{-1} = 2^1 \times 5^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } C &= \frac{50 \times (10^4)^2 \times 10^{-5}}{125 \times 0,4 \times (10^3)^{-1}} \\ &= \frac{2 \times 5^2 \times 2^8 \times 5^8 \times 2^{-5} \times 5^{-5}}{5^3 \times 2^1 \times 5^{-1} \times 2^{-3} \times 5^{-3}} \\ &= \frac{2^4 \times 5^5}{5^{-1} \times 2^{-2}} \\ &= 2^{4+2} \times 5^{5+1} \\ &= 2^6 \times 5^6 = 10^6 = 1000000 \end{aligned}$$

4 Développement - factorisation - Identités remarquables

1. Développement - factorisation

- Développer un produit signifie le transformer en sommes de termes.
- Factoriser une somme signifie la transformer en produits de facteurs.

2. Identités remarquables

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- ▶ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ▶ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- ▶ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- ▶ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exercices

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 16x^2 - (2x + 1)^2$$

$$B = x^3 - 27 - 5(x - 3)$$

$$C = 8x^3 + 27$$

$$D = (1 - 4x)^2 - (x + 4)(4x - 1)$$

Exercice 15

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 48x^2 - 3$$

$$B = (x + 1)^3 - (x - 1)^3$$

$$C = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2$$

$$D = x^4 - 6x^2 + 9$$

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes

$$A = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

$$B = x^{12} - 2x^6 + 1$$

$$C = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$

$$D = x^3 + 27 + 7(x + 3) + 11(x^2 + 3x)$$

Factoriser les expressions suivantes

$$A = (xy - 7x)(xy + 7y) - (5x + 35)(2y - 14)$$

$$B = x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$$

$$C = xyz + 2yz - 2xy - 4y$$

$$D = xy + 3x + yz + 3z$$

Solutions

Exercice 14

Factorisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \triangleright A &= 16x^2 - (2x + 1)^2 \\ &= (4x)^2 - (2x + 1)^2 \\ &= (4x - (2x + 1))(4x + (2x + 1)) \\ &= (4x - 2x - 1)(4x + 2x + 1) \\ &= (2x - 1)(6x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } A = (2x - 1)(6x + 1)$$

$$\begin{aligned} \triangleright B &= x^3 - 27 - 5(x - 3) \\ &= (x^3) - (3)^3 - 5(x - 3) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 5(x - 3) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 5) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } B = (x - 3)(x^2 + 3x + 4)$$

$$\begin{aligned} \triangleright C &= 8x^3 + 27 \\ &= (2x)^3 + (3)^3 \\ &= (2x + 3)((2x)^2 - 2x \times 3 + 3^2) \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } C = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright D &= (1 - 4x)^2 - (x + 4)(4x - 1) \\
 &= (4x - 1)^2 - (x + 4)(4x - 1) \\
 &= (4x - 1)((4x - 1) - (x + 4)) \\
 &= (4x - 1)(4x - 1 - x - 4) \\
 &= (4x - 1)(3x - 5)
 \end{aligned}$$

Donc: $D = (4x - 1)(3x - 5)$

Exercice 15

Factorisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \triangleright A &= 48x^2 - 3 \\
 &= 3(16x^2 - 1) \\
 &= 3((4x)^2 - (1)^2) \\
 &= 3(4x - 1)(4x + 1)
 \end{aligned}$$

Donc: $A = 3(4x - 1)(4x + 1)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright B &= (x + 1)^3 - (x - 1)^3 \\
 &= [(x + 1) - (x - 1)][(x + 1)^2 + (x + 1)(x - 1) + (x - 1)^2] \\
 &= (x + 1 - x + 1)(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1) \\
 &= 2(3x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Donc $B = 2(3x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright C &= (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2 \\
 &= ((x^2 - 9) - (x + 3))((x^2 - 9) + (x + 3)) \\
 &= [(x - 3)(x + 3) - (x + 3)][(x + 3)(x - 3 + 1)] \\
 &= (x + 3)(x - 4)(x + 3)(x - 2) \\
 &= (x + 3)^2(x - 4)(x - 2)
 \end{aligned}$$

Donc $C = (x + 3)^2(x - 4)(x - 2)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright D &= x^4 - 6x^2 + 9 \\
 &= (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 3 + (3)^2 \\
 &= (x^2 - 3)^2 = ((x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}))^2 \\
 &= (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2
 \end{aligned}$$

Donc $D = (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2$

Factorisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= x^5 + x^3 - x^2 - 1 \\
 &= (x^5 - x^2) + (x^3 - 1) \\
 &= x^2(x^3 - 1) + (x^3 - 1) \\
 &= (x^3 - 1)(x^2 + 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Donc $A = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}
 B &= x^{12} - 2x^6 + 1 \\
 &= (x^6)^2 - 2x^6 \times 1 + (1)^2 \\
 &= (x^6 - 1)^2 \\
 &= ((x^3)^2 - 1)^2 \\
 &= ((x^3 - 1)(x^3 + 1))^2 \\
 &= [(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)]^2 \\
 &= (x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2
 \end{aligned}$$

Donc : $B = (x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$

$$\begin{aligned}
 C &= x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \\
 &= x^3 + 1 - 7x^2 + 7 + 7x + 7 \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x^2 - 1) + 7(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x - 1)(x + 1) + 7(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1 - 7(x - 1) + 7) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1 - 7x + 7 + 7) \\
 &= (x + 1)(x^2 - 8x + 15)
 \end{aligned}$$

Puisque : $x^2 - 8x + 15 = x^2 - 8x + 16 - 1$

$$\begin{aligned}
 &= (x - 4)^2 - 1 \\
 &= (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) \\
 &= (x - 5)(x - 3)
 \end{aligned}$$

Alors : $C = (x + 1)(x - 5)(x - 3)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright D &= x^3 + 27 + 7(x + 3) + 11(x^2 + 3x) \\
 &= x^3 + (3)^2 + 7(x + 3) + 11x(x + 3) \\
 &= (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 7(x + 3) + 11x(x + 3) \\
 &= (x + 3)[(x^2 - 3x + 9) + 7 + 11x] \\
 &= (x + 3)(x^2 - 3x + 9 + 7 + 11x) \\
 &= (x + 3)(x^2 + 8x + 16)
 \end{aligned}$$

Puisque : $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + (4)^2$
 $= (x + 4)^2$

Alors : $D = (x + 3)(x + 4)^2$

Exercice 17

Factorisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \triangleright A &= (xy - 7x)(xy + 7y) - (5x + 35)(2y - 14) \\
 &= x(y - 7) \cdot y(x + 7) - 5(x + 7)2(y - 7) \\
 &= (x + 7)(y - 7)xy - (x + 7)(y - 7) \times 10 \\
 &= (x + 7)(y - 7)(xy - 10)
 \end{aligned}$$

Donc : $A = (x + 7)(y - 7)(xy - 10)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright B &= x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 \\
 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 + x^4 + x^2y^2 + y^4 \\
 &= (x^2 - y^2)((x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2) + (x^4 + x^2y^2 + y^4) \\
 &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2 + y^4) \\
 &= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Donc : $B = (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1)$

$$\begin{aligned}
 \triangleright C &= xyz + 2yz - 2xy - 4y \\
 &= yz(x + 2) - 2y(x + 2) \\
 &= (x + 2)(yz - 2y) \\
 &= (x + 2)y(z - 2) \\
 &= y(x + 2)(z - 2)
 \end{aligned}$$

Donc : $C = y(x + 2)(z - 2)$

$$\begin{aligned}
 D &= xy + 3x + yz + 3z \\
 &= xy + yz + 3x + 3z \\
 &= y(x + z) + 3(x + z) \\
 &= (x + z)(y + 3)
 \end{aligned}$$

Donc: $D = (x + z)(y + 3)$

Exercices de synthèse

Exercice 18

On pose : $a = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$ et $A = a + b$
et $B = a - b$

- 1 Montrer que : $ab = 1$
- 2 Calculer A^2 et B^2 et en déduire A et B
- 3 Donner une écriture simple de a et de b .

Exercice 19

x et y sont deux nombres réels tels que : $x^2 + y^2 = 5$ et $x + y = 2\sqrt{2}$

- 1 Montrer que : $xy = \frac{3}{2}$
- 2 Calculer $x^3 + y^3$ puis $x^4 + y^4$

Exercice 20

On considère les deux nombres A et B tels que:

$$A = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ et } B = \sqrt{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

- 1 Calculer AB et $A^2 + B^2$
- 2 En déduire la valeur du nombre : $(A^3 + B^3)\sqrt{1 + \sqrt{2}}$
- 3 Calculer: $\frac{A}{B} + \frac{B}{A}$

Exercice 21

(Les questions 1) et 2) et 3) sont indépendantes) x et y sont deux réels non nuls .

- 1 Calculer $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y}$ sachant que : $6x^2y = x^2 + 2y$

2 On suppose que : $\frac{x-2}{y} = \frac{y-2}{x}$ et $x \neq y$

Montrer que : $x + y - 2 = 0$

3 On suppose que : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{2}$ où $x > 0$ et $y > 0$

Montrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 6$

Exercice 22

Factoriser les expressions suivantes.

1 $a = 27x^3 + 8y^3$

2 $b = xy + 3z + yz + 3x$

3 $c = xy + y + x^2 - 1$

4 $d = x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) + 6 - 3x$

5 $e = x^2 - 3x + 2$

6 $f = 27x^3 - 1 - (3x - 1)(8x^2 + x)$

7 $g = x^3 + 8 - (x + 2)(5 - 2x)$

$x^3 + 64 - 4x(x + 4)$

Exercice 23

Simplifier les écritures suivantes :

$X = \frac{2^x \times 7^{2m-2} \times 3^{2x-1} \times 24}{3^{2x} \times 2^{x+2} \times 7^{2m-3}}$ où $x \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

$Y = \frac{5^{2n-1} \times (11)^{3n-1}}{5^{n-3} \times (11)^{3n+1} \times 5^{n+2}}$ où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 24

a et b deux nombres réels tels que $a > b$

Calculer en fonction de a et b :

$A = (\sqrt{ab} - \sqrt{a+ab})(\sqrt{ab} + \sqrt{a+ab})$

$B = (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a-b})$

Exercice 25

Factoriser les expressions suivantes :

1 $a = \frac{25}{4}(x+3)^2 - 9\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$

2 $b = (2x+1)^2 - (5x-2)^2 - 14x + 2$

3 $c = x^2 + 9x + 20$

4 $d = x^2 + \sqrt{2}x - 4$

Exercice 26

Soit x et y deux nombres réels tel que : $x^2 + y^2 = 1$

1 Calculer : $E = \frac{x^2 - x^4}{y^4 - y^2}$ et $F = 2 + x^3 - x + xy^2$

2 a. Vérifier que : $x^4 + y^4 = 1 - 2x^2y^2$

b. Factoriser $a^6 + b^6$ puis déduire la valeur du nombre :

$$x^6 + y^6 + x^4 + y^4 + 5x^2y^2$$

Exercice 27

On pose $c = \frac{\sqrt{13}+1}{2}$

1 Vérifier que : $c^2 - c = 3$ et déduire que : $c = 1 + \frac{3}{c}$

2 En déduire une simplification des nombres A et B tel que :

$$A = 1 + \frac{3}{1 + \frac{3}{\frac{\sqrt{13}+1}{2}}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{13}+1}{2}}}$$

Exercice 28

1 On pose $A = 3^{n+1} - 3^n + 3^{n+2}$ où $n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\frac{A^2}{3^{2n}} = 121$

2 Montrer que : $\frac{2^{2n} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3}}{2^{n+1} + 2^{n+3} + 2^{n+4}} = 2^{n-1}$

Exercice 29

On pose : $X = \sqrt{6 - \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}}$ et $Y = \sqrt{6 + \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}}$

1 Vérifier que : $XY = 3 + \sqrt{5}$

2 Développer et simplifier $(X - Y)^2$

et déduire une écriture simple du nombre $X - Y$

3 Calculer : $\frac{X\sqrt{Y} + Y\sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

Exercice 30

1 a. Développer et simplifier : $(\sqrt{2} - 1)^2$ et $(2 + \sqrt{3})^2$

b. En déduire une écriture simple du nombre :

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3}$$

c. Développer et simplifier le nombre B et tel que :

$$B = (3 + \sqrt{2})\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - (3 - \sqrt{2})\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$$

2 Soit x et y deux nombres réels positifs .

a. Développer et simplifier le nombre : $(x + y - \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

b. Écrire le nombre $5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ sous la forme :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) \text{ où } a \neq 1 \text{ et } b \neq 1$$

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1 Vérifier que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

2 En déduire la valeur du nombre :

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} + \dots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20 \times 21} + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}$$

Écrire ce nombre sous forme de fraction irréductible .

Exercice 18

1 Montrons que $ab = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a : } ab &= \sqrt{17+12\sqrt{2}} \times \sqrt{17-12\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{(17)^2 - (12\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{289 - 288} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Donc : $ab = 1$

2 Calculons A^2 et B^2

$$\begin{aligned} \text{On a : } A^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (\sqrt{17+12\sqrt{2}})^2 + 2 \times 1 + (\sqrt{17-12\sqrt{2}})^2 \\ &= 17 + 12\sqrt{2} + 2 + 17 - 12\sqrt{2} \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } B^2 &= (a-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 17 + 12\sqrt{2} - 2 \times 1 + 17 - 12\sqrt{2} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Donc : $A^2 = 36$ et $B^2 = 32$

En déduire A et B .

Puisque $A = a+b$ et $B = a-b$

de plus : $a > 0$ et $b > 0$ et $a > b$

alors : $A > 0$ et $B > 0$

Donc : $A = 6$ et $B = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

3 Donnons une écriture simple de a et de b .

$$\text{On a : } \begin{cases} A = 6 \\ B = 4\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{C'est-à-dire : } \begin{cases} a+b = 6 & (1) \\ a-b = 4\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} 2a = 6 + 4\sqrt{2} & ((1) + (2)) \\ 2b = 6 - 4\sqrt{2} & ((1) - (2)) \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \\ b = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Exercice 19

1 Montrons que : $xy = \frac{3}{2}$

$$\text{On a : } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

$$\text{C'est-à-dire : } (2\sqrt{2})^2 = 5 + 2xy \left(\begin{array}{l} \text{Car : } x + y = 2\sqrt{2} \\ \text{et } x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right)$$

$$\text{d'où : } 8 = 5 + 2xy$$

$$\text{Donc : } xy = \frac{8 - 5}{2} = \frac{3}{2}$$

2 Calculons $x^3 + y^3$

$$\text{On a : } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (\text{Identité remarquable})$$

$$= 2\sqrt{2} \left(5 - \frac{3}{2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{7}{2} \right)$$

$$= 7\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } x^3 + y^3 = 7\sqrt{2}$$

► Calculons $x^4 + y^4$

$$\text{On a : } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$$

$$= (5)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 25 - \frac{9}{2} = \frac{41}{2}$$

$$\text{Donc : } x^4 + y^4 = \frac{41}{2}$$

Exercice 20

1 Calculons AB et $A^2 + B^2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } AB &= (\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1})(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}) \\ &= (\sqrt{\sqrt{2}+1})^2 - (\sqrt{\sqrt{2}-1})^2 \\ &= (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) \\ &= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc : $AB = 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } A^2 + B^2 &= (\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1})^2 + (\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1})^2 \\ &= (\sqrt{\sqrt{2}+1})^2 + 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} + (\sqrt{\sqrt{2}-1})^2 + \\ &\quad (\sqrt{\sqrt{2}+1})^2 - 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} + (\sqrt{\sqrt{2}-1})^2 \\ &= \sqrt{2}+1 + 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}+1 - \\ &\quad 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{2}-1 \\ &= 4\sqrt{2}+2-2 = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $A^2 + B^2 = 4\sqrt{2}$

2 En déduire la valeur de : $(A^3 + B^3)\sqrt{1+\sqrt{2}}$

$$\text{On a : } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) = 2\sqrt{\sqrt{2}+1}(4\sqrt{2} - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (A^3 + B^3)\sqrt{1+\sqrt{2}} &= 2\sqrt{\sqrt{2}+1}(4\sqrt{2} - 2)\sqrt{1+\sqrt{2}} \\ &= 2(\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2} - 2) \\ &= (2\sqrt{2}+2)(4\sqrt{2} - 2) \\ &= 16 - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4 \\ &= 12 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

3 Calculons $\frac{A}{B} + \frac{B}{A}$

$$\text{On a : } \frac{A}{B} + \frac{B}{A} = \frac{A^2 + B^2}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Donc : $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} = 2\sqrt{2}$

Exercice 21

1 Calculons $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y}$ sachant que : $6x^2y = x^2 + 2y$

$$\text{on a : } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y} = \frac{2y + x^2}{2x^2y}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y} = \frac{6x^2y}{2x^2y} \quad (\text{D'après l'énoncé})$$

$$= 3$$

2 On suppose que: $\frac{x-2}{y} = \frac{y-2}{x}$ et $x \neq y$

Montrons que : $x + y - 2 = 0$

On a : $\frac{x-2}{y} = \frac{y-2}{x}$ signifie que $x(x-2) = y(y-2)$

signifie que $x^2 - 2x = y^2 - 2y$

signifie que $x^2 - 2x + 1 = y^2 - 2y + 1$

signifie que $(x-1)^2 - (y-1)^2 = 0$

signifie que $((x-1) + (y-1))((x-1) - (y-1)) = 0$

signifie que $(x+y-2)(x-y) = 0$

signifie que $x + y - 2 = 0$ ou $x - y = 0$

Puisque $x \neq y$ alors $x + y - 2 = 0$

3 On suppose que : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{2}$ avec $x > 0$ et $y > 0$

On a : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{2}$ donc $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire : $\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 8$

C'est-à-dire : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = 8$

Donc : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 6$

Exercice 22

Factorisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad a &= 27x^3 + 8y^3 \\ &= (3x)^3 + (2y)^3 \\ &= (3x + 2y)((3x)^2 - (3x)(2y) + (2y)^2) \\ &= (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad b &= xy + 3z + yz + 3x \\ &= xy + yz + 3z + 3x \\ &= y(x + z) + 3(x + z) \\ &= (x + z)(y + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad c &= xy + y + x^2 - 1 \\ &= y(x+1) + (x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(y+x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad d &= x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) + 6 - 3x \\ &= (x)^3 - (2)^3 + 4(x-2)(x+2) + 3(2-x) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 4(x-2)(x+2) - 3(x-2) \\ &= (x-2)((x^2 + 2x + 4) + 4(x+2) - 3) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4 + 4x + 8 - 3) \\ &= (x-2)(x^2 + 6x + 9) \\ &= (x-2)(x+3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad e &= x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2 - 1 - 3x + 2 + 1 \\ &= (x^2 - 1) - 3x + 3 \\ &= (x-1)(x+1) - 3(x-1) \\ &= (x-1)(x+1-3) \\ &= (x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad f &= 27x^3 - 1 - (3x-1)(8x^2 + x) \\ &= (3x)^3 - (1)^3 - (3x-1)(8x^2 + x) \\ &= (3x-1)((3x)^2 + 3x + 1) - (3x-1)(8x^2 + x) \\ &= (3x-1)[(9x^2 + 3x + 1) - (8x^2 + x)] \\ &= (3x-1)(9x^2 + 3x + 1 - 8x^2 - x) \\ &= (3x-1)(x^2 + 2x + 1) \\ &= (3x-1)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad g &= x^3 + 8 - (x+2)(5-2x) \\ &= (x)^3 + (2)^3 - (x+2)(5-2x) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x+2)(5-2x) \\ &= (x+2)[(x^2 - 2x + 4) - (5-2x)] \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4 - 5 + 2x) \\ &= (x+2)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad h &= x^3 + 64 - 4x(x + 4) \\
 &= (x)^3 + (4)^3 - 4x(x + 4) \\
 &= (x + 4)(x^2 - 4x + 16) - 4x(x + 4) \\
 &= (x + 4)[(x^2 - 4x + 16) - 4x] \\
 &= (x + 4)(x^2 - 8x + 16) \\
 &= (x + 4)(x - 4)^2
 \end{aligned}$$

Exercice 23

Simplifions les écritures suivantes :

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{2^x \times 7^{2m-2} \times 3^{2x-1} \times 24}{3^{2x} \times 2^{x+2} \times 7^{2m-3}} \\
 &= \frac{2^x \times 7^{2m-2} \times 3^{2x-1} \times 2^3 \times 3}{3^{2x} \times 2^{x+2} \times 7^{2m-3}} \\
 &= 2^{x+3-x-2} \times 3^{2x-1+1-2x} \times 7^{2m-2-2m+3} \\
 &= 2^1 \times 3^0 \times 7^1 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{5^{2n-1} \times (11)^{3n-1}}{5^{n-3} \times (11)^{3n+1} \times 5^{n+2}} \\
 &= \frac{5^{2n-1} \times (11)^{3n-1}}{5^{n-3+n+2} \times (11)^{3n+1}} \\
 &= \frac{5^{2n-1} \times (11)^{3n-1}}{5^{2n-1} \times (11)^{3n+1}} \\
 &= (11)^{3n-1-3n-1} \\
 &= (11)^{-2} = \frac{1}{(11)^2} = \frac{1}{121}
 \end{aligned}$$

Exercice 24

► Calculons A :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } A &= (\sqrt{ab} - \sqrt{a+ab})(\sqrt{ab} + \sqrt{a+ab}) \\
 &= (\sqrt{ab})^2 - (\sqrt{a+ab})^2 \\
 &= ab - (a + ab) \\
 &= ab - a - ab \\
 &= -a
 \end{aligned}$$

► Calculons B :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } B &= (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a-b}) \\
 &= [(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{a-b}][(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{a-b}] \\
 &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a-b})^2 \\
 &= (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 - (a-b) \\
 &= a - 2\sqrt{ab} + b - a + b \\
 &= 2b - 2\sqrt{ab} \\
 &= 2(b - \sqrt{ab})
 \end{aligned}$$

Exercice 25

$$\begin{aligned}
 \text{1 } a &= \frac{25}{4}(x+3)^2 - 9\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{5}{2}(x+3)\right)^2 - \left(3\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)^2 \\
 &= \left(\frac{5}{2}(x+3) + 3\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)\left(\frac{5}{2}(x+3) - 3\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{5x+15+3x-3}{2}\right)\left(\frac{5x+15-3x+3}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{8x+12}{2}\right)\left(\frac{2x+18}{2}\right) \\
 &= (4x+6)(x+9) \\
 &= 2(2x+3)(x+9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{2 } b &= (2x+1)^2 - (5x-2)^2 - 14x+2 \\
 &= [(2x+1) - (5x-2)][(2x+1) + (5x-2)] - 14x+2 \\
 &= (2x+1-5x+2)(2x+1+5x-2) - 14x+2 \\
 &= (-3x+3)(7x-1) - 2(7x-1) \\
 &= (7x-1)((-3x+3)-2) \\
 &= (7x-1)(-3x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3 } c &= x^2 + 9x + 20 \\
 &= x^2 + 4x + 5x + 20 \\
 &= x(x+4) + 5(x+4) \\
 &= (x+4)(x+5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4 } d &= x^2 + \sqrt{2}x - 4 \\
 &= x^2 - 2 + \sqrt{2}x - 2 \\
 &= x^2 - (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}x - (\sqrt{2})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\
 &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} + \sqrt{2}) \\
 &= (x - \sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Exercice 26

on a : $x^2 + y^2 = 1$

1 ▶ Calculons E :

$$\text{On a : } E = \frac{x^2 - x^4}{y^4 - y^2} = \frac{x^2(1 - x^2)}{y^2(y^2 - 1)} = \frac{x^2(y^2)}{y^2(-x^2)} \quad (\text{Car } 1 - x^2 = y^2 \text{ et } y^2 - 1 = -x^2)$$

$$\text{donc : } E = \frac{x^2 y^2}{-x^2 y^2} = -1$$

▶ Calculons F :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } F &= 2 + x^3 - x + xy^2 \\
 &= 2 + x(x^2 + y^2) - x \\
 &= 2 + x - x \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } F = 2$$

2 a. Vérifions que : $x^4 + y^4 = 1 - 2x^2y^2$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } 1 - 2x^2y^2 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \quad (\text{Car } x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x^2 + y^2)^2 = 1) \\
 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 \\
 &= x^4 + y^4
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } x^4 + y^4 = 1 - 2x^2y^2$$

b. ▶ Factorisons $a^6 + b^6$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\
 &= (a^2 + b^2)((a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2) \\
 &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)
 \end{aligned}$$

▶ En déduire la valeur de : $x^6 + y^6 + x^4 + y^4 + 5x^2y^2$

On a d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 x^6 + y^6 + x^4 + y^4 + 5x^2y^2 &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 1 - 2x^2y^2 + 5x^2y^2 \\
 &= x^4 + y^4 - x^2y^2 + 1 - 2x^2y^2 + 5x^2y^2 \quad (\text{car } x^2 + y^2 = 1) \\
 &= 1 - 2x^2y^2 - x^2y^2 + 1 - 2x^2y^2 + 5x^2y^2 \\
 &= 1 - 5x^2y^2 + 1 + 5x^2y^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } x^6 + y^6 + x^4 + y^4 + 5x^2y^2 = 2$$

1 ▶ Vérifions que : $c^2 - c = 3$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } c^2 - c &= \left(\frac{\sqrt{13} + 1}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{13} + 1)^2}{4} - \frac{2\sqrt{13} + 2}{4} \\
 &= \frac{13 + 2\sqrt{13} + 1 - 2\sqrt{13} - 2}{4} \\
 &= \frac{12}{4} = 3
 \end{aligned}$$

Donc : $c^2 - c = 3$

▶ Déduisons :

On a : $c^2 - c = 3$ signifie que $c^2 = c + 3$

signifie que $\frac{c^2}{c} = \frac{c}{c} + \frac{3}{c}$ (car $c \neq 0$)

signifie que $c = 1 + \frac{3}{c}$

2 ▶ Simplifions A :

$$\text{On a : } A = 1 + \frac{3}{1 + \frac{\sqrt{13} + 1}{2}} = 1 + \frac{3}{1 + \frac{3}{c}} \quad \left(\text{car } \frac{\sqrt{13} + 1}{2} = c \right)$$

$$= 1 + \frac{3}{c}$$

(car $1 + \frac{3}{c} = c$)

$$= c = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

Donc : $A = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$

▶ Simplifions B :

$$\text{On a : } B = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{13} + 1}{2}}} = \sqrt{3 + \sqrt{3 + c}}$$

puisque : $c^2 - c = 3$ alors $c + 3 = c^2$ d'où $\sqrt{3 + c} = \sqrt{c^2} = c$ (car $c > 0$)

D'où : $B = \sqrt{3 + c} = c = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$

Exercice 28

1 Montrons que : $\frac{A^2}{3^{2n}} = 121$

$$\begin{aligned} \text{On a : } A &= 3^{n+1} - 3^n + 3^{n+2} = 3^n \times 3^1 - 3^n + 3^n \times 3^2 \\ &= 3^n(3 - 1 + 3^2) \\ &= 3^n(2 + 9) \\ &= (11)(3^n) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } A^2 = (11)^2(3^n)^2 = (121) \times (3^{2n})$$

$$\text{Donc : } \frac{A^2}{3^{2n}} = 121$$

2 Montrons que : $\frac{2^{2n} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3}}{2^{n+1} + 2^{n+3} + 2^{n+4}} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{2^{2n} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3}}{2^{n+1} + 2^{n+3} + 2^{n+4}} &= \frac{2^{2n} + 2^{2n} \times 2^2 + 2^{2n} \times 2^3}{2^n \times 2^1 + 2^n \times 2^3 + 2^n \times 2^4} \\ &= \frac{2^{2n}(1 + 2^2 + 2^3)}{2^n(2^1 + 2^3 + 2^4)} \\ &= 2^{2n-n} \times \frac{13}{26} \\ &= 2^n \times \frac{1}{2} \\ &= 2^n \times 2^{-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 29

1 Vérifions que : $XY = 3 + \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } XY &= \sqrt{6 - \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}} \times \sqrt{6 + \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{(6 - \sqrt{22 - 6\sqrt{5}})(6 + \sqrt{22 - 6\sqrt{5}})} \\ &= \sqrt{(6)^2 - (\sqrt{22 - 6\sqrt{5}})^2} \\ &= \sqrt{36 - 22 + 6\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{5})^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} \\ &= 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

2 Développons et simplifions $(X - Y)^2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } (X - Y)^2 &= X^2 + Y^2 - 2XY \\ &= (\sqrt{6 - \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}})^2 + (\sqrt{6 + \sqrt{22 - 6\sqrt{5}}})^2 - 2(3 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (X - Y)^2 &= 6 - \sqrt{22 - 6\sqrt{5}} + 6 + \sqrt{22 - 6\sqrt{5}} - 6 - 2\sqrt{5} \\
 &= 6 - 2\sqrt{5} = 5 + 1 - 2\sqrt{5} \\
 &= (\sqrt{5})^2 + (1)^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} \\
 &= (\sqrt{5} - 1)^2
 \end{aligned}$$

D'après l'écriture de X et de Y on remarque que : $X < Y$

c'est-à-dire : $X - Y < 0$

Puisque : $(X - Y)^2 = (\sqrt{5} - 1)^2$ alors $X - Y = 1 - \sqrt{5}$

3 Calculons : $\frac{X\sqrt{Y} + Y\sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \frac{X\sqrt{Y} + Y\sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} &= \frac{(\sqrt{X})^2 \sqrt{Y} + (\sqrt{Y})^2 \sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} \\
 &= \frac{\sqrt{X} \sqrt{Y} (\sqrt{X} + \sqrt{Y})}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} \\
 &= \sqrt{X} \cdot \sqrt{Y} \\
 &= \sqrt{XY}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } \frac{X\sqrt{Y} + Y\sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} &= \sqrt{XY} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} \\
 &= \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} \\
 &= \sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} \\
 &= \sqrt{(3)^2 - (\sqrt{5})^2} \\
 &= \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2
 \end{aligned}$$

Donc : $\frac{X\sqrt{Y} + Y\sqrt{X}}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}} = 2$

Exercice 30

1 a. Développons et simplifions $(\sqrt{2} - 1)^2$ et $(2 + \sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } (\sqrt{2} - 1)^2 &= (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 \\
 &= 2 - 2\sqrt{2} + 1 \\
 &= 3 - 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } (2 + \sqrt{3})^2 &= (2)^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\
 &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\
 &= 7 + 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

b. Dédudisons :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } A &= \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3} \\
 &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{3} \\
 &= 2 + \sqrt{3} + 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{3} \\
 &= 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{3} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Donc $A = 2\sqrt{2}$

c. Développons et simplifions le nombre B .

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } 11 - 6\sqrt{2} &= 9 + 2 - 2 \times 3\sqrt{2} \\
 &= (3)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \\
 &= (3 - \sqrt{2})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } B &= (3 + \sqrt{2})\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - (3 - \sqrt{2})\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \\
 &= (3 + \sqrt{2})\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - (3 - \sqrt{2})\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} \\
 &= (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) - (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc $B = 0$

2 a. Développons et simplifions : $(x + y - \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } (x + y - \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) &= x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\
 &= x\sqrt{x} + y\sqrt{y}
 \end{aligned}$$

b. Ecrivons le nombre $5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ sous la $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d})$

D'après la question précédente on a : $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (x + y - \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } 5\sqrt{5} + 2\sqrt{2} &= (5 + 2 - \sqrt{5 \times 2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \\
 &= (7 - \sqrt{10})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \\
 &= (\sqrt{49} - \sqrt{10})(\sqrt{5} + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Exercice 31

1 Vérifions que : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) &= \frac{1}{3} \left(\frac{(n+3) - (n)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
 &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

Donc :
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

2 Calculons la somme suivante S telle que :

$$S = \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} + \dots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20 \times 21} + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}$$

D'après la question précédente on a :

On a :
$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} \right)$$

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} \right)$$

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15} \right)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{1}{18 \times 19 \times 20 \times 21} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{18 \times 19 \times 20} - \frac{1}{19 \times 20 \times 21} \right)$$

$$\frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{19 \times 20 \times 21} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right)$$

D'où : En additionnant membre à membre ces égalités on a :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} \right) + \left(\frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} \right) + \dots + \left(\frac{1}{18 \times 19 \times 20} - \frac{1}{19 \times 20 \times 21} \right) + \left(\frac{1}{19 \times 20 \times 21} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} + \frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15} + \dots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20} - \frac{1}{19 \times 20 \times 21} + \frac{1}{19 \times 20 \times 21} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 3} - \frac{1}{2^2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3 \times 3 \times 5 \times 11} - \frac{1}{2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 7} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{7}{2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 7} - \frac{1}{2^3 \times 3 \times 5 \times 11} \right) \\ &= \frac{2}{2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} - \frac{1}{2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{1}{4620} \end{aligned}$$

1 Ordre et opérations

Définition:

Soit a et b deux réels.

- 1 $a \leq b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}^+$
- 2 $a \geq b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^+$
- 3 $a < b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}^{++}$
- 4 $a > b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^{++}$

Remarques:

Soit a et b deux réels

- 1 $a \leq b$ équivaut à $a < b$ ou $a = b$.
- 2 Si $a < b$ alors $a \leq b$.
- 3 Comparer a et b signifie trouver l'une des expressions suivantes : $a > b$ ou $a < b$ ou $a = b$.

Propriété:

Soit a, b, c et d des réels.

- 1 $a \leq a$
- 2 Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ (transitivité).
- 3 Si $a \leq b$ et $b < c$ alors $a < c$.
- 4 Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.
- 5 Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \geq 0$ et $a + b \geq 0$
- 6 Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$ alors $ab \geq 0$ et $a + b \leq 0$
- 7 Si $a \leq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \leq 0$.
- 8 Ordre et addition:
 - ▶ Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
 - ▶ Si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$.
 - ▶ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
 - ▶ Si $a \leq b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

9 Ordre et multiplication:

» Si $c > 0$ alors $(a \leq b \text{ équivaut à } ac \leq bc)$.

» Si $c < 0$ alors $(a \leq b \text{ équivaut à } ac \geq bc)$.

» Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

10 Ordre et inverse:

Soit a et b deux réels non nuls de même signe ($ab > 0$).

$a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

11 Ordre et carré:

» Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$.

» Si $0 \leq b \leq a$ alors $a^2 \geq b^2$.

12 Ordre et racine carrée:

» Si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Exercices

Exercice 1

1 Comparer les deux nombres $a = \sqrt{12}$ et $b = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2$.

2 Comparer les deux nombres $a = \sqrt{2}$ et $b = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

1 Comparer les deux nombres $a = \frac{2n}{2n-1}$ et $b = \frac{2n+1}{2n}$.

2 Comparer les deux nombres $a = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $b = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 3

1 Soit a un réel positif.

Comparer les nombres $\frac{a+1}{a+2}$ et $\frac{a+2}{a+3}$.

2 En déduire que : $\frac{18,2}{18,3} > \frac{18,1}{18,3}$

Exercice 4

Soit a et b deux réels strictement positifs et distincts.

Comparer les nombres A et B en étudiant le signe de $A - B$ dans les cas suivants.

1 $A = \frac{a+b}{b}$ et $B = \frac{4a}{a+b}$.

2 $A = (a+1)(b+1)$ et $B = ab+1$.

3 $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $B = \frac{2}{a+b}$.

Exercice 5

Soit x un réel strictement positif.

Comparer les réels A et B dans les cas suivants:

1 $A = \frac{3}{2}$ et $B = \frac{x}{2x+1}$.

2 $A = \frac{8}{x}$ et $B = \frac{7}{x+3}$.

3 $A = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $B = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

4 $A = \frac{5+x}{3+x}$ et $B = \frac{5}{3}$.

Exercice 6

1 Soit a un réel tel que : $1 < a < 2$.

Montrer que : $3 < \frac{12}{5-a} < 4$.

2 Soit a et b deux réels tels que : $2 \leq a \leq 5$ et $3 \leq b \leq 8$.

Montrer que : $2 \leq \sqrt{(a-1)(b+1)} \leq 6$.

Exercice 7

1 Soit a un réel tel que : $0 < a < 1$.

Montrer que : $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a}$.

2 Soit a un réel tel que : $a > 1$.

Montrer que : $a^3 > a^2 > a > \sqrt{a}$.

Exercice 8

Soit a et b deux réels positifs.

1 Montrer que : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2 En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+ : 0 < \sqrt{x+4} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$.

Exercice 9

1 Montrer que si x est un réel tel que : $x > 100$ alors $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 0,9$.

2 Montrer que si x est un réel tel que : $x > 1000$ alors $-\frac{1}{999} < \frac{1}{1-x} < 0$.

Exercice 10

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2 En déduire que pour tous a, b et c de $\mathbb{R}^+$:

a. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

b. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 11

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On pose : $m = \frac{a+b}{2}$ et $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ et $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

On dit que : m est la moyenne arithmétique de a et b ,

g est la moyenne géométrique de a et b ,

h est la moyenne harmonique de a et b .

q est la moyenne quadratique de a et b .

Montrer que : $h \leq g \leq m \leq q$

1

Comparons a et b dans les cas suivants:

1 $a = \sqrt{12}$ et $b = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } b - a &= \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{12} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{12} + \sqrt{2} - 2 \\ &= \sqrt{6}(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) \\ &= (1 - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

On a $2 > 1$ donc $\sqrt{2} > 1$ Ainsi $1 - \sqrt{2} < 0$.

Par suite $b - a < 0$ c'est-à-dire $b < a$

Conclusion : $b < a$

2 $a = \sqrt{2}$ et $b = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } b - a &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3} - \sqrt{2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}\sqrt{2})}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{6})}{3} \end{aligned}$$

et on a $(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$

comme $\sqrt{3} > 1$ alors $2\sqrt{3} > 2$

donc $4 + 2\sqrt{3} > 6$

et par suite $(\sqrt{3} + 1)^2 > 6$

et donc $\sqrt{3} + 1 > \sqrt{6}$

ainsi $\sqrt{3} + 1 - \sqrt{6} > 0$

d'où $b - a > 0$ c'est-à-dire $b > a$

Conclusion : $b > a$

Comparons a et b dans les cas suivants:

1 $a = \frac{2n}{2n-1}$ et $b = \frac{2n+1}{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $\frac{a}{b} = \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{4n^2}{4n^2-1}$

comme $4n^2-1 < 4n^2$ alors $1 < \frac{4n^2}{4n^2-1}$

donc $1 < \frac{a}{b}$ et $b > 0$

D'où $b < a$

2 $a = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $b = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; $a > 0$

et $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{n+2-(n+1)} = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$; $b > 0$

comme $n+2 > n$ alors $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$

et par suite $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

c'est-à-dire $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Donc $b < a$

info:

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

Exercice 3

1 Comparons $\frac{a+1}{a+2}$ et $\frac{a+2}{a+3}$ où $a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{a+2}{a+3} - \frac{a+1}{a+2} &= \frac{(a+2)^2 - (a+1)(a+3)}{(a+3)(a+2)} \\ &= \frac{(a^2 + 4a + 4) - (a^2 + 4a + 3)}{(a+3)(a+2)} \\ &= \frac{1}{(a+3)(a+2)} \end{aligned}$$

comme $a > 0$ alors $a+3 > 0$ et $a+2 > 0$

donc : $\frac{a+2}{a+3} - \frac{a+1}{a+2} > 0$

Ainsi $\frac{a+2}{a+3} > \frac{a+1}{a+2}$

2 Application : déduisons que $\frac{18,2}{18,3} > \frac{18,1}{18,3}$

$$\text{On a : } \frac{18,2}{18,3} = \frac{182}{183} = \frac{180+2}{180+3}$$

$$\text{et } \frac{18,1}{18,2} = \frac{181}{182} = \frac{180+1}{180+2}$$

$$\text{donc pour } a = 180 \text{ on obtient } \begin{cases} \frac{18,2}{18,3} = \frac{a+2}{a+3} \\ \frac{18,1}{18,2} = \frac{a+1}{a+2} \end{cases}$$

$$\text{D'où d'après 1) : } \frac{18,2}{18,3} > \frac{18,1}{18,2}$$

Exercice 4

Soit a et b deux réels strictement positifs et distincts.

1 Comparons : $A = \frac{a+b}{b}$ et $B = \frac{4a}{a+b}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A - B &= \frac{a+b}{b} - \frac{4a}{a+b} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{b(a+b)} \\ &= \frac{(a-b)^2}{b(a+b)} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } (a-b)^2 > 0, b > 0 \text{ et } a+b > 0$$

$$\text{Donc : } A - B > 0 \text{ c'est-à-dire } A > B$$

2 Comparons : $A = (a+1)(b+1)$ et $B = ab+1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A &= (a+1)(b+1) \\ &= ab + a + b + 1 \\ &= ab + 1 + a + b \\ &= B + a + b \end{aligned}$$

$$\text{comme } a+b > 0 \text{ alors } B + a + b > B$$

$$\text{Par suite } A > B$$

3 Comparons : $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $B = \frac{2}{a+b}$.

$$\text{On a } A - B = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{a+b} = \frac{a+b}{ab} - \frac{2}{a+b}$$

$$\text{donc } A - B = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab(a+b)} = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}$$

comme $a^2 + b^2 > 0$, $ab > 0$ et $a + b > 0$ alors $A - B > 0$

D'où $A > B$

Exercice 5

Soit x un réel strictement positif

Comparons les deux nombres A et B dans les cas suivants

1 $A = \frac{3}{2}$ et $B = \frac{x}{2x+1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } A - B &= \frac{3}{2} - \frac{x}{2x+1} \\ &= \frac{6x+3-2x}{2(2x+1)} \\ &= \frac{4x+3}{2(2x+1)} \end{aligned}$$

comme $x > 0$ alors $4x+3 > 0$ et $2(2x+1) > 0$

Par suite $A - B > 0$, C'est-à-dire $A > B$

2 $A = \frac{8}{x}$ et $B = \frac{7}{x+3}$

$$\text{On a } A - B = \frac{8}{x} - \frac{7}{x+3} = \frac{8x+24-7x}{x(x+3)}$$

$$\text{donc } A - B = \frac{x+24}{x(x+3)}$$

comme $x > 0$ alors $x+24 > 0$ et $x(x+3) > 0$

Par suite $A - B > 0$, Ainsi $A > B$

3 $A = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $B = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\begin{aligned} \text{On a } A - B &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \\ &= \frac{x^2 - (x^2+1)}{x\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

comme $x > 0$ alors $x\sqrt{x^2+1} > 0$

Par suite $A - B < 0$, Donc $A < B$

4 $A = \frac{5+x}{3+x}$ et $B = \frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A - B &= \frac{5+x}{3+x} - \frac{5}{3} \\ &= \frac{3(5+x) - 5(3+x)}{3(x+3)} \\ &= \frac{-2x}{3(x+3)} \end{aligned}$$

comme $x > 0$ alors $-2x < 0$ et $3(x+3) > 0$

Par suite $A - B < 0$, Ainsi $A < B$

Exercice 6

1 soit a un réel tel que $1 < a < 2$.

Montrons que : $3 < \frac{12}{5-a} < 4$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } 1 < a < 2 &\text{ équivaut à } -2 < -a < -1 \\ &\text{équivaut à } 3 < 5-a < 4 \\ &\text{équivaut à } \frac{1}{4} < \frac{1}{5-a} < \frac{1}{3} \\ &\text{équivaut à } \frac{12}{4} < \frac{12}{5-a} < \frac{12}{3} \\ &\text{équivaut à } 3 < \frac{12}{5-a} < 4 \end{aligned}$$

Ainsi $3 < \frac{12}{5-a} < 4$

2 Soit a et b deux réels tels que : $2 \leq a \leq 5$ et $3 \leq b \leq 8$

Montrons que : $2 \leq \sqrt{(a-1)(b+1)} \leq 6$

On a : $2 \leq a \leq 5$ équivaut à $1 \leq a-1 \leq 4$

et $3 \leq b \leq 8$ équivaut à $4 \leq b+1 \leq 9$

donc $1 \times 4 \leq (a-1)(b+1) \leq 4 \times 9$

c'est-à-dire $4 \leq (a-1)(b+1) \leq 36$

et par suite $\sqrt{4} \leq \sqrt{(a-1)(b+1)} \leq \sqrt{36}$

D'où $2 \leq \sqrt{(a-1)(b+1)} \leq 6$

1 Soit a un réel tel que $0 < a < 1$,

Montrons que: $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a}$

On a $a^2 > 0$ et $a < 1$ donc $a^3 < a^2$

de même comme $a > 0$ et $a < 1$ alors $a^2 < a$

d'où $a^3 < a^2 < a$

on a $0 < \sqrt{a} < 1$ et $\sqrt{a} > 0$, donc $0 < \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}$

c'est-à-dire $0 < a < \sqrt{a}$

Par suite $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a}$

2 Soit un a réel tel que $a > 1$,

Montrons que: $a^3 > a^2 > a > \sqrt{a}$

On a $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$

comme $a > 1$ et $a^2 > 0$ alors $a^2(a - 1) > 0$ c'est-à-dire $a^3 - a^2 > 0$

donc $a^3 > a^2$ (1)

de même $a^2 - a = a(a - 1)$, et comme $a > 1$ alors $a - 1 > 0$ et $a > 0$

donc $a^2 - a > 0$ c'est-à-dire $a^2 > a$ (2)

d'autre part $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$

comme $a > 1$ alors $\sqrt{a} > 1$

ainsi $\sqrt{a} - 1 > 0$ et $\sqrt{a} > 0$

d'où $a - \sqrt{a} > 0$ c'est-à-dire $a > \sqrt{a}$ (3)

De (1), (2) et (3) on en déduit que : $a^3 > a^2 > a > \sqrt{a}$

Exercice 8

1 Soit a et b deux réels positifs

Montrons que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

On a : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

et $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

comme $2\sqrt{ab} \geq 0$ alors $a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b$

donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$

et par suite $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

C'est-à-dire $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2 Soit $x \in \mathbb{R}^+$

Montrons que : $0 < \sqrt{x+4} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$.

On a : $\sqrt{x+4} = \sqrt{(x+1)+3}$

donc d'après 1) avec $a = x+1$ et $b = 3$

on a $\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{3}$

et par suite $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$

d'autre part on a $x+4 > x+1 > 0$, donc $\sqrt{x+4} > \sqrt{x+1}$

et par suite $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1} > 0$

Ainsi $0 < \sqrt{x+4} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$

infos:

si $x \geq 0$ et $y \geq 0$

alors $x^2 \leq y^2$ équivaut

à $x \leq y$

Exercice 9

1 Soit x un réel tel que $x > 100$

Montrons que : $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 0,9$.

On a : $x > 100$ équivaut à $\frac{1}{x} < \frac{1}{100}$

équivaut à $\frac{-2}{x} > \frac{-2}{100}$

équivaut à $1 - \frac{2}{x} > 1 - \frac{2}{100}$

équivaut à $1 - \frac{2}{x} > \frac{98}{100}$

équivaut à $1 - \frac{2}{x} > 0,98$

et comme $0,98 > 0,9$ alors $1 - \frac{2}{x} > 0,9$

et comme $\frac{3}{x^2} > 0$ alors $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 1 - \frac{2}{x}$

Par suite $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 0,9$

2 Soit x un réel tel que $x > 1000$

Montrons que : $\frac{-1}{999} < \frac{1}{1-x} < 0$.

infos:

si $a > b$ et $b > c$

alors $a > c$

On a : $x > 1000$ équivant à x

$$\text{équivant à } 0 < \frac{1}{x-1} < \frac{1}{999}$$

$$\text{équivant à } \frac{-1}{999} < \frac{1}{1-x} < 0$$

Donc si $x > 1000$ alors $-\frac{1}{999} < \frac{1}{1-x} < 0$

Exercice 10

1 Soit $x \in \mathbb{R}^+$

Montrons que : $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$$\text{On a : } x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

comme $(x-1)^2 \geq 0$ et $x > 0$

$$\text{alors } \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ c'est-à-dire } x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\text{ainsi } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2 Soit a, b et c des réels strictement positifs

$$\begin{aligned} \text{a. On a : } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

d'après 1) pour $x = \frac{a}{b}$

$$\text{on obtient } \frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} \geq 2$$

$$\text{ainsi } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\text{d'où } 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 4$$

$$\text{C'est-à-dire } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

$$\begin{aligned} \text{b. On a } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

On a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ et $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

(d'après $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$)

d'où $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2$

C'est-à-dire $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Exercice 11

Soit a et b deux réels strictement positifs

► Montrons que $g \leq m$ où $g = \sqrt{ab}$ et $m = \frac{a+b}{2}$

On a : $m - g = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$

donc $m - g = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$

comme $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ alors $m - g \geq 0$

ainsi $m \geq g$

Conclusion pour tout $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

► Montrons que $h \leq g$, c'est-à-dire : $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

d'après (1) on a : $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}$

d'où $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}}$

Ainsi $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$

► Montrons que $m \leq q$, c'est-à-dire : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

On a : $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$
 $= \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4}$
 $= \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$

comme $(a-b)^2 \geq 0$ alors $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

info:

si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors

$x^2 \geq y^2$ équivaut à $x \geq y$

et on a $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq 0$ et $\frac{a+b}{2} \geq 0$

d'où $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

Ainsi pour tout $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

2 Encadrement et intervalles

1. Les intervalles

Définition:

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$)

On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $(x; y) \in I$, pour tout $z \in \mathbb{R}$ si $x < z < y$ alors $z \in I$

Ainsi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des intervalles de $\mathbb{R}$.

On a $1 < \sqrt{2} < 2$ Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Les intervalles bornés

Définition:

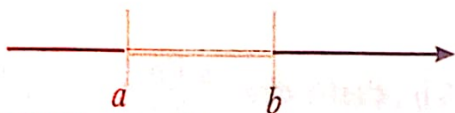
a et b sont deux réels tels que $a < b$.

► L'intervalle fermé $[a; b]$ est l'ensemble de réels x tels que $a \leq x \leq b$



Ainsi $x \in [a; b]$ si et seulement si $a \leq x \leq b$:

► L'intervalle ouvert $]a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$:



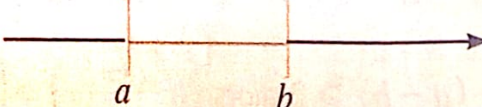
Ainsi $x \in]a; b[$ équivaut à $a < x < b$

► On définit de même les intervalles $[a; b[$ et $]a; b]$

$x \in [a; b[$ équivaut à $a \leq x < b$



$x \in]a; b]$ équivaut à $a < x \leq b$



► Les intervalles non bornés

Définition:

- L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$
- L'intervalle $]-\infty; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leq b$
- $]a; +\infty[$ est l'ensemble des réels tels que $x > a$
- $]-\infty; b[$ est l'ensemble des réels tels que $x < b$

Autrement dit

$x \in [a; +\infty[$ équivaut à $x \geq a$ 

$x \in]a; +\infty[$ équivaut à $x > a$ 

$x \in]-\infty; b]$ équivaut à $x \leq b$ 

$x \in]-\infty; b[$ équivaut à $x < b$ 

Notations :

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[; \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$$

$$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0] ; \mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$$

2. Encadrement d'un nombre réel

Définition:

Soit x un réel

- Encadrer x signifie trouver deux réels a et b tels que : $a \leq x \leq b$ ou $a < x < b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$

Le nombre réel positif $b - a$ est appelé l'amplitude de l'encadrement.

Les réels a et b sont les bornes de l'encadrement.

Exercices

Exercice 12

On considère les deux intervalles :

$$I = \left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right] \text{ et } J = \left]-1; \frac{11}{4}\right]$$

Déterminer les deux ensembles suivants :

$$K = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ et } x \in J\}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ ou } x \in J\}$$

L'ensemble K est noté $I \cap J$ et l'ensemble L est noté $I \cup J$

K est appelé l'intersection des deux intervalles I et J .

L est appelé l'union des deux intervalles I et J .

Exercice 13

A l'aide de la droite numérique déterminer l'intersection et l'union des intervalles I et J dans les cas suivants :

- $I = [-1, 3; 5, 2]$ et $J =]-2, 1; 4, 9[$.
- $I =]\sqrt{2} - 1; \sqrt{3} + 1]$ et $J = [-1; \sqrt{2} + 1[$.
- $I =]\sqrt{n+1} - 1; \sqrt{n+3}]$ et $J = [\sqrt{n+2}; \sqrt{n+1}[$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14

Soit x et y deux réels tels que : $-2 \leq x \leq -1$ et $4 \leq y \leq 5$.

Encadrer les nombres suivants : $x + y$; $x - y$

$$2x + 3y - 6, \frac{2}{x}, x^2 - 1, (y - 1)^2, \sqrt{x + 6}, \frac{x + 3}{y - 1} \text{ et } \frac{y}{x}$$

Exercice 15

Soit a et b deux réels tels que : $-3 \leq a \leq 2$ et $-5 \leq b \leq 3$.

Encadrer les nombres suivants :

$$a - b,$$

$$(b + 6)(a + 4),$$

$$ab \text{ et } 3a - 2b + 17.$$

Exercice 16

Soit x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

$$a. \text{ Développer } (x + y)(x - y + 1).$$

$$b. \text{ En déduire que } \frac{3}{4} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq \frac{35}{4}.$$

Exercice 17

Soit a un réel tel que $-3 \leq a \leq 1$

On pose $A = a^2 + a + 1$

1 Vérifier que: $A - \frac{3}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

et que: $4A = (2a + 1)^2 + 3$

2 En déduire que: $\frac{3}{4} \leq A \leq 7$

Exercice 18

Soit x un réel tel que $2 < x < 7$.

On pose $A = \frac{4x+7}{x+3}$

1 Encadrer A .

2 a. Vérifier que $A = 4 - \frac{5}{x+3}$.

b. En déduire que: $3 < A < 3,5$.

Solutions

Exercice 12

On a: $I = \left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right]$ et $J = \left]-1; \frac{11}{4}\right]$

Il s'agit de déterminer $K = I \cap J$ et $L = I \cup J$

On a $\sqrt{3} > 1$ Donc $-\sqrt{3} < -1$

et on a $\frac{8}{3} < \frac{11}{4}$ (car $32 < 33$)



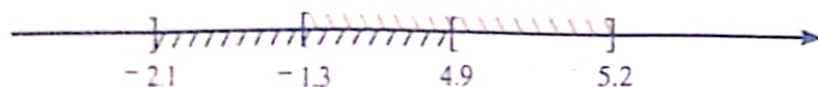
Ainsi $K = I \cap J = \left]-1; \frac{8}{3}\right]$

Et $L = I \cup J = \left[-\sqrt{3}; \frac{11}{4}\right]$

Exercice 13

Même méthode que dans l'exercice 12:

a. $I = [-1, 3; 5, 2]$ et $J =]-2, 1; 4, 9[$

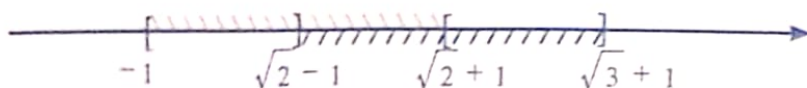


Donc $I \cap J = [-1, 3; 4, 9[$

$I \cup J =]-2, 1; 5, 2]$

b. $I =]\sqrt{2} - 1; \sqrt{3} + 1]$ et $J = [-1; \sqrt{2} + 1[$

On a : $-1 < \sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 1$



Donc $I \cap J =]\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1[$

$I \cup J = [-1; \sqrt{3} + 1]$

c. $I =]\sqrt{n+1} - 1; \sqrt{n+3}]$ et $J = [\sqrt{n+2}; \sqrt{n+1}[$,

On a : $\sqrt{n+1} - 1 < \sqrt{n+1}$ équivaut à $\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + 1$,

or $n+1 < n+2$, d'où $\sqrt{n+1} < \sqrt{n+2}$,

et par suite $\sqrt{n+1} < \sqrt{n+2} + 1$,

ainsi $\sqrt{n+1} - 1 < \sqrt{n+2}$,

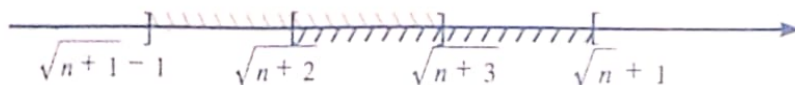
On a : $(\sqrt{n+1})^2 = n+1 + 2\sqrt{n}$

comme $n \geq 1$ alors $2\sqrt{n} \geq 2$,

et par suite $n+1 + 2\sqrt{n} \geq n+3$,

d'où $(\sqrt{n+1})^2 \geq n+3$,

et donc $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+3}$.



D'où $I \cap J = [\sqrt{n+2}; \sqrt{n+3}]$,

et $I \cup J =]\sqrt{n+1} - 1; \sqrt{n+1}[$.

Exercice 14

x et y deux réels tels que $-2 \leq x \leq -1$ et $4 \leq y \leq 5$.

► Encadrement de $x + y$ et $x - y$:

On a : $-2 + 4 \leq x + y \leq -1 + 5$

donc : $2 \leq x + y \leq 4$

et on a : $\begin{cases} -5 \leq -y \leq -4 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $-7 \leq x + (-y) \leq -5$

Ainsi $-7 \leq x - y \leq -5$

► Encadrement de $2x + 3y - 6$:

On a : $-4 \leq 2x \leq -2$

$12 \leq 3y \leq 15$

d'où par somme membre à membre : $8 \leq 2x + 3y \leq 13$

Par suite : $2 \leq 2x + 3y - 6 \leq 7$

► Encadrement de $\frac{2}{x}$ et $x^2 - 1$:

On a : $-2 \leq x \leq -1$

donc $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$

Par suite : $-2 \leq \frac{2}{x} \leq -1$

On a : $1 \leq -x \leq 2$

donc : $1 \leq (-x)^2 \leq 4$

c'est-à-dire $1 \leq x^2 \leq 4$

D'où $0 \leq x^2 - 1 \leq 3$

► Encadrement de $(y - 1)^2$:

On a : $3 \leq y - 1 \leq 4$

Donc $9 \leq (y - 1)^2 \leq 16$

► Encadrement de $\sqrt{x + 6}$:

On a : $-2 \leq x \leq -1$

donc $4 \leq x + 6 \leq 5$

Par suite $2 \leq \sqrt{x + 6} \leq \sqrt{5}$

infos :

si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors
($a \leq x \leq b$ équivaut à
 $a^2 \leq x^2 \leq b^2$)

infos :

si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors
($a \leq x \leq b$ équivaut à
 $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}$)

► Encadrement de $\frac{x+3}{y-1}$:



On a : $-2 \leq x \leq -1$

donc : $1 \leq x+3 \leq 2$

et on a $3 \leq y-1 \leq 4$

donc $\begin{cases} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{y-1} \leq \frac{1}{3} \\ 1 \leq x+3 \leq 2 \end{cases}$

D'où par produit membre à membre on obtient $\frac{1}{4} \leq \frac{x+3}{y-1} \leq \frac{2}{3}$

► Encadrement de $\frac{y}{x}$:

On a : $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x} \leq 1$

et $4 \leq y \leq 5$

d'où par produit membre à membre on

obtient $2 \leq \frac{-y}{x} \leq 5$

Par suite $-5 \leq \frac{y}{x} \leq -2$

infos:

si $\begin{cases} 0 \leq a \leq x \leq b \\ 0 \leq c \leq y \leq d \end{cases}$

alors $ac \leq xy \leq bd$

Exercice 15

Soit a et b deux réels tels que $-3 \leq a \leq 2$ et $-5 \leq b \leq 3$

► Encadrement de $a-b$ et $(a+4)(b+6)$:

On a : $\begin{cases} -3 \leq -b \leq 5 \\ -3 \leq a \leq 2 \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $-6 \leq a-b \leq 7$

On a : $\begin{cases} 1 \leq a+4 \leq 6 \\ 1 \leq b+6 \leq 9 \end{cases}$

D'où par produit membre à membre : $1 \leq (a+4)(b+6) \leq 54$

► Encadrement de ab :

1er cas : si $\begin{cases} -3 \leq a \leq 0 \\ -5 \leq b \leq 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 0 \leq -a \leq 3 \\ 0 \leq -b \leq 5 \end{cases}$

Par suite : $0 \leq ab \leq 15$ (1)

2ème cas: si $\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \\ 0 \leq b \leq 3 \end{cases}$ donc $0 \leq ab \leq 6$ (2)

3ème cas: si $\begin{cases} -3 \leq a \leq 0 \\ 0 \leq b \leq 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 0 \leq -a \leq 3 \\ 0 \leq b \leq 3 \end{cases}$

d'où $0 \leq -ab \leq 9$

Par suite : $-9 \leq ab \leq 0$ (3)

4ème cas: si $\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \\ -5 \leq b \leq 0 \end{cases}$

donc : $\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \\ 0 \leq -b \leq 5 \end{cases}$

d'où $0 \leq -ab \leq 10$

Par suite : $-10 \leq ab \leq 0$ (4)

Donc de (1), (2), (3) et (4) on en déduit que : $-10 \leq ab \leq 15$

► Encadrement de $3a - 2b + 17$:

On a : $\begin{cases} -9 \leq 3a \leq 6 \\ -6 \leq -2b \leq 10 \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $-15 \leq 3a - 2b \leq 16$

par suite : $-15 + 17 \leq 3a - 2b + 17 \leq 16 + 17$

Donc : $2 \leq 3a - 2b + 17 \leq 33$

Exercice 16

Soit x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

a. Développons $(x+y)(x-y+1)$

$$\begin{aligned} \text{On : } (x+y)(x-y+1) &= (x+y)(x-y) + x + y \\ &= x^2 - y^2 + x + y \end{aligned}$$

b. On a : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $1 + \frac{1}{2} \leq x + y \leq 2 + \frac{3}{2}$

ainsi : $\frac{3}{2} \leq x + y \leq \frac{7}{2}$

d'autre part on a : $\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq -y \leq \frac{3}{2} \\ 2 \leq x+1 \leq 3 \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $2 - \frac{3}{2} \leq x - y + 1 \leq 3 - \frac{1}{2}$

c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq x - y + 1 \leq \frac{5}{2}$

On a : $\begin{cases} \frac{3}{2} \leq x + y \leq \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x - y + 1 \leq \frac{5}{2} \end{cases}$

d'où par produit membre à membre : $\frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{35}{4}$

Par suite : $\frac{3}{4} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq \frac{35}{4}$

Exercice 17

a un réel tel que $-3 \leq a \leq 1$

et $A = a^2 + a + 1$

1 On a : $A - \frac{3}{4} = a^2 + a + 1 - \frac{3}{4} = a^2 + a + \frac{1}{4}$

d'où $A - \frac{3}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

et $4A = 4a^2 + 4a + 4$

$= (4a^2 + 4a + 1) + 3$

$= (2a + 1)^2 + 3$

Méthode 1

On a : $-\frac{5}{2} \leq a + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$

d'où $0 \leq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$

ainsi $0 \leq A - \frac{3}{4} \leq \frac{25}{4}$

et par suite $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{28}{4}$

C'est-à-dire $\frac{3}{4} \leq A \leq 7$

Méthode 2

On a : $-3 \leq a \leq 1$

donc $-6 \leq 2a \leq 2$

et par suite $-5 \leq 2a + 1 \leq 3$

d'où $0 \leq (2a + 1)^2 \leq 25$

$3 \leq (2a + 1)^2 + 3 \leq 28$

ainsi $3 \leq 4A \leq 28$

Par suite : $\frac{3}{4} \leq A \leq 7$

Exercice 18

Soit x un réel tel que $2 < x < 7$

On pose $A = \frac{4x+7}{x+3}$

1 Encadrement de A :

On a : $8 \leq 4x \leq 28$ et $5 \leq x+3 \leq 10$

donc $15 \leq 4x+7 \leq 35$ et $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{5}$

et par suite $\frac{15}{10} \leq \frac{4x+7}{x+3} \leq \frac{35}{5}$

Ainsi : $\frac{3}{2} \leq A \leq 7$

2 a. Vérifions que $A = 4 - \frac{5}{x+3}$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } 4 - \frac{5}{x+3} &= \frac{4(x+3) - 5}{x+3} \\ &= \frac{4x + 12 - 5}{x+3} \\ &= \frac{4x + 7}{x+3} \\ &= A \end{aligned}$$

b. Déduisons que $3 < A < 3,5$:

On a : $2 \leq x \leq 7$ équivaut à $5 \leq x+3 \leq 10$

équivaut à $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{5}$

équivaut à $-\frac{5}{5} \leq \frac{-5}{x+3} \leq \frac{-5}{10}$

ainsi $-1 \leq \frac{-5}{x+3} \leq -\frac{1}{2}$

d'où $4 - 1 \leq 4 - \frac{5}{x+3} \leq 4 - \frac{1}{2}$

et par suite $3 \leq A \leq \frac{7}{2}$

C'est-à-dire : $3 \leq A \leq 3,5$

3 La valeur absolue et ses propriétés

Définition:

Soit x un réel.

le réel positif qu'on note $|x|$ défini par :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ si } x \leq 0$$

est appelé valeur absolue de x .

Exemple :

$$\triangleright |-3| = 3 \text{ et } |\pi| = \pi$$

$$\triangleright |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$$

Conséquences:

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on a:

$$1 \quad |x| = 0 \text{ équivaut à } x = 0$$

$$2 \quad |-x| = |x|$$

$$3 \quad |x^2| = |x|^2 = x^2$$

$$4 \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

Propriétés:

Soit x et y deux réels et n un entier non nul.

$$(P_1) \quad |xy| = |x||y|$$

$$(P_2) \quad |x^n| = |x|^n$$

$$(P_3) \text{ si } x \neq 0 \text{ alors } \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} \text{ et } \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{|y|}{|x|}$$

$$(P_4) \quad |x| = |y| \text{ équivaut à } x = y \text{ ou } x = -y$$

$$(P_5) \text{ Si } a \in \mathbb{R}^+ \text{ alors } |x| = a \text{ équivaut à } x = a \text{ ou } x = -a$$

$$(P_6) \text{ Inégalité triangulaire } |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(P_7) \text{ Soit } \alpha \in \mathbb{R}^+ \triangleright |x| \leq \alpha \text{ équivaut à } -\alpha \leq x \leq \alpha$$

$$\triangleright |x| \geq \alpha \text{ équivaut à } x \leq -\alpha \text{ ou } x \geq \alpha$$

$$(P_8) \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

Conséquences :

$$1 \quad |x - y| \leq |x| + |y| ; 2 \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Définition:

Soit x et y deux réels.

La distance entre les deux réels x et y est le réel positif : $|x - y|$.

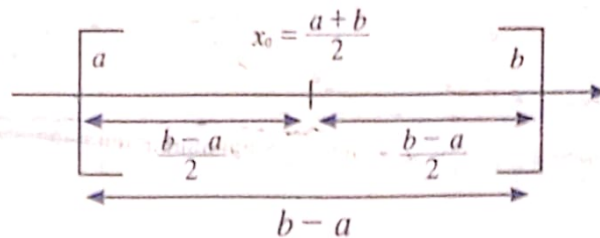
Remarques:

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Le réel $|b - a|$ est appelé la longueur ou l'amplitude de l'intervalle $[a; b]$.

Le réel $x_0 = \frac{a+b}{2}$ est appelé le centre de l'intervalle $[a; b]$.

Le réel $r = \frac{b-a}{2}$ est appelé le rayon de l'intervalle $[a; b]$.



Ainsi :

$$x \in [a; b] \text{ équivaut à } |x - x_0| \leq r$$

$$\text{équivaut à } x \in [x_0 - r; x_0 + r]$$

Exercices

Exercice 19

Écrire sans le symbole de la valeur absolue les nombres suivants:

$$a = |\pi - \sqrt{7}|, b = |4\sqrt{3} - 7|, c = |\sqrt{1+\sqrt{8}} - 3|, d = \left| \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right|$$

Exercice 20

Déterminer l'ensemble auquel appartient le réel x dans les cas suivants :

$$\text{a. } |x - 3| \leq \frac{1}{2} \quad \text{b. } |2x - 1| \geq \frac{3}{4} \quad \text{c. } ||x - 1| - 2| < 1$$

Exercice 21

- 1 Montrer si $|x+y| = |x|+|y|$ alors x et y sont de même signe et étudier la réciproque.
- 2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x+|x| \geq 0$.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $|x-2| = \frac{1}{2}$ b. $|2x-3| = -1$ c. $|2x-3| = x$
- d. $|3x-2| = |x-4|$

Exercice 23

Soit x et y deux réels tels que :

$$x-y=3 \text{ et } y \leq 1 \text{ et } x \geq \frac{1}{2}$$

- 1 Montrer que : $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

- 2 En déduire la valeur du nombre $A = |x+y-5| + |x+y+2|$

Exercice 24

Écrire sans le symbole de la valeur absolue, l'expression :

$$A(x) = |x-1| + |2x-1| \text{ suivant les valeurs de } x.$$

Exercice 25

Montrer que pour tout réel x on a $|x-3| + |x+7| \geq 10$.

Exercice 26

Soit x et y deux réels tels que :

$$|x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y-2| < \frac{1}{2}$$

Montrer que : $1 < \frac{2y}{y-x} < 5$

Exercice 27

On par $I = \left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[$

1 Montrer que si $x \in I$ alors $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$

étudier la réciproque

2 Montrer que pour tout $x \in I$; $\frac{3}{4} < x^2 - x + 1 < \frac{7}{9}$

Solutions

Exercice 19

► $a = |\pi - \sqrt{7}|$:

On a : $7 < 9 < \pi^2$ (car $\pi > 3$)

donc $\sqrt{7} < \pi$ ainsi $\pi - \sqrt{7} > 0$

Par suite : $a = \pi - \sqrt{7}$

► $b = |4\sqrt{3} - 7|$:

On a : $(4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$ et $7^2 = 49$

donc $(4\sqrt{3})^2 < 7^2$

d'où $4\sqrt{3} < 7$

Ainsi : $b = 7 - 4\sqrt{3}$

► $c = |\sqrt{1 + \sqrt{8}} - 3|$:

On a $1 + \sqrt{8} < 9$ (car $\sqrt{8} < 8$)

donc $\sqrt{1 + \sqrt{8}} < 3$

Par suite : $c = 3 - \sqrt{1 + \sqrt{8}}$

► $d = \left| \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right|$ on a $\left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$ et $\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 = \frac{5}{9}$:

On a : $\frac{9}{16} > \frac{5}{9}$ (car $9 \times 9 > 5 \times 16$ c'est-à-dire $81 > 80$)

d'où $\frac{3}{4} > \frac{\sqrt{5}}{3}$

Par suite : $d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{3}$

infos:

$|a - b| = a - b$ Si $a \geq b$

c'est-à-dire $a - b \geq 0$

$|a - b| = b - a$ Si $a \leq b$

c'est-à-dire $a - b \leq 0$

a. On a : $|x - 3| \leq \frac{1}{2}$ équivaut $\frac{1}{2} \leq x - 3 \leq \frac{1}{2}$
 équivaut à $3 - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + 3$
 équivaut à $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$
 équivaut à $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right]$

Ainsi : $|x - 3| \leq \frac{1}{2}$ équivaut à $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right]$

b. On a : $|2x - 1| \geq \frac{3}{4}$ équivaut à $2x - 1 \leq -\frac{3}{4}$ ou $2x - 1 \geq \frac{3}{4}$
 équivaut à $2x \leq 1 - \frac{3}{4}$ ou $2x \geq \frac{3}{4} + 1$
 équivaut à $2x \leq \frac{1}{4}$ ou $2x \geq \frac{7}{4}$
 équivaut à $x \leq \frac{1}{8}$ ou $x \geq \frac{7}{8}$
 équivaut à $x \in \left] -\infty; \frac{1}{8} \right] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty \right[$

Ainsi : $|2x - 1| \geq \frac{3}{4}$ équivaut à $x \in \left] -\infty; \frac{1}{8} \right] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty \right[$

c. On a : $||x - 1| - 2| < 1$ équivaut à $-1 < |x - 1| - 2 < 1$
 équivaut à $-1 + 2 < |x - 1| < 1 + 2$
 équivaut à $1 < |x - 1| < 3$
 équivaut à $-3 < x - 1 < -1$ ou $1 < x - 1 < 3$
 équivaut à $-2 < x < 0$ ou $2 < x < 4$
 équivaut à $x \in]-2; 0[\cup]2; 4[$

Ainsi : $||x - 1| - 2| < 1$ équivaut à $x \in]-2; 0[\cup]2; 4[$

infos:

Si $a > 0$ et $b > 0$

alors $a \leq |x| \leq b$

équivaut à $-b \leq x \leq -a$

ou $a \leq x \leq b$

Exercice 21

1 Soit x et y deux réels, on a:

$$|x + y| = |x| + |y| \quad \text{équivaut à} \quad (x + y)^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$\text{équivaut à} \quad x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$$

$$\text{équivaut à} \quad xy = |xy|$$

$$\text{équivaut à} \quad xy \geq 0$$

$$\text{équivaut à} \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe}$$

Ainsi si $|x + y| = |x| + |y|$ alors x et y sont de même signe et réciproquement (car il y a équivalence).

2 Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $x + |x| \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on va distinguer deux cas:

► Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et $x + |x| = 2x$

$$\text{Donc } |x| + x \geq 0$$

► Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$ et $x + |x| = 0$

$$\text{Donc } x + |x| \geq 0$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x + |x| \geq 0$

Exercice 22

Résolution dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a. $|x - 2| = \frac{1}{2}$ équivaut à $x - 2 = \frac{1}{2}$ ou $x - 2 = -\frac{1}{2}$

$$\text{équivaut à} \quad x = \frac{1}{2} + 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} + 2$$

$$\text{équivaut à} \quad x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right\}$ et l'ensemble des solutions de l'équation $|x - 2| = \frac{1}{2}$

b. $|2x - 3| = -1$ c'est une équation impossible dans $\mathbb{R}$ (car pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $|A| \geq 0$)

c. $|2x - 3| = x$ Donc $x \geq 0$

$$\text{et on a } 2x - 3 = x \text{ ou } 2x - 3 = -x$$

$$\text{et donc } x = 3 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{Ainsi } S = \{3; 1\}$$

d. $|3x - 2| = |x - 4|$ équivaut à $3x - 2 = x - 4$ ou $3x - 2 = -(x - 4)$
 équivaut à $2x = -2$ ou $4x = 6$
 équivaut à $x = -1$ ou $x = \frac{3}{2}$

Ainsi $S = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

Exercice 23

x et y deux réels tels que $\begin{cases} x - y = 3 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ y \leq 1 \end{cases}$

1 Montrons que $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

On a : $x = y + 3$ et comme $x \geq \frac{1}{2}$

alors $y + 3 \geq \frac{1}{2}$ et par suite $y \geq -\frac{5}{2}$

d'autre part on a $y \leq 1$ D'où $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

et on a $y = x - 3$

donc $-\frac{5}{2} \leq x - 3 \leq 1$

d'où $-\frac{5}{2} + 3 \leq x \leq 3 + 1$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

2 Déduisons la valeur du nombre $A = |x + y - 5| + |x + y + 2|$

On a : $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \leq x + y \leq 4 + 1$

c'est-à-dire : $-2 \leq x + y \leq 5$

d'où $x + y + 2 \geq 0$ et $x + y - 5 \leq 0$

ainsi $|x + y + 2| = x + y + 2$ et $|x + y - 5| = -x - y + 5$

et par suite $A = x + y + 2 - x - y + 5 = 7$

C'est-à-dire : $A = 7$

Exercice 24

Soit x un réel, on a :

$$A(x) = |x-1| + |2x-1|$$

Écrivons $A(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

$$\text{On a : } |x-1| = x-1 \quad \text{si } x \geq 1$$

$$|x-1| = -(x-1) \quad \text{si } x \leq 1$$

$$\text{de même } |2x-1| = 2x-1 \quad \text{si } x \geq \frac{1}{2}$$

$$|2x-1| = -(2x-1) \quad \text{si } x \leq \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$ x-1 =$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$ 2x-1 =$	$-2x+1$	$2x-1$	$2x-1$	
$A(x) =$	$-3x+2$	x	$3x-2$	

$$\text{D'où : } A(x) = \begin{cases} -3x+2 & \text{si } x \in]-\infty; \frac{1}{2}] \\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ 3x-2 & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

Exercice 25

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x-3| + |x+7| \geq 10$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } |x-3| + |x+7| \geq |(x+7) - (x-3)|$$

$$\text{c'est-à-dire : } |x-3| + |x+7| \geq |x+7-x+3|$$

$$\text{donc : } |x-3| + |x+7| \geq 10$$

$$\text{Ainsi } |x-3| + |x+7| \geq 10$$

infos

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\geq |x+y| \\ \text{et} \\ |x| + |y| &\geq |x-y| \end{aligned}$$

Exercice 26

Soit x et y deux réels tels que $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y-2| < \frac{1}{2}$

Montrons que $1 < \frac{2y}{y-x} < 5$

On a : $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y-2| < \frac{1}{2}$

donc $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < y-2 < \frac{1}{2}$

ainsi $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2} < y < \frac{5}{2}$

On a : $\begin{cases} \frac{3}{2} < y < \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} < -x < \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où par somme membre à membre : $1 < y-x < 3$

et par suite $\frac{1}{3} < \frac{1}{y-x} < 1$

d'autre par $3 < 2y < 5$

donc par produit membre à membre : $3 \times \frac{1}{3} < 2y \times \frac{1}{y-x} < 1 \times 5$

On obtient : $1 < \frac{2y}{y-x} < 5$

Exercice 27

On a $I = \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$

1 Montrons que si $x \in I$ alors $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$

$x \in I$ équivaut à $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

équivaut à $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

équivaut à $-\frac{1}{6} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{6}$

équivaut à $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$

Ainsi si $x \in I$ alors $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$

et réciproquement (car on a l'équivalence entre $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$ et $x \in I$)

2 Soit $x \in I$

d'après 1) on a : $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{6}$

donc $0 < \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{1}{36}$

c'est-à-dire $0 < x^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{1}{36}$

d'où $\frac{3}{4} < x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} < \frac{1}{36} + \frac{3}{4}$

Ainsi : $\frac{3}{4} < x^2 - x + 1 < \frac{7}{9}$

4 Approximations

Définition 1:

α est un réel strictement positif.

On dit que le nombre A est une approximation du réel x à α près signifie que :

$$A - \alpha \leq x \leq A + \alpha.$$

► Exemple :

On a : $3,1 \leq \pi \leq 3,2$ peut s'écrire :

$$3,15 - 0,05 \leq \pi \leq 3,15 + 0,05$$

Donc 3,15 est une approximation de π à 0,05 près c'est-à-dire à 5×10^{-2} près.

Définition 2:

α est un réel strictement positif.

► On dit que le réel A est une approximation par défaut du réel x à α près signifie que : $A \leq x \leq A + \alpha$.

► On dit que le réel A est une approximation par excès du réel x à α près signifie que : $A - \alpha \leq x \leq A$.

► Exemple :

$$2,23 \leq \sqrt{5} \leq 2,23 + 0,01$$

2,23 est une approximation (valeur approchée) par défaut de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près.

$$0,34 - 0,01 \leq \frac{1}{3} \leq 0,34$$

0,34 est une approximation par excès à 10^{-2} près du réel $\frac{1}{3}$.

Pour tout réel x , il existe un entier relatif unique n tel que $n \leq x < n+1$.
 l'entier relatif n est appelé la partie entière du réel x , on le note $E(x)$ ainsi
 on a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Propriétés:

Si $a \leq x \leq b$ est un encadrement du réel x

Alors :

► a est une valeur approchée par défaut de x à $b - a$ près

$$(a \leq x \leq a + (b - a)).$$

► b est une valeur approchée par excès de x à $b - a$ près

$$(b - (b - a) \leq x \leq b).$$

► $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près

$$\left(\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right).$$

Définitions:

Soit x un réel tels que $N \cdot 10^{-n} \leq x < (N+1) 10^{-n}$

où $N \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

le nombre $N \cdot 10^{-n}$ est appelé une approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut.

le nombre $(N+1) 10^{-n}$ est appelé une approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

Exercices**Exercice 28**

Soit x un réel tel que $1,9 \leq x \leq 2,1$

a. Encadrer le nombre $x - 2$

b. Montrer que $2x - 2$ est une valeur approchée du nombre $a = x^2 - 2x + 2$ à 10^{-2} près.

Exercice 29

1 Soit a un réel positif

Montrer que $\sqrt{a+13} \leq \sqrt{a} + \sqrt{13}$

2 En déduire que pour tout réel a de l'intervalle $]0; 13[$ on a

$$0 < \sqrt{13} - \sqrt{a} \leq \frac{13-a}{\sqrt{a+13}}$$

3 Soit x un réel tel que $12 < x < 13$

Montrer que $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{x}$ à 10^{-1} près.

Exercice 30

1 Vérifier que pour tout réel x ($x \neq 1$) on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

2 Montrer que:

$$\text{Si } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ alors } \left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| \leq 2x$$

3 En déduire une valeur approchée du nombre $\frac{1}{99}$ à 2×10^{-6} près. (on pourra prendre $x = 10^{-2}$).

Solutions

Exercice 28

Soit x un élément de l'intervalle $[1,9; 2,1]$

a. Encadrons le nombre $x - 2$

On a : $1,9 \leq x \leq 2,1$

donc $1,9 - 2 \leq x - 2 \leq 2,1 - 2$

D'où $-0,1 \leq x - 2 \leq 0,1$

b. On a : $a = x^2 - 2x + 2$

et $a - (2x - 2) = x^2 - 2x + 2 - 2x + 2$

$$= x^2 - 4x + 4$$

$$= (x - 2)^2$$

et comme $-0,1 \leq x - 2 \leq 0,1$

alors $|x - 2| \leq 0,1$

D'où $|x - 2|^2 \leq 0,01$

et comme $a - (2x - 2) = (x - 2)^2$
 alors $|a - (2x - 2)| \leq 0,01$
 Ainsi $2x - 2$ est une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

Exercice 29

1 Soit a un réel positif

Montrons que : $\sqrt{a+13} \leq \sqrt{a} + \sqrt{13}$

on a $(\sqrt{a+13})^2 = a+13$ et $(\sqrt{a} + \sqrt{13})^2 = a+13+2\sqrt{a}\sqrt{13}$

comme $2\sqrt{a}\sqrt{13} \geq 0$

$a+13+2\sqrt{a}\sqrt{13} \geq a+13$

Ainsi $(\sqrt{a} + \sqrt{13})^2 \geq (\sqrt{a+13})^2$

et par suite $\sqrt{a} + \sqrt{13} \geq \sqrt{a+13}$

C'est-à-dire : $\sqrt{a+13} \leq \sqrt{a} + \sqrt{13}$

2 Soit a un réel de l'intervalle $]0;13[$

On a : $0 < a < 13$ Donc $0 < \sqrt{a} < \sqrt{13}$

donc $\sqrt{13} - \sqrt{a} > 0$

d'autre par $\sqrt{13} - \sqrt{a} = \frac{13-a}{\sqrt{13} + \sqrt{a}}$

(car : $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$)

et comme $\sqrt{13} + \sqrt{a} > \sqrt{13+a}$ alors $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{13+a}}$

et $13-a > 0$ Donc $\frac{13-a}{\sqrt{13} + \sqrt{a}} < \frac{13-a}{\sqrt{13+a}}$

c'est-à-dire $\sqrt{13} - \sqrt{a} < \frac{13-a}{\sqrt{13+a}}$

Ainsi pour tout $a \in]0;13[$, $0 < \sqrt{13} - \sqrt{a} < \frac{13-a}{\sqrt{13+a}}$

3 Soit x un réel de l'intervalle $]12;13[$

$12 < x < 13$ équivaut à $\sqrt{12} < \sqrt{x} < \sqrt{13}$

équivaut à $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2} < \sqrt{x} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2} < \sqrt{13} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2}$

équivaut à $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{13}}{2} < \sqrt{x} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2} < \frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{2}$

équivaut à $|\sqrt{x} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2}| < \frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{2}$

comme : $0 < \sqrt{13} - \sqrt{a} < \frac{13-a}{\sqrt{a+13}}$ pour tout $a \in]0, 13[$

alors pour $a = 12$ on obtient $0 < \sqrt{13} - \sqrt{12} < \frac{1}{\sqrt{25}}$

c'est-à-dire : $0 < \sqrt{13} - \sqrt{12} < \frac{1}{5}$

et par suite : $0 < \frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{2} < \frac{1}{10}$

d'où : $\left| \sqrt{x} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2} \right| < \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} = 10^{-1} \right)$

Donc : $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{x}$ à 10^{-1} près.

Exercice 30

1 Soit x un réel tel que $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 1 + x + \frac{x^2}{1-x} &= \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} \\ &= \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

2 Soit x un réel tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$\text{On a : } \left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| = \left| \frac{x^2}{1-x} \right|$$

$$\text{comme } -\frac{1}{2} \leq -x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{alors } \frac{1}{2} \leq 1-x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{2}{3} \leq \frac{1}{1-x} \leq 2$$

$$\text{et par suite } \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2$$

$$\text{ainsi } \left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| \leq 2x^2$$

$$\text{D'où : si } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ alors } \left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| \leq 2x^2.$$

3 On a pour : $x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$\text{et } 1+x = 1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$$



$$\text{et } 2x^2 = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{D'où } \left| \frac{100}{99} - \frac{101}{100} \right| \leq 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{et par suite } \left| \frac{1}{99} - \frac{101}{10^4} \right| \leq 2 \cdot 10^{-6}$$

Ainsi : $\frac{101}{10^4} = 0,0101$ et une valeur approchée de $\frac{1}{99}$ à 2×10^{-6} près.

Exercices de synthèse

Exercice 31

- 1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^4 - x^3 + 2 > 0$.
- 2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$
- 3 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \leq 1$.

Exercice 32

- 1 Montrer que pour tout $x \in [4; +\infty[$ on a : $\sqrt{x} - 1 \geq \frac{7}{x + \sqrt{x} + 1}$.
- 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 1[$ comparer : $x^n \sqrt{x+1}$ et $x^{n+1} \sqrt{x}$
- 3 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ montrons que : $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} < 1$

Exercice 33

Soit a et b deux réels tels que $1 < a < b$.

$$\text{On pose : } A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{et } B = \sqrt{a-1} - \sqrt{b-1}$$

- 1 Montrer que : $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
- 2 En déduire que : $0 < \frac{A}{B} < 1$
- 3 Comparer alors A et B
- 4 Comparer les deux nombres $u = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $v = \sqrt{3} - \sqrt{6}$

Exercice 34

Pour tout réel x on pose :

$$A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$$

$$B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$$

- 1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A > 0$ et $B > 2|x|$
- 2 Calculer $A \times B$ et en déduire que : $A < \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
- 3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$
- 4 Donner un encadrement du réel $\frac{\sqrt{122}}{3}$ d'amplitude $\frac{1}{66}$

Exercice 35

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $E(x) \leq x < E(x) + 1$

et $E(x) = p$ équivaut à $p \leq x < p + 1$ et $p \in \mathbb{Z}$.

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(\sqrt{n^2 + 1}) = n$
- 2 Déterminer $E(\sqrt{n^2 + 4n})$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- 3 a. Soit n et p deux entiers.
Montrer que : si $n > p$ alors $n \geq p + 1$ et réciproquement
b. En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
Si $x < y$ alors $E(x) \leq E(y)$
- 4 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x = E(x) + r$
où $r \in [0; 1[$
- 5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$
on a $E(x + p) = E(x) + p$
- 6 Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$
- 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:
 $(E_1) : E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$
 $(E_2) : E(2x) = x - 1$
 $(E_3) : E\left(\frac{1}{x}\right) = 3$

Solutions

Exercice 31

1 Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^4 - x^3 + 2 > 0$

1^{er} cas : Si $x \leq 0$ alors $x^3 \leq 0$

et donc $-x^3 \geq 0$

et comme $x^4 \geq 0$

alors $x^4 - x^3 + 2 \geq 2$

Ainsi $x^4 - x^3 + 2 > 0$

2^{ème} cas : Si $x \geq 1$ alors $x^4 \geq x^3$

et donc $x^4 - x^3 \geq 0$

d'où $x^4 - x^3 + 2 \geq 2$

Ainsi $x^4 - x^3 + 2 > 0$

3^{ème} cas : Si $0 < x < 1$

alors $0 < x^3 < 1 < 2$

donc $2 - x^3 > 0$ et comme $x^4 \geq 0$

Alors $2 - x^3 + x^4 > 0$

Conclusions: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^3 + 2 > 0$

2 Soit x et y deux réels.

Montrons que $x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{x^2 + 1} + y\sqrt{y^2 + 1}$ on a:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + 1) - 2(x\sqrt{x^2 + 1} + y\sqrt{y^2 + 1}) &= x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + y^2 + 1 - 2y\sqrt{y^2 + 1} \\ &= (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 + (\sqrt{y^2 + 1} - y)^2 \end{aligned}$$

On a $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$

or $\sqrt{x^2} = |x|$

d'où $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$ et $|x| \geq x$

et par suite $\sqrt{x^2 + 1} > x$

c'est-à-dire: $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, de même on a: $\sqrt{y^2 + 1} - y > 0$

ainsi $(\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 + (\sqrt{y^2 + 1} - y)^2 > 0$

donc $2(x^2 + y^2 + 1) - 2(x\sqrt{x^2 + 1} + y\sqrt{y^2 + 1}) > 0$

Par suite: $x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{x^2 + 1} + y\sqrt{y^2 + 1}$

Exercice 32

1 Soit $x \in [4; +\infty[$

Montrons que : $\sqrt{x} - 1 \geq \frac{7}{x + \sqrt{x} + 1}$

$$\text{on a : } (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x})^3 - (1)^3 = (\sqrt{x})^3 - 1$$

$$(\text{car } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3)$$

comme $x \geq 4$ alors $\sqrt{x} \geq 2$

$$\text{d'où } (\sqrt{x})^3 \geq 8$$

$$\text{et par suite } (\sqrt{x})^3 - 1 \geq 7$$

$$\text{d'où } (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) \geq 7$$

et comme $x + \sqrt{x} + 1 > 0$

$$\text{Alors : } \sqrt{x} - 1 \geq \frac{7}{x + \sqrt{x} + 1}$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 1[$

Comparons $x^n \sqrt{x+1}$ et $x^{n+1} \sqrt{x}$

$$\text{On a : } x^n \sqrt{x+1} - x^{n+1} \sqrt{x} = x^n (\sqrt{x+1} - x\sqrt{x})$$

$$\text{on a : } 0 < x < 1 \text{ équivaut à } 1 < x+1 < 2$$

$$\text{équivaut à } 1 < \sqrt{x+1} < \sqrt{2}$$

$$\text{et comme } \begin{cases} 0 < \sqrt{x} < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \text{ alors } 0 < x\sqrt{x} < 1$$

$$\text{donc on a } x\sqrt{x} < 1 \text{ et } 1 < \sqrt{x+1}$$

$$\text{d'où } \sqrt{x+1} - x\sqrt{x} > 0$$

$$\text{Par suite : } x^n \sqrt{x+1} > x^{n+1} \sqrt{x}$$

3 Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} = \frac{a+b-1}{ab}$$

$$\text{comme } a \geq 1 \text{ et } b \geq 1 \text{ alors } a+b \geq 2$$

$$\text{et donc } a+b-1 \geq 1 > 0$$

$$\text{d'où } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'autre part on a : } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} - 1 &= \frac{a+b-1-ab}{ab} \\ &= \frac{a-1+b(1-a)}{ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{ab} \end{aligned}$$

comme $a \geq 1$ et $b \geq 1$ alors $a-1 \geq 0$ et $1-b \leq 0$ et $ab > 0$

$$\text{donc } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} - 1 < 0$$

$$\text{et par suite } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} < 1$$

Conclusion : Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} < 1$

Exercice 33

Soit a et b deux réels tel que $1 < a < b$

$$1 \text{ On a : } A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{et } B = \sqrt{a-1} - \sqrt{b-1}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } A &= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad B = \frac{a-1-(b-1)}{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite : } \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$2 \text{ Comme } 0 < a-1 < a \text{ et } 0 < b-1 < b$$

alors $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$ et $\sqrt{b-1} < \sqrt{b}$ par somme membre à membre

$$\text{On a : } \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{d'où } 0 < \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 1$$

$$\text{c'est-à-dire } 0 < \frac{A}{B} < 1$$

$$3 \text{ On a } 0 < \frac{A}{B} < 1$$

comme $1 < a < b$ équivaut à $0 < a-1 < b-1$

$$\text{alors } \sqrt{a-1} < \sqrt{b-1}$$

$$\text{ainsi } \sqrt{a-1} - \sqrt{b-1} < 0$$

$$\text{c'est-à-dire } B < 0$$

$$\text{on a } 0 < \frac{A}{B} < 1$$

$$\text{et } B < 0$$

$$\text{Donc } A > B$$

4 Application :

Comparons les deux nombres $u = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $v = \sqrt{3} - \sqrt{6}$

pour $a = 3$ et $b = 6$

On a : $A = \sqrt{3} - \sqrt{6} = v$ et $B = \sqrt{2} - \sqrt{5} = u$

D'où d'après 3) $A > B$

Exercice 34

On a : $A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$

$$B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$$

1 Montrons que $A > 0$ et $B > 2|x|$

On a : $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

d'où $\sqrt{x^2 + 1} - |x| > 0$ c'est-à-dire $A > 0$.

On a : $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

Donc $\sqrt{x^2 + 1} + |x| > 2|x|$ c'est-à-dire $B > 2|x|$

2 Calculons $A \times B$ en déduisant que $A < \frac{1}{2|x|}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } A \times B &= (\sqrt{x^2 + 1} - |x|)(\sqrt{x^2 + 1} + |x|) \\ &= (\sqrt{x^2 + 1})^2 - |x|^2 \\ &= x^2 + 1 - x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

et comme $A > 0$ alors $A \neq 0$

$$\text{donc } B = \frac{1}{A}$$

et on a $B > 2|x|$ D'où $\frac{1}{A} > 2|x|$

Par suite : $A < \frac{1}{2|x|}$

3 Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$

On a : $A > 0$ équivaut à $\sqrt{x^2 + 1} - |x| > 0$

équivaut à $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

et $A < \frac{1}{2|x|}$ équivaut à $\sqrt{x^2 + 1} - |x| < \frac{1}{2|x|}$

équivaut à $\sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$

Donc $|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$

4 pour $x = 11$ on obtient $11 < \sqrt{121} < 11 + \frac{1}{22}$
 Par suite : $\frac{11}{3} < \frac{\sqrt{121}}{2} < \frac{11}{3} + \frac{1}{66}$

Exercice 35

1 soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Montrons que : $E(\sqrt{n^2+1}) = n$

On a : $n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 1 + 2n$

c'est-à-dire $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$

et par suite $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

D'où $E(\sqrt{n^2+1}) = n$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$n \geq 1$ équivaut à $2n \geq 2 > 1$

et par suite $4n > 2n + 1$

et donc $n^2 + 4n > n^2 + 2n + 1$

d'autre part $n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4$

d'où $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4$

c'est-à-dire $(n+1)^2 < n^2 + 4n < (n+2)^2$

et donc $n+1 < \sqrt{n^2+4} < n+2$

Ainsi $E(\sqrt{n^2+4}) = n+1$

3 a. Soit n et p deux entiers

Montrons que : si $n > p$ alors $n \geq p+1$:

On a : $n > p$ équivaut à $n - p > 0$

équivaut à $n - p \in \mathbb{N}^*$

équivaut à $n - p \geq 1$

équivaut à $n \geq p+1$

ainsi si $n > p$ alors $n \geq p+1$

et réciproquement si $n \geq p+1$ alors $n > p$

b. Soit x et y deux réels



Montrons que : si $x < y$ alors $E(x) \leq E(y)$

On a : $E(x) \leq x < y < E(y) + 1$

c'est-à-dire $E(x) < E(y) + 1$

ainsi $E(y) + 1 > E(x)$

d'après 3) a) on a : $E(y) + 1 \geq E(x) + 1$

et par suite $E(y) \geq E(x)$

C'est-à-dire : $E(x) \leq E(y)$

En conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Si $x < y$ alors $E(x) \leq E(y)$

4 Montrons que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\begin{cases} x = E(x) + r \\ 0 \leq r < 1 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

donc $0 \leq x - E(x) < 1$

posons : $r = x - E(x)$

on a donc : $x = E(x) + r$ et $0 \leq r < 1$

5 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$

donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $p + E(x) \leq x + p < E(x) + p + 1$

Ainsi : $E(x + p) = p + E(x)$

6 Soit $x \in \mathbb{R}$, Montrons que $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

on a d'après 4) $x = E(x) + r$ et $0 \leq r < 1$

l'égalité $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$ (1)

s'écrit alors $E(x) + E\left(E(x) + r + \frac{1}{2}\right) = E(2r + 2E(x))$

et d'après 5) on a (1) équivaut à $2E(x) + E\left(r + \frac{1}{2}\right) = E(2r) + 2E(x)$

il suffit donc de montrer que $E\left(r + \frac{1}{2}\right) = E(2r)$

1^{er} cas : si $0 \leq r < \frac{1}{2}$

donc $0 \leq 2r < 1$ et $\frac{1}{2} < r + \frac{1}{2} < 1$

et par suite $E(2r) = 0$ et $E\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$, Ainsi $E(2r) = E\left(r + \frac{1}{2}\right)$

2^{ème} cas : si $\frac{1}{2} \leq r < 1$

donc $1 \leq 2r < 2$ et $1 \leq r + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

et par suite $E(2r) = 1$ et $E\left(r + \frac{1}{2}\right) = 1$

ainsi $E(2r) = E\left(r + \frac{1}{2}\right)$

d'où $E(2r) = E\left(r + \frac{1}{2}\right)$

Par suite : $E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E(x) = E(2x)$

7 Résolvons les équations :

► $(E_1) : E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 \text{ équivaut à } -2 \leq \frac{x-1}{2} < -1$$

$$\text{équivaut à } -4 \leq x-1 < -2$$

$$\text{équivaut à } -3 \leq x < -1$$

D'où $S = [-3; -1[$

► $(E_2) : E(2x) = x-1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

comme $E(2x) \in \mathbb{Z}$ alors $x-1 \in \mathbb{Z}$

et donc $x \in \mathbb{Z}$ et par suite $2x \in \mathbb{Z}$

$$\text{d'où } E(2x) = x-1 \text{ équivaut à } 2x = x-1$$

$$\text{équivaut à } x = -1$$

Donc $S = \{-1\}$

► $(E_3) : E\left(\frac{1}{x}\right) = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \text{ équivaut à } 3 \leq \frac{1}{x} < 4$$

$$\text{équivaut à } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$$

D'où $S = \left]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$

LES POLYNÔMES

1 Polynômes

Définition 1:

► On appelle **polynôme** à coefficients réels de degré n ($n \in \mathbb{N}$) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ dont l'écriture peut se ramener sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_0, a_1, \dots$; et a_n des réels et $a_n \neq 0$

Définition 2:

Le terme $a_p x^p$ ($a_p \neq 0$) s'appelle **monôme de degré p** .

► Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $a_n \neq 0$ Alors $\deg(P) = n$
«à lire le degré de $P(x)$ est n »

► La fonction **polynôme nulle** est le polynôme dont tous ses termes sont nuls; c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$

► Le polynôme nul n'a pas de degré

2 Egalité de deux polynômes

propriété :

► Deux polynômes sont égaux signifie qu'elles ont le même degré et que leurs monômes respectifs de même degré ont le même coefficient.

C'est-à-dire : Soit P et Q deux polynômes

$$P = Q \text{ si et seulement si } \begin{cases} \deg(P) = \deg(Q) \\ \text{Les coefficients des termes} \\ \text{de même degré sont égaux} \end{cases}$$

3 Somme et produit de deux polynômes

propriété et définition :

► La somme de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme qu'on note $(P + Q)(x)$ définie par $P(x) + Q(x)$

► Le produit de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme qu'on note $(P \times Q)(x)$ définie par $P(x) \times Q(x)$

propriété 2:

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls; on a:

$$\begin{cases} \deg(P+Q) \leq \deg(P) \\ \deg(P+Q) \leq \deg(Q) \end{cases}$$

Dans le cas où $(P+Q)(x)$ n'est pas le polynôme nul

$$\deg(P(x) \times Q(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x))$$

Exercices

Exercice 1

Est-ce que les expressions suivantes sont celles d'un polynôme? justifier

$$\triangleright P(x) = 2x^4 - \frac{5}{x} + 3$$

$$\triangleright M(x) = |x| - 2$$

$$\triangleright R(x) = (x^2 - 1)^2$$

$$\triangleright T(x) = \frac{2x+1}{\pi}$$

$$\triangleright H(x) = 3$$

$$\triangleright U(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$\triangleright L(x) = 4|x^2| + x + 3$$

Exercice 2

On considère les polynômes $P(x)$; $Q(x)$ et $R(x)$ tels que :

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$$

$$R(x) = x^4 + x^2 - 3x + 1$$

Calculer $P(1)$; $Q(-1)$ et $R(\sqrt{2})$

Exercice 3

Donner le degré du polynôme $P(x)$ dans chaque cas :

$$\textcircled{1} P(x) = x - 3x^2 + 4$$

$$\textcircled{2} P(x) = (x-2)(x^2+x-1)$$

$$\textcircled{3} P(x) = (x^2+1+1)^2$$

Exercice 4

Sans faire de calcul, déterminer le degré du polynôme $P(x)$ dans chaque cas :

$$\textcircled{1} P(x) = -2(3x-1)(x^2+2)$$

2 $P(x) = (x^2 + 3x - 1)^4$

3 $P(x) = 4x^2(1 - x)(x^4 + 3)$

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ le polynôme défini par :

$$P(x) = m(m - 1)x^3 + mx^2 - x + 2$$

Déterminer suivant les valeurs de m le degré de P .

Exercice 6

Soit le polynôme $P(x)$ défini par : $P(x) = x^3 + (3a - 1)x^2 + ax - 2$; (avec $a \in \mathbb{R}$)

1 Déterminer le réel a tel que $P(1) = 0$

2 Calculer dans ce cas $P(-1)$ et $P(0)$

Exercice 7

Déterminer $P(x)$ un polynôme du second degré (trinôme) qui vérifie $P(1) = 0$, $P(-1) = 1$ et $P(2) = 3$

Exercice 8

Soit le polynôme $P(x)$ défini par $P(x) = 4(1 - x)(x + 2)$

1 Justifier sans calcul que le polynôme $P(x)$ n'est pas égal au polynôme $Q(x) = 4x^3 + x^2 - 1$

2 Déterminer le réel a pour que $P(x) = H(x)$ avec $H(x) = ax^2 - 4x + 8$

Exercice 9

Soient les polynômes

$P(x)$; $Q(x)$ et $H(x)$ définis par :

▶ $P(x) = 2x^5 + 3x - 1$

▶ $Q(x) = 2x + 3$

▶ $H(x) = x^2 + x + 1$

Déterminer les polynômes

a. $P(x) + Q(x)$

b. $P(x) \times Q(x)$

c. $P(x) \times H(x)$

d. $P(x) \times Q(x) + H(x)$

Exercice 10

Soit $P(x) = ax^2 + 3x + 5$ et $Q(x) = (a + b)x^2 + (a - b + c)x + a + 2c$

Déterminer les réels a , b et c pour que $P(x) = Q(x)$

Exercice 11

Soit le polynôme:

$$P(x) = (x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3})(x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3})$$

Montrer que $P(x) = x^4 - (10 + 4\sqrt{3})x^2 + 4 + 2\sqrt{3}$

Solutions

Exercice 1

► $P(x) = 2x^4 - \frac{5}{x} + 3$, $P(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme simplifiée d'un polynôme

Donc $P(x)$ n'est pas un polynôme ($\frac{5}{x}$ n'est pas un monôme) ;

► $R(x) = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$

$R(x)$ est un polynôme

infos:

une constante est un polynôme de degré 0

► $H(x) = 3 = 0x + 3$; $H(x)$ est un polynôme de degré 0

► $L(x) = 4|x^2| + x + 3$ on sait que $|x^2| = x^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$

D'où $L(x) = 4x^2 + x + 3$

$L(x)$ est un polynôme de degré 2 ; C'est un trinôme

infos:

Un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

► $M(x) = x - 2$ si $x \geq 0$

$M(x) = -x - 2$ si $x \leq 0$

$M(x)$ n'est pas un polynôme

infos:

un polynôme est définie pour tout x réel

► $T(x) = \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi}$ c'est un polynôme ; il est de la forme $ax + b$;

avec $a = \frac{2}{\pi}$ et $b = \frac{1}{\pi}$

► $U(x)$ n'est pas définie pour $x = -2$; donc $U(x)$ n'est pas un polynôme.

Exercice 2

Calculons: $P(1)$; $Q(-1)$ et $R(\sqrt{2})$

► $P(1) = (1)^2 + (1) + 1 = 3$

► $Q(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) + 1$
 $= -1 - 5 - 1 + 1$
 $= -6$

$$\begin{aligned}
 \triangleright R(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2} + 1 \\
 &= (\sqrt{2}^2)^2 + 2 - 3\sqrt{2} + 1 \\
 &= 2^2 + 2 - 3\sqrt{2} + 1 \\
 &= 7 - 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminons le degré du polynôme $P(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{1} \triangleright P(x) &= x - 3x^2 + 4 \\
 &= -3x^2 + x + 4
 \end{aligned}$$

On a: $\deg P(x) = 2$ (car: le monôme ayant le plus haut degré est $-3x^2$)

$$\triangleright Q(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$$

Le degré de $Q(x)$ est 3

Le terme ayant plus haut degré de $x - 2$ est x

Le terme ayant plus degré de $x^2 + x + 1$ est x^2

donc $x \cdot x^2 = x^3$ est un terme ayant le plus haut degré dans le polynôme

$Q(x)$ donc: $\deg Q(x) = 3$

3 Le terme ayant le plus haut degré dans $P(x)$ est $(x^2)^2 = x^4$

donc: $\deg P(x) = 4$

Exercice 4

1 Le terme ayant le plus haut degré dans $P(x)$ est: $-2(3x)(x^2) = -6x^3$

donc: $\deg P(x) = 3$

2 Le terme ayant le plus haut degré dans $P(x)$ est $(x^2)^4 = x^8$;

donc: $\deg P(x) = 8$

3 Le terme ayant le plus haut degré dans $P(x)$

est $4x^2(-x)(x^4) = -4x^7$ donc: $\deg P(x) = 7$

Exercice 5

$$P(x) = m(m - 1)x^3 + mx^2 - x + 2$$

$\triangleright$ Si $m \neq 0$ et $m - 1 \neq 0$ alors $m(m - 1)$ est le coefficient du terme ayant le plus haut degré de $P(x)$; donc: $\deg P(x) = 3$

$\triangleright$ Si $m = 1$ alors $P(x) = 0x^3 + 1x^2 - x + 2 = x^2 - x + 2$, d'où: $\deg P(x) = 2$

$\triangleright$ Si $m = 0$ alors $P(x) = 0x^3 + 0x^2 - x + 2 = -x + 2$, d'où: $\deg(P(x)) = 1$

Exercice 6

On a : $P(x) = x^3 + (3a - 1)x^2 + ax - 2$

1 Déterminons a tel que $P(1) = 0$

$$P(1) = 0 \text{ équivaut } (1)^3 + (3a - 1) \times 1 + a(1) - 2 = 0$$

$$\text{équivaut } 1 + 3a - 1 + a - 2 = 0$$

$$\text{équivaut } 4a = 2$$

$$\text{équivaut } a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2 pour $a = \frac{1}{2}$

$$\text{On a : } P(x) = x^3 + \left(3 \times \frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \text{ Donc : } P(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons : } P(-1) : P(-1) &= (-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(-1) - 2 \\ &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{Calculons : } P(0) : P(0) = (0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(0) - 2 = -2$$

Exercice 7

Déterminons un trinôme $P(x)$ vérifiant : $P(1) = 0$; $P(-1) = 1$ et $P(2) = 3$

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$

$$P(1) = 0 \text{ équivaut } a(1)^2 + b(1) + c = 0$$

$$\text{équivaut } a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$P(-1) = 1 \text{ équivaut } a(-1)^2 + b(-1) + c = 1$$

$$\text{équivaut } a - b + c = 1 \quad (2)$$

$$P(2) = 3 \text{ équivaut } a(2)^2 + b(2) + c = 3$$

$$\text{équivaut } 4a + 2b + c = 3 \quad (3)$$

$$\text{On aura le système suivant : } \begin{cases} a + b + c = 0 & (1) \\ a - b + c = 1 & (2) \\ 4a + 2b + c = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ donne : } a + c = -b$$

On remplace dans (2) et (3)

On aura: $a + c - b = 1$

$$-b - b = 1$$

$$-2b = 1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

On remplace dans (1) et (3)

On a:
$$\begin{cases} a + c = \frac{1}{2} \\ 4a + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + c = 3 \end{cases}$$

signifie que:
$$\begin{cases} a + c = \frac{1}{2} \\ 4a + c = 4 \end{cases}$$

signifie que:
$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} - a \\ 4a + \frac{1}{2} - a = 4 \end{cases}$$

Signifie que:
$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} - a \\ 3a = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Signifie que:
$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} - \frac{7}{6} = -\frac{2}{3} \\ a = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Donc: $a = \frac{7}{6}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{2}{3}$; Donc: $P(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$

Exercice 8

1 $P(x) = 4(1 - x)(x + 2)$

Justifions sans calcul que $P(x) \neq Q(x)$

On a le terme ayant le plus haut degré dans le polynôme $P(x)$ est $4(-x)(x)$ c'est-à-dire $-4x^2$; Donc: $\deg P(x) = 2$

Le degré de $Q(x)$ est 3; Donc: $P(x) \neq Q(x)$; car ils n'ont pas le même degré.

2 Déterminons le réel a tel que $P(x) = H(x)$

développons $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4(1 - x)(x + 2) \\ &= 4(x + 2 - x^2 - 2x) \\ &= -4x^2 - 4x + 8 \end{aligned}$$

► $H(x) = ax^2 - 4x + 8$

$P(x) = H(x)$ signifie que $a = -4$

Soit $P(x) = 2x^5 + 3x - 1$; $Q(x) = 2x + 3$ et $H(x) = x^2 + x + 1$

a. Déterminons le polynôme $P(x) + Q(x)$

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= 2x^5 + 3x - 1 + 2x + 3 \\ &= 2x^5 + 5x + 2 \end{aligned}$$

b. Déterminons le polynôme $P(x) \times Q(x)$

$$\begin{aligned} P(x) \times Q(x) &= (2x^5 + 3x - 1)(2x + 3) \\ &= 4x^6 + 6x^5 + 6x^2 + 9x - 2x - 3 \\ &= 4x^6 + 6x^5 + 6x^2 + 7x - 3 \end{aligned}$$

c. Déterminons $P(x) \times H(x)$

$$\begin{aligned} P(x) \times H(x) &= (2x^5 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - x^2 - x - 1 \\ &= 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

d. Déterminons le polynôme $P(x) \times Q(x) + H(x)$

$$P(x) \times Q(x) + H(x) = (4x^6 + 6x^5 + 6x^2 + 7x - 3) + x^2 + x + 1$$

(remarquer que $P(x) \times Q(x)$ a été déjà calculé dans la question b)

$$\text{Donc : } P(x) \times Q(x) + H(x) = 4x^6 + 6x^5 + 7x^2 + 8x - 2$$

Exercice 10

On a : $P(x) = ax^2 + 3x + 5$; et $Q(x) = (a + b)x^2 + (a - b + c)x + a + 2c$

Déterminons a ; b et c tel que $P(x) = Q(x)$

$$\text{On a } P(x) = Q(x) \text{ équivaut : } \begin{cases} a + b = a \\ a - b + c = 3 \\ a + 2c = 5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut : } \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 3 \\ a + 2c = 5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut : } \begin{cases} b = 0 \\ a = 3 - 2 = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc : $a = 1$; $b = 0$ et $c = 2$

infos:

deux polynômes sont égaux s'ils ont le même degré et les monômes de même degré sont égaux.

Exercice 11

Simplifions l'écriture du polynôme $P(x)$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= ((x^2 + 1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})x)((x^2 + 1 + \sqrt{3}) - (3 + \sqrt{3})x) \\
 &= (x^2 + 1 + \sqrt{3})^2 - ((3 + \sqrt{3})x)^2 \\
 &= x^4 + 2x^2(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})^2 - (3 + \sqrt{3})^2 x^2 \\
 &= x^4 + 2x^2(1 + \sqrt{3}) + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - (9 + 6\sqrt{3} + 3)x^2 \\
 &= x^4 + x^2(2 + 2\sqrt{3} - 9 - 6\sqrt{3} - 3) + 4 + 2\sqrt{3} \\
 &= x^4 + x^2(-10 - 4\sqrt{3}) + 4 + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

donc: $P(x) = x^4 - x^2(10 + 4\sqrt{3}) + 4 + 2\sqrt{3}$

infos:

de la forme
 $(A + B)(A - B)$

1 Division par $x - a$

1. La division euclidienne

Propriété et définition :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n , avec $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel,
 il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$$

► Le polynôme $Q(x)$ s'appelle **le quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$

► Le nombre $P(a)$ s'appelle **le reste** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$

2. Racine d'un polynôme

Définition :

Soit $P(x)$ un polynôme et a un réel

On dit que a est **une racine** du polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$

3. Divisibilité par $x - a$

Définition :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n , avec n un entier non nul et a un nombre réel

$P(x)$ est divisible par $x - a$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$

Exercice 20

Déterminer parmi les nombres $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$; les racines de $P(x)$ dans chaque cas ,

1 $P(x) = x^2 + 3x - 4$ 2 $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1$ 3 $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

Exercice 21

Soit m un réel ; déterminer m pour que 1 soit une racine du polynôme $P(x)$ dans chaque cas ;

1 $P(x) = mx^2 + mx - 1$ 2 $P(x) = x^4 + 3\sqrt{2}x^2 - x - 2m$
 3 $P(x) = (x - m)(x^7 + 3x^2 - 1) + 7mx$

Exercice 22

Montrer que l'équation :

$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$ admet pour ensemble de solutions $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$

Exercice 23

Effectuer la division euclidienne de polynôme $P(x)$ par $x - \alpha$ dans chaque cas :

1 $P(x) = x^3 + 5x^2 + x - 3$; $\alpha = 1$
 2 $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2x - 1$; $\alpha = -1$
 3 $P(x) = 3x^2 + 3x - 1$; $\alpha = -\frac{1}{2}$

Exercice 24

On considère le polynôme $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 5x - 1$

- 1 Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$
- 2 Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$

Exercice 25

On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 - 11x - 8$

- 1 Montrer que -1 est une racine de $P(x)$
- 2 Déterminer une factorisation de $P(x)$
 (sous forme de produit de deux polynômes)

Exercice 26

Déterminer de deux façons différentes les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

Exercice 27

Soit a un nombre réel et le polynôme $P(x)$ défini par :

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + (a - 2)x + a$$

1 Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$

2 Déterminer a pour que $P(x)$ soit divisible par $x - 2$

Solutions

Exercice 20

1 On a : $P(-4) = 0$; $P(-3) = -4$; $P(-2) = -6$; $P(-1) = -6$;
 $P(0) = -4$ et $P(1) = 0$ et $P(2) = 6$

Donc -4 et 1 sont les racines du polynôme $P(x)$

2 On a : $P(-4) = -93$; $P(-3) = -34$; $P(-2) = -7$; $P(-1) = 0$;
 $P(0) = -1$; $P(1) = 2$ et $P(2) = 21$

Donc -1 est une racine de $P(x)$

3 On a : $P(-4) = 270$; $P(-3) = 88$; $P(-2) = 18$; $P(-1) = 0$;
 $P(0) = -2$; $P(1) = 0$; $P(2) = 18$

Donc -1 et 1 sont deux racines de $P(x)$

Exercice 21

Déterminons m pour que 1 soit une racine de $P(x)$

1 1 est une racine de $P(x)$ signifie que $P(1) = 0$

On a : $P(1) = 0$ équivaut $m(1)^2 + m(1) - 1 = 0$

$$\text{équivaut } m = \frac{1}{2}$$

2 1 est une racine de $P(x)$ signifie que $P(1) = 0$

On a : $P(1) = 0$ équivaut $1 + 3\sqrt{2} - 1 - 2m = 0$

$$\text{équivaut } m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3 1 est une racine de $P(x)$ signifie que $P(1) = 0$

On a : $P(1) = 0$ équivaut $(1 - m)(1^7 + 3 \cdot 1^2 - 1) + 7m \cdot 1 = 0$

$$\text{équivaut } m = -\frac{3}{4}$$

Exercice 22

Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$; On a :

$$\begin{aligned} \triangleright P\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \triangleright \begin{aligned} P(1) &= 2(1)^3 - 5(1)^2 + 1 + 2 \\ &= 2 - 5 + 1 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright P(2) &= 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 \\ &= 16 - 20 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc les nombres $-\frac{1}{2}$; 1 et 2 sont des racines de $P(x)$ et le degré de $P(x)$ est 3

Donc le polynôme admet $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ comme ensemble de solutions.

Exercice 23

► Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 + x - 3 & x - 1 \quad (\alpha = 1) \\ -x^3 + x^2 & x^2 + 6x + 7 \\ \hline 0 + 6x^2 + x - 3 & \\ -6x^2 + 6x & \\ \hline 0 + 7x - 3 & \\ -7x + 7 & \\ \hline 0 + 4 & \end{array}$$

$$\text{Donc: } P(x) = (x - 1)(x^2 + 6x + 7) + 4$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 2x - 1 & x + 1 \quad (\alpha = -1) \\ -x^4 - x^3 & x^3 - x^2 + 4x - 2 \\ \hline 0 - x^3 + 3x^2 & \\ +x^3 + x^2 & \\ \hline 4x^2 + 2x - 1 & \\ -4x^2 - 4x & \\ \hline 0 - 2x - 1 & \\ +2x + 2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\text{On a: } P(x) = (x + 1)(x^3 - x^2 + 4x - 2) + 1$$

3

$$\begin{array}{r|l}
 3x^2 + 3x - 1 & x + \frac{1}{2} \\
 -3x^2 - \frac{3}{2}x & \hline
 0 + \frac{3}{2}x - 1 & 3x + \frac{3}{2} \\
 -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} & \\
 \hline
 0 - \frac{7}{4} &
 \end{array}
 \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} \right)$$

On a : $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{4}$

Exercice 24

On a $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 5x - 1$

1 Montrons que $P(x)$ est divisible par $x - 1$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } P(1) &= 5(1)^3 - 9(1)^2 + 5(1) - 1 \\
 &= 5 - 9 + 5 - 1 \\
 &= 10 - 10 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

infos:

$P(x)$ est divisible par $x - a$

si : $P(a) = 0$

ou : Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ est nul

On a : $P(1) = 0$ donc $P(x)$ est divisible par $x - 1$

2 Déterminons le polynôme $Q(x)$

$P(x)$ est divisible par $x - 1$; effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 - 9x^2 + 5x - 1 & x - 1 \\
 -5x^3 + 5x^2 & \hline
 0 - 4x^2 + 5x - 1 & 5x^2 - 4x + 1 \\
 +4x^2 - 4x & \\
 \hline
 0 + x - 1 & \\
 -x + 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

donc $P(x) = (x - 1)(5x^2 - 4x + 1)$

D'où $Q(x) = 5x^2 - 4x + 1$

On a $P(x) = 3x^3 - 11x - 8$

1 Montrons que -1 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(-1) &= 3 \times (-1)^3 - 11(-1) - 8 \\ &= -3 + 11 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc -1 est une racine de $P(x)$

2 Déterminons une factorisation de $P(x)$

On a : $P(-1) = 0$

Donc $P(x)$ est divisible par $x - (-1)$ c'est-à-dire par $x + 1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 11x - 8 & x + 1 \\ - 3x^3 - 3x^2 & \\ \hline 0 - 3x^2 - 11x & \\ + 3x^2 + 3x & \\ \hline 0 - 8x - 8 & \\ + 8x + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où $P(x) = (x + 1)(3x^2 - 3x - 8)$

Exercice 26

Soit $P(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

Déterminons a ; b et c tel que $P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

1ère méthode:

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 5$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 6x + 5 & x + 5 \\ - x^3 - 5x^2 & \\ \hline 0 + x^2 + 6x & \\ - x^2 - 5x & \\ \hline x + 5 & \\ - x - 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$

► 2ème méthode:

soit x un réel

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 6x + 5 &= (x + 5)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 5ax^2 + 5bx + 5c \\ &= ax^3 + (b + 5a)x^2 + (c + 5b)x + 5c \end{aligned}$$

D'après l'égalité de deux polynômes:

$$\text{On a : } \begin{cases} a = 1 \\ b + 5a = 6 \\ c + 5b = 6 \\ 5c = 5 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 - 5a = 6 - 5 = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

d'où $a = 1$; $b = 1$ et $c = 1$

Exercice 27

1 La division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$ est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 2x^2 + (a-2)x + a & x - 2 \\ -2x^3 + 4x^2 & \\ \hline 0 + 2x^2 + (a-2)x & 2x^2 + 2x + (a+2) \\ -2x^2 + 4x & \\ \hline 0 + (a+2)x + a & \\ - (a+2)x + 2(a+2) & \\ \hline 0 + 3a + 4 & \end{array}$$

Le quotient de la division euclidienne est $2x^2 + 2x + a + 2$ et le reste est $3a + 4$.

$$\text{Donc : } P(x) = (x - 2)(2x^2 + 2x + a + 2) + 3a + 4$$

2 Déterminons a pour que $P(x)$ soit divisible par $x - 2$

$P(x)$ est divisible par $x - 2$ si $P(2) = 0$

On a : $P(2) = R(2)$ On a : $R(2) = 3a + 4$ (Le reste de la division euclidienne)

$P(2) = 0$ équivaut à $R(2) = 0$

équivaut à $3a + 4 = 0$

équivaut à $a = -\frac{4}{3}$

Exercice 28

L'objectif de cet exercice est de trouver les racines du polynôme $P(x)$ suivant

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

- 1 Montrer que -1 est une racine de $P(x)$
- 2 Trouver les nombres réels a , b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$
- 3 a. Montrer que $2x^2 - 7x + 6$ est divisible par $x - 2$
b. En déduire une factorisation de $P(x)$
- 4 Résoudre l'équation $P(x) = 0$

Exercice 29

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$

- 1 Calculer $P(\sqrt{3})$ puis déduire que $P(x)$ est divisible par $x - \sqrt{3}$
- 2 Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \frac{1}{2}$
- 3 Écrire $P(x)$ sous forme de produit de trois polynômes de degré 1.
- 4 a. Résoudre $P(x) = 0$
b. Résoudre $P(x) \geq 0$.

Exercice 30

Soit $P(x)$ un polynôme défini par $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

- 1 Déterminer un trinôme $Q(x)$ (polynôme de degré 2) tel que $P(x) = (Q(x))^2$
- 2 Montrer que si $-1 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq P(x) \leq 9$

Exercice 31

1 Soit m un réel et $P(x)$ le polynôme défini par $P(x) = (m + 1)x^2 + mx - m$.
Déterminer la valeur du paramètre m pour laquelle :

$P(x) = (m + 1)x^2 + (m)x - m$ a pour reste $R(x) = 7$ dans la division par $x + 1$.

2 Même question avec $p(x) = mx^2 - 2(m + 3)x + 2m$ et $R(x) = 1$ dans la division par $x - 2$

Exercice 32

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

- 1 Montrer que 1 est une racine de $P(x)$
- 2 Déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$
- 3 Montrer que -1 est une racine de $Q(x)$
- 4 En déduire une factorisation de $Q(x)$ puis de $P(x)$
- 5 a. Résoudre l'équation $P(x) = 0$
 b. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$
 c. Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors $-1 \leq P(x) \leq 0$

Exercice 33

- 1 Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; b et c des réels.
 - a. Déterminer $P(x)$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(x+1) - P(x) = x$
 - b. Déduire la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- 2 Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$); b ; c et d des réels.
 Déterminer $P(x)$ tel que pour tout réel x .
 $P(x+1) - P(x) = x^2$, déduire la somme. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
 avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 34

On considère le polynôme $P(x) = (a - b)x^6 + bx^3 + ax^2 - 1$
 avec a et b des réels.

- 1 a. Montrer que si $a = b$ alors $P(-1) = -1$
 b. Montrer que si $P(-1) = -1$ alors $a = b$
- 2 On suppose que $P(-1) = -1$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
 - a. Montrer que $P(x) = 8x^3 + 8x^2 - 1$
 - b. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x + \frac{1}{2}$
 - c. Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$
 - d. En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x
 - e. Résoudre le système $\begin{cases} x^3 + x^2 > \frac{1}{8} \\ x < 0 \end{cases}$

Exercice 35

Soit $P(x)$ le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

- 1 Vérifier que -5 est une racine de $P(x)$
- 2 a. Factoriser $x^2 - 2x - 3$
b. Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$
- 3 Factoriser $P(x)$
- 4 Résoudre l'équation $P(x) = 0$ puis l'inéquation $P(x) < 0$
- 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(x^2 - 4x)^3 + 3(x^2 - 4x)^2 - 13(x^2 - 4x) - 15 = 0$

Exercice 36

On considère le polynôme $P(x)$ défini par: $P(x) = 10x^3 - 9x^2 - 37x + 42$

- 1 a. Montrer que -2 est une racine de $P(x)$
b. Déterminer le réel a tel que $P(x) = (x + 2)(10x^2 + ax + 21)$
- 2 Soit $Q(x)$ le polynôme défini par : $Q(x) = 10x^2 - 29x + 21$
 - a. Montrer que $\frac{3}{2}$ est une racine de $Q(x)$
 - b. En déduire une factorisation de $Q(x)$
 - c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$
 - d. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$; $1 + Q(x) > 0$
 - e. Montrer que si $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ alors $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$
 - f. Calculer $Q(\sqrt{2})$ puis déduire que $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

Exercice 37

On considère le polynôme $P(x) = -2x^3 + (2\sqrt{2} + 1)x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$

- 1 a. Vérifier que 1 est une racine de $P(x)$.
b. Déterminer le quotient $Q(x)$ de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$
- 2 a. Vérifier que $\sqrt{2}$ est une racine de $Q(x)$.
b. Factoriser $Q(x)$.
- 3 a. Écrire $P(x)$ sous forme de produit de deux polynômes de premier degré
b. Résoudre $\frac{P(x)}{x - 1} = 0$.

Exercice 28

1 Montrons que -1 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned}\text{On a: } P(-1) &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 \\ &= -2 - 5 + 1 + 6 \\ &= -7 + 7 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc: -1 est une racine de $P(x)$

2 Déterminons a, b et c tels que $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$

Comme $P(-1) = 0$ alors -1 est une racine de $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x - (-1)$ c'est-à-dire par $x+1$,
effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 & x+1 \\ -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 7x + 6 \\ \hline 0 - 7x^2 - x + 6 & \\ +7x^2 + 7x & \\ \hline 6x + 6 & \\ -6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $a = 2 ; b = -7$ et $c = 6$

3 a. Montrons que $2x^2 - 7x + 6$ est divisible par $x-2$

posons $Q(x) = 2x^2 - 7x + 6$ et montrons que $Q(2) = 0$

$$\text{On a: } Q(2) = 2(2)^2 - 7(2) + 6 = 8 - 14 + 6 = 14 - 14 = 0$$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x-2$

b. Factorisation de $P(x)$

tout d'abord factorisons le polynôme $Q(x)$

on a : $Q(x)$ divisible par $x-2$

► Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 7x + 6 & x-2 \\ -2x^2 + 4x & 2x-3 \\ \hline 0 - 3x + 6 & \\ +3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $Q(x) = (x-2)(2x-3)$

D'où: $P(x) = (x+1)Q(x)$

donc: $P(x) = (x+1)(x-2)(2x-3)$

4 Résolvons l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0$ équivaut $(x+1)(x-2)(2x-3) = 0$

équivaut $x+1 = 0$ ou $x-2 = 0$ ou $2x-3 = 0$

équivaut $x = -1$ ou $x = +2$ ou $x = \frac{3}{2}$

Donc les solutions de l'équations $P(x) = 0$ sont les réels -1 ; 2 et $\frac{3}{2}$

Exercice 29

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$

1 Calculons $P(\sqrt{3})$:
$$\begin{aligned} P(\sqrt{3}) &= 2(\sqrt{3})^3 - (\sqrt{3})^2 - 6(\sqrt{3}) + 3 \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{3} - 3 - 6\sqrt{3} + 3 \\ &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc: $P(\sqrt{3}) = 0$

D'où $P(x)$ est divisible par $x - \sqrt{3}$ car $\sqrt{3}$ est une racine du polynôme $P(x)$

2 Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 6x + 3 & x - \frac{1}{2} \\ - 2x^3 + x^2 & 2x^2 - 6 \\ \hline 0 - 6x + 3 & \\ + 6x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6)$

3 Factorisation de $P(x)$:
$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2)(x^2 - 3) \\ &= (2x - 1)(x^2 - \sqrt{3}^2) \end{aligned}$$

Donc: $P(x) = (2x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

4 a. Résolvons l'équation $P(x) = 0$:

$$P(x) = 0 \text{ équivaut à } (2x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{équivaut à } (2x - 1 = 0 \text{ ou } x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0)$$

$$\text{équivaut à } (x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3})$$

Donc les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

$$\text{D'où : } S = \left\{ \frac{1}{2} ; \sqrt{3} ; -\sqrt{3} \right\}$$

b. Résolvons l'inéquation $P(x) \geq 0$:

$$\text{On a : } P(x) = (2x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Dressons le tableau de signe de $P(x)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$2x - 1$	-	-	0	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	0
$x + \sqrt{3}$	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0

Donc l'ensemble de solutions de $P(x) \geq 0$ est : $S = \left[-\sqrt{3} ; \frac{1}{2} \right] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$

Exercice 30

Soit $Q(x)$ un trinôme donc, $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec a ; b et c des réels (et $a \neq 0$).

$$\begin{aligned} \text{On a : } (Q(x))^2 &= (ax^2 + bx + c)^2 = (ax^2 + (bx + c))^2 \\ &= (ax^2)^2 + 2ax^2(bx + c) + (bx + c)^2 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + 2acx^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$

$P(x) = (Q(x))^2$ équivaut à :

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$$

$$\text{équivaut à : } \begin{cases} a^2 = 1 & (1) \\ 2ab = 2 & (2) \\ 2ac + b^2 = 3 & (3) \text{ (Par identification)} \\ 2bc = 2 & (4) \\ c^2 = 1 & (5) \end{cases}$$

d'après: (1) $a = 1$ ou $a = -1$

si $a = 1$ alors $b = 1$

si $a = -1$ alors $b = -1$

(5) $c = 1$ ou $c = -1$

(4) $bc = 1$ donc b et c ont le même signe

(2) $ab = 1$ donc a et b ont le même signe

On en déduit que a , b et c ont le même signe donc: $a = b = 1$ ou $a = b = -1$

Donc: $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$$Q(x) = x^2 + x + 1 \text{ ou } Q(x) = -x^2 - x - 1$$

2 Montrons que si $x \in [-1; 1]$ alors $P(x) \in [0; 9]$

$$\text{si } x \in [-1; 1] \text{ alors } \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où: } -1 \leq x^2 + x \leq 2$$

$$\text{ainsi: } 0 \leq x^2 + x + 1 \leq 3$$

$$\text{donc: } 0 \leq (x^2 + x + 1)^2 \leq 3^2$$

$$\text{Par conséquent } 0 \leq P(x) \leq 9$$

Exercice 31

1 Déterminons m :

On sait que $P(x) = (x+1)Q(x) + R(x)$ avec $R(x) = 7$

$$\text{donc: } P(-1) = R(-1)$$

$$\text{d'où: } (m+1)(-1)^2 + m(-1) - m = 7$$

$$\text{c'est-à-dire } m^2 + 1 - m - m = 7$$

$$\text{d'où: } 1 - 7 = m$$

$$\text{Donc: } m = -6$$

2 Déterminons m :

On sait que: $P(x) = (x-2)Q(x) + R(x)$

$$\text{donc: } P(2) = R(2) \text{ avec } R(x) = 1$$

$$\text{c'est-à-dire: } m(2)^2 - 2(m+3) \cdot 2 + 2m = 1$$

$$\text{d'où: } 4m - 4(m+3) + 2m = 1$$

$$4m - 4m - 12 + 2m = 1$$

$$\text{ainsi: } 2m = 13$$

$$\text{Donc: } m = \frac{13}{2}$$

infos:

$$\text{Si } P(x) = (x-a)Q(x) + R(x)$$

$$\text{alors } P(a) = R(a)$$

Exercice 32

1 Montrons que 1 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned}\text{On a : } P(1) &= 2(1)^3 - (1)^2 - 2(1) + 1 \\ &= 2 - 1 - 2 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc 1 est une racine de $P(x)$

2 Déterminons $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$

pour cela , on effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 2x + 1 & x - 1 \\ -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x - 1 \\ \hline 0 + x^2 - 2x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x + 1 & \\ x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $Q(x) = 2x^2 + x - 1$

3 Montrons que -1 est une racine de $Q(x)$ pour cela calculons $Q(-1)$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } Q(-1) &= 2(-1)^2 + (-1) - 1 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc: -1 est une racine de $Q(x)$

4 Factorisons $Q(x)$ et $P(x)$

On a: $Q(-1) = 0$ donc: $Q(x)$ est divisible par $x - (-1)$ c'est-à-dire par $x + 1$.

Éffectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 1 & x + 1 \\ -2x^2 - 2x & 2x - 1 \\ \hline 0 - x - 1 & \\ x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $Q(x) = (x + 1)(2x - 1)$; or: $P(x) = (x - 1)Q(x)$

donc: $P(x) = (x - 1)(x + 1)(2x - 1)$

5 a. Résolvons l'équation $P(x) =$

$$P(x) = 0 \text{ équivaut à } (x-1)(x+1)(2x-1) = 0$$

$$\text{équivaut à } x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \text{ ou } 2x-1 = 0$$

$$\text{équivaut à } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc: } S = \left\{1; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

b. Résolvons l'inéquation $P(x) > 0$

Pour cela déterminons le tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) > 0 \text{ équivaut } x \in \left]-1; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Donc: } S = \left]-1; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$$

c. Encadrons $P(x)$

$$\text{On a: } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ donc: } 1 \leq 2x \leq 2$$

$$\text{d'où: } 0 \leq 2x-1 \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Et } \frac{3}{2} \leq x+1 \leq 2 \quad (2)$$

$$\text{Et } -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq 0$$

$$\text{Donc: } 0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

D'après (1) ; (2) et (3)

$$0 \times \frac{3}{2} \times 0 \leq -(x-1)(2x-1)(x+1) \leq 1 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$0 \leq -P(x) \leq 1 \text{ c'est-à-dire: } -1 \leq P(x) \leq 0$$

Exercice 33

1 a. On détermine $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que pour tout x réel.

$$P(x+1) - P(x) = x$$

$$\begin{aligned} \text{On: } P(x+1) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c \\ &= a \times (x^2 + 2x + 1) + bx + b + c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c \\ &= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc: } P(x+1) - P(x) &= (ax^2 + (2a+b)x + a+b+c) - (ax^2 + bx + c) \\ &= 0x^2 + (2a+b-b)x + a+b+c-c \\ &= 2ax + a+b \end{aligned}$$

$$\text{or: } P(x+1) - P(x) = x \text{ signifie que } \begin{cases} 2a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc: } P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c ; c \in \mathbb{R}$$

b. Déduisons la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Dans l'égalité $P(x+1) - P(x) = x$.

On remplace x par: 1 On a: $P(2) - P(1) = 1$.

On remplace x par: 2: On a: $P(3) - P(2) = 2$.

On remplace x par: 3: On a: $P(4) - P(3) = 3$.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

On remplace x par n On a: $P(n+1) - P(n) = n$.

En additionnant les égalités précédentes membre à membre et après simplification on aura: $P(n+1) - P(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$\text{D'où: } \left(\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) + c \right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(1) + c \right) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+1-1) + c - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - c = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{Donc: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 On a: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ déterminons les réels a ; b ; c et d tels que

$$P(x+1) - P(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d \\
 &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d \\
 &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a+b+c+d
 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
 P(x+1) - P(x) &= (ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a+b+c+d) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\
 &= 0x^3 + (3a+b-b)x^2 + (3a+2b+c-c)x + a+b+c+d-d
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c$$

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ équivaut à: } \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad (\text{Par identification})$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -a - b = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{D'où: } P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d ; \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

► Dédoublons la somme : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$$\text{On a : } P(x+1) - P(x) = x^2.$$

$$\text{On remplace } x \text{ par } 1 \text{ on obtient: } P(2) - P(1) = 1^2.$$

$$\text{On remplace } x \text{ par } 2 \text{ on obtient: } P(3) - P(2) = 2^2.$$

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

$$\text{On remplace } x \text{ par } n \text{ on obtient: } P(n+1) - P(n) = n^2.$$

En additionnant membre à membre ces égalités et après simplification.

$$\text{On obtient: } P(n+1) - P(1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\text{d'où: } \left(\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) + d \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d \right) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\text{ainsi: } (n+1) \left(\frac{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1}{6} \right) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\text{donc: } \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\text{Conclusion: } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 34

1 a. Montrons que si $a = b$ alors -1 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned}\text{si } a = b \text{ alors } P(x) &= (a - a)x^4 + ax^3 + ax^2 - 1 \\ &= 0x^4 + ax^3 + ax^2 - 1 = ax^3 + ax^2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } P(-1) &= a(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 \\ &= -a + a - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

b. On a: $P(x) = (a - b)x^4 + b + bx^3 + ax^2 - 1$

$$\text{Si } P(-1) = -1 \text{ alors } (a - b)(-1)^4 + b(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = -1$$

$$\text{d'où : } a - b - b + a - 1 = -1$$

$$\text{donc : } 2a - 2b = 0$$

$$\text{d'où : } a = b$$

$$\text{Donc si } P(-1) = -1 \text{ alors } a = b$$

2 a. Montrons que $P(x) = 8x^3 + 8x^2 - 1$

$$\text{On a : } P(-1) = -1 \text{ donc : } a = b \text{ d'où :}$$

$$P(x) = (a - a)x^4 + ax^3 + ax^2 - 1 = ax^3 + ax^2 - 1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ signifie que } a\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}a - 1 = 0, \text{ d'où : } \frac{1}{8}a = 1, \text{ ainsi } a = 8$$

$$\text{Donc : } P(x) = ax^3 + ax^2 - 1 = 8x^3 + 8x^2 - 1$$

b. Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x + \frac{1}{2}$

$8x^3 + 8x^2 + 0x - 1$	$x + \frac{1}{2}$
$-8x^3 - 4x^2$	$8x^2 + 4x - 2$
$0 + 4x^2 + 0x - 1$	
$-4x^2 - 2x$	
$0 - 2x - 1$	
$+2x + 1$	
0	

$$\begin{aligned}\text{d'où : } P(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 4x - 2) \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(2)(4x^2 + 2x - 1)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } P(x) = (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1)$$

c. Résolvons l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \text{ un réel ; on a : } 4x^2 + 2x - 1 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \\
 &= \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \\
 &= \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\
 &= \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \left(\left(2x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
 &= \left(2x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(2x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } P(x) = 0 &\text{ équivaut à } 2x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 0 \text{ ou } 2x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 0 \\
 &\text{équivaut à } 2x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou } 2x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
 &\text{équivaut à } x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou } x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} ; \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \right\}$$

d. Déduisons le signe de $P(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } P(x) &= (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1) \\
 &= (2x + 1) \left(2x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(2x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$P(x) = 0 \text{ équivaut à } \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ ou } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right)$$

Le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	-	0	+	+
$2x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	-	-	-	0	+
$2x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Donc : $P(x) > 0$ si $x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; +\infty \right[$

$P(x) < 0$ si $x \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right[$

$P(x) = 0$ si $x \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{2} \right\}$

d. Résolvons le système $(E) \begin{cases} x^3 + x^2 > \frac{1}{8} \\ x < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^3 + 8x^2 > 1 \\ x < 0 \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} P(x) > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

équivaut à : $\begin{cases} x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; +\infty \right[\\ x < 0 \end{cases}$

équivaut à : $x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{2} \right[$

Donc : $S = \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{2} \right[$

Exercice 35

1 Montrons que -5 est une racine $P(x)$

Pour cela calculons $P(-5)$:

$$\begin{aligned} P(-5) &= (-5)^3 + 3(-5)^2 - 13(-5) - 15 \\ &= -125 + 75 + 65 - 15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(-5) = 0$ donc -5 est une racine de $P(x)$

2 a. Factorisation de $x^2 - 2x - 3$

Soit x un réel : $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4$

$$\begin{aligned} &= (x-1)^2 - 2^2 \\ &= (x-1-2)(x-1+2) \\ &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

b. Résolvons l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$

soit x un réel : $x^2 - 2x - 3 = 0$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$

équivaut à $(x-1)^2 - 2^2 = 0$

équivaut à $(x-1)^2 - 2^2 = 0$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x - 3 = 0 & \text{ équivaut à } (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0 \\
 & \text{ équivaut à } (x - 3)(x + 1) = 0 \\
 & \text{ équivaut à } x - 3 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \\
 & \text{ équivaut à } x = 3 \text{ ou } x = -1
 \end{aligned}$$

Donc $S = \{3; -1\}$

3 Factorisation de $P(x)$

On a $P(-5) = 0$ donc $P(x)$ est divisible par $x - (-5)$ c'est-à-dire par $x + 5$.
 Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 5$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 3x^2 - 13x - 15 & x + 5 \\
 -x^3 - 5x^2 & x^2 - 2x - 3 \\
 \hline
 0 - 2x^2 - 13x - 15 & \\
 + 2x^2 + 10x & \\
 \hline
 0 - 3x - 15 & \\
 + 3x + 15 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

donc: $P(x) = (x + 5)(x^2 - 2x - 3)$

Or: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

Donc: $P(x) = (x + 5)(x - 3)(x + 1)$

4 Résolvons l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0$ signifie que $(x + 5)(x - 3)(x + 1) = 0$

équivaut $x + 5 = 0$ ou $x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

c'est-à-dire $x = -5$ ou $x = 3$ ou $x = -1$

Donc: $S = \{-5; 3; -1\}$

► Résolvons l'équation $P(x) < 0$

Le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant

x	$-\infty$	-5	-1	3	$+\infty$
$x + 5$	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$P(x) < 0$ équivaut à $x \in]-\infty; -5[\cup]-1; 3[$

Donc : $S =]-\infty; -5[\cup]-1; 3[$

5 Résolvons l'équation: (E): $(x^2 - 4x)^3 + 3(x^2 - 4x)^2 - 13(x^2 - 4x) - 15 = 0$

Posons $x^2 - 4x = X$,

L'équation (E) devient: $X^3 + 3X^2 - 13X - 15 = 0$

c'est-à-dire $P(X) = 0$

d'après la question 4)

$P(X) = 0$ équivaut à $X = -5$ ou $X = 3$ ou $X = -1$

équivaut à $x^2 - 4x = -5$ ou $x^2 - 4x = 3$ ou $x^2 - 4x = -1$

équivaut à $(x - 2)^2 - 4 = 5$ ou $(x - 2)^2 - 4 = 3$ ou $(x - 2)^2 - 4 = -1$

équivaut à $(x - 2)^2 = -1$ ou $(x - 2)^2 = 7$ ou $(x - 2)^2 = 3$

impossible

équivaut $x - 2 = \sqrt{7}$ ou $x - 2 = -\sqrt{7}$ ou $x - 2 = \sqrt{3}$ ou $x - 2 = -\sqrt{3}$

équivaut $x = 2 + \sqrt{7}$ ou $x = 2 - \sqrt{7}$ ou $x = 2 + \sqrt{3}$ ou $x = 2 - \sqrt{3}$

Donc $S = \{2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$

Exercice 36

1 a. Montrons que -2 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{on a: } P(-2) &= 10(-2)^3 - 9(-2)^2 - 37(-2) + 42 \\ &= -80 - 36 + 74 + 42 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc -2 est une racine du polynôme $P(x)$

b. Déterminons le réel a :

On a $P(-2) = 0$ donc $P(x)$ est divisible par $x - (-2)$ c'est-à-dire par $x + 2$
effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 2$

$$\begin{array}{r|l}
 10x^3 - 9x^2 - 37x + 42 & x + 2 \\
 -10x^3 - 20x^2 & 10x^2 - 29x + 21 \\
 \hline
 -29x^2 - 37x + 42 & \\
 +29x^2 + 58x & \\
 \hline
 0 + 21x + 42 & \\
 -21x - 42 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Donc le quotient de la division euclidienne est $10x^2 - 29x + 21$

Le reste de la division euclidienne est 0 ; donc: $a = -29$

2 a. Montrons que $\frac{3}{2}$ est une racine de $Q(x)$

pour cela calculons $Q\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$Q\left(\frac{3}{2}\right) = 10\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 29\left(\frac{3}{2}\right) + 21 = \frac{45}{2} - \frac{87}{2} + 21 = \frac{45 - 87 + 42}{2} = 0$$

b. Factorisation de $Q(x)$

On a : $Q(x)$ divisible pour $x - \frac{3}{2}$ car $\frac{3}{2}$ est une racine de $Q(x)$.

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x - \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|l}
 10x^2 - 29x + 21 & x - \frac{3}{2} \\
 -10x^2 + 15x & 10x - 14 \\
 \hline
 0 - 14x + 21 & \\
 +14x - 21 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\text{Donc: } Q(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(10x - 14)$$

c. Résolvons l'inéquation $Q(x) < 0$

Le signe de $Q(x)$ est résumé dans le tableau suivant

$$\text{On a: } \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

x	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$	-	-	0	+
$10x - 14$	-	0	+	+
$Q(x)$	+	0	-	+

donc: $Q(x) < 0$ équivaut à $x \in \left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[$

Donc : $S = \left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[$

d. Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$; $1 + Q(x) > 0$

On a : $1 + Q(x) = 1 + 10x^2 - 29x + 21$

$$= 10x^2 - 29x + 22$$

$$= 10 \left[x^2 - \frac{29}{10}x + \frac{22}{10} \right]$$

$$= 10 \left[\left(x - \frac{29}{20} \right)^2 - \left(\frac{29}{20} \right)^2 + \frac{22}{10} \right]$$

$$= 10 \left[\left(x - \frac{29}{20} \right)^2 + \frac{39}{400} \right]$$

Infos:

$$X^2 + AX = \left(X + \frac{A}{2} \right)^2 - \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

$$X^2 - AX = \left(X - \frac{A}{2} \right)^2 - \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

On a $1 + Q(x)$ est la somme de deux nombres positifs et non nuls donc c'est un nombre strictement positif; en effet

On a : $10 \left(x - \frac{29}{20} \right)^2 \geq 0$ et $\frac{39}{100} > 0$

D'où $10 \left[\left(x - \frac{29}{20} \right)^2 + \frac{39}{100} \right] > 0$ donc $1 + Q(x) > 0$ pour tout x réel.

e. Montrons que si $\frac{7}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ alors $Q(\sqrt{2}) \in]-1; 0[$

D'après les questions précédentes

On a : $\begin{cases} Q(x) < 0 \text{ pour } x \in \left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[\\ \text{et} \end{cases}$

$\circledast \begin{cases} 1 + Q(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ en particulier pour } \frac{7}{5} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$

et on a : $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ donc on remplace x par $\sqrt{2}$ $\circledast$

On aura : $\begin{cases} Q(\sqrt{2}) < 0 \\ 1 + Q(\sqrt{2}) > 0 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} Q(\sqrt{2}) < 0 \\ Q(\sqrt{2}) > -1 \end{cases}$

Donc : $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

f. Calculons $Q(\sqrt{2})$ et montrons que $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

On a effectivement $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ car $\frac{49}{25} < 2 < \frac{9}{4}$

donc : $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

de plus : $Q(\sqrt{2}) = 10(\sqrt{2})^2 - 29(\sqrt{2}) + 21$

$$= 20 - 29\sqrt{2} + 21$$

$$= 41 - 29\sqrt{2}$$

On a d'après : $\otimes -1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

D'où : $-1 < 41 - 29\sqrt{2} < 0$

$$-1 - 41 < -29\sqrt{2} < 0 - 41$$

$$-42 < -29\sqrt{2} < -41$$

$$\frac{-41}{-29} < \sqrt{2} < \frac{-42}{-29}$$

Donc : $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

(C'est un encadrement plus précis que $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$)

Exercice 37

1 a. Vérifions que 1 est une racine de $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(1) &= -2(1)^3 + (2\sqrt{2} + 1)(1)^2 - (\sqrt{2} - 1) \cdot 1 - \sqrt{2} \\ &= -2 + 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \\ &= -2 + 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 1 est une racine de $P(x)$

b. Déterminons $Q(x)$:

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$

$-2x^3 + (2\sqrt{2} + 1)x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$	$x - 1$
$-2x^3 - (+2)x^2$	$-2x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$
$0 + (2\sqrt{2} + 1 - 2)x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$	
$-(2\sqrt{2} - 1)x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x$	
$0x^2 + (2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}$	
$-\sqrt{2}x + \sqrt{2}$	
$0x + 0$	

Donc le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$ est:

$$Q(x) = -2x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$$

2 a. Vérifier que $\sqrt{2}$ une racine de $Q(x)$

$$\begin{aligned} Q(\sqrt{2}) &= -2(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= -4 + 4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc : $Q(\sqrt{2}) = 0$

b. Factorisons $Q(x)$

Pour cela effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x - \sqrt{2}$.

$$\begin{array}{r|l} -2x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} & x - \sqrt{2} \\ +2x^2 - 2\sqrt{2}x & -2x - 1 \\ \hline -x + \sqrt{2} & \\ +x - \sqrt{2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $Q(x) = (x - \sqrt{2})(-2x - 1)$

3 a. Factorisation de $P(x)$

On a: $P(x) = (x - 1)Q(x)$
 $= (x - 1)(x - \sqrt{2})(-2x - 1)$

b. Résolvons l'équation $\frac{P(x)}{x - 1} = 0$

On a 1 est une valeur interdite ; donc l'équation est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Soit $x \neq 1$; $\frac{P(x)}{x - 1} = 0$ équivaut $\frac{(x - 1)(x - \sqrt{2})(-2x - 1)}{(x - 1)} = 0$

équivaut $(x - \sqrt{2})(-2x - 1) = 0$

équivaut $x - \sqrt{2} = 0$ ou $-2x - 1 = 0$

équivaut $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Donc: $S = \left\{ \sqrt{2}; -\frac{1}{2} \right\}$

Les équations, les inéquations et les systèmes

1 Les équations et les inéquations du premier degré à une seule inconnue.

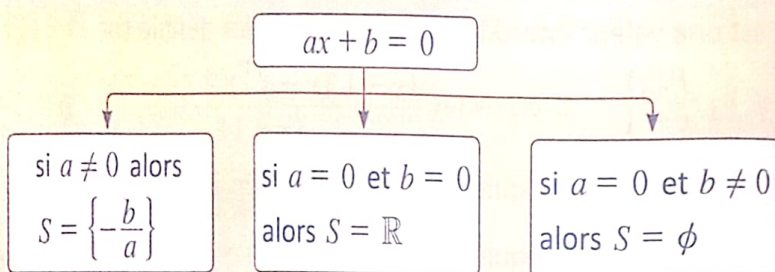
Définition:

Soit a et b deux nombres réels et $a \neq 0$.

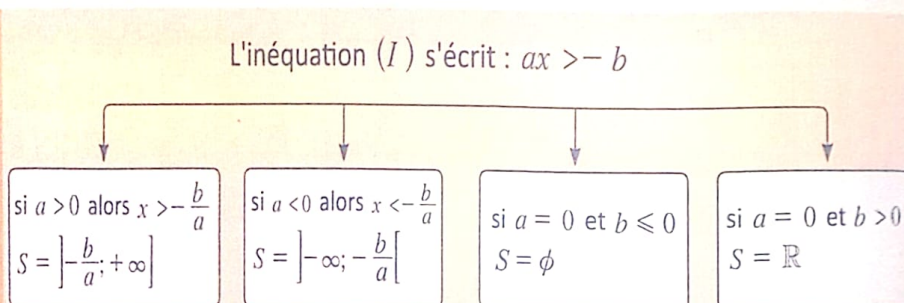
► Toute équation de la forme $ax + b = 0$ où x est l'inconnue est appelée équation du premier degré à une seule inconnue.

► Toute inéquation de la forme $ax + b \geq 0$ ou $ax + b > 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$ où x est l'inconnue est appelée inéquation du premier degré à une seule inconnue.

2. Résolution de l'équation (E): $ax + b = 0$



3. Résolution de l'inéquation (I): $ax + b > 0$



4. Signe du binôme $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

5. Équation de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

▶ Cette équation est définie si et seulement si $cx + d \neq 0$

▶ $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ équivaut à $ax + b = 0$

Exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $3(x-2) = 2(x-\sqrt{3})$

2 $\sqrt{5}(\sqrt{5}x-1) = 3+5x$

3 $\pi x + 3 = \frac{\pi}{3}\left(x - \frac{3}{\pi}\right)$

4 $\frac{2x-1}{2} + \frac{5x-1}{3} = x-1 + \frac{10x+1}{6}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $x(2x-3) = 0$

2 $(5x-1)(x+3) = 0$

3 $(x-2)^2 = x-2$

4 $x^3 - 9x = 0$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $3x^2 - 16 = 0$

2 $4x^2 = 1$

3 $(2x-1)^2 = 25$

4 $(x-7)^2 - 2 = 0$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes de deux façons : géométrique et algébrique.

1 $|x-4| = 9$

2 $|2x+3| = 8$

3 $|x-3| = |x+6|$

4 $|x-11| + 13 = 0$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\frac{2x-1}{x} = 3$

2 $\frac{x(x^2-4)}{x-2} = 0$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ discuter suivant les valeurs de m l'équation suivante :

$$(m^2 - 9)x + 2m - 6 = 0$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1 \quad 3(2x + 4) \leq 18x + 24$$

$$2 \quad 2\left(2x + \frac{1}{3}\right) > x - \frac{4}{3}$$

$$3 \quad 2(x - 1) + 3(x - 3) > 5(x - 2) - 1$$

$$4 \quad -5\left(x + \frac{1}{5}\right) \geq 3(x - 3) - 8(x - 1)$$

Exercice 8

Donner le tableau de signe de chaque expression

$$1 \quad p(x) = 2x - \frac{7}{2}$$

$$2 \quad q(x) = 1 - 3x$$

$$3 \quad r(x) = (2x - 1)(4 - 5x)$$

$$4 \quad t(x) = \frac{4x - 5}{x(1 - x)}$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$1 \quad x(3x + 1) \leq 0$$

$$2 \quad \frac{2x + 7}{2 - x} \leq 0$$

$$3 \quad 2x^3 - 4x \geq 0$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$1 \quad \begin{cases} 2(x + 3) \leq 9 - x \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$2 \quad 2x - 7 \leq 3x - 5 \leq x + 1$$

Solutions**Exercice 1**

$$1 \quad \text{Résolvons dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } (E_1): 3(x - 2) = 2(x - \sqrt{3})$$

$$\text{L'équation } (E_1) \text{ est équivalente à } 3x - 6 = 2x - 2\sqrt{3}$$

$$\text{C'est-à-dire : } 3x - 2x = 6 - 2\sqrt{3}$$

d'où $x = 6 - 2\sqrt{3}$

Finalement $S = \{6 - 2\sqrt{3}\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_2) : \sqrt{5}(\sqrt{5}x - 1) = 3 + 5x$

L'équation (E_2) est équivalente à $5x - \sqrt{5} = 3 + 5x$

c'est-à-dire $0x = 3 + \sqrt{5}$

Et comme $3 + \sqrt{5} \neq 0$ alors $S = \emptyset$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3) : \pi x + 3 = \frac{\pi}{3}\left(x - \frac{3}{\pi}\right)$

L'équation (E_3) est équivalente à $\pi x + 3 = \frac{\pi}{3}x - 1$

C'est-à-dire $\pi x - \frac{\pi}{3}x = -3 - 1$

d'où $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)x = -4$

finalement $\frac{2\pi}{3}x = -4$; donc $x = -\frac{6}{\pi}$

Conclusion : $S = \left\{-\frac{6}{\pi}\right\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_4) : \frac{2x-1}{2} + \frac{5x-1}{3} = x-1 + \frac{10x+1}{6}$

L'équation (E_4) est équivalente à :

$$\frac{3(2x-1)}{6} + \frac{2(5x-1)}{6} = \frac{6(x-1)}{6} + \frac{10x+1}{6}$$

C'est-à-dire $\frac{6x-3+10x-2}{6} = \frac{6x-6+10x+1}{6}$

d'où $16x - 5 = 16x - 5$

finalement $0x = 0$ ($a = 0$ et $b = 0$)

Donc $S = \mathbb{R}$

Exercice 2

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : x(2x-3) = 0$

On a : $x(2x-3) = 0$ signifie que $x = 0$ ou $2x-3 = 0$

C'est-à-dire $x = 0$ ou $2x = 3$

d'où $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

Finalement $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$

2 Résolvons l'équation (E_2):  $(x+3) = 0$

On a : $(5x - 1)(x + 3) = 0$ signifie que $5x - 1 = 0$ ou $x + 3 = 0$

c'est-à-dire : $5x = 1$ ou $x = -3$

finalement $x = \frac{1}{5}$ ou $x = -3$

Donc $S = \left\{-3; \frac{1}{5}\right\}$

3 Résolvons l'équation (E_3): $(x-2)^2 = x-2$

L'équation (E_3) s'écrit $(x-2)^2 - (x-2) = 0$

d'où $(x-2)(x-2-1) = 0$

c'est-à-dire $(x-2)(x-3) = 0$

finalement $x-2 = 0$ ou $x-3 = 0$

donc $x = 2$ ou $x = 3$

Par suite $S = \{2; 3\}$

4 Résolvons l'équation (E_4): $x^3 - 9x = 0$

L'équation (E_4) est équivalente à $x(x^2 - 9) = 0$

d'où $x(x-3)(x+3) = 0$; C'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -3$

Finalement $S = \{-3; 0; 3\}$

Exercice 3

1 Résolvons l'équation (E_1): $3x^2 - 16 = 0$

L'équation (E_1) s'écrit : $(\sqrt{3}x)^2 - 4^2 = 0$

c'est-à-dire: $(\sqrt{3}x - 4)(\sqrt{3}x + 4) = 0$

donc: $\sqrt{3}x - 4 = 0$ ou $\sqrt{3}x + 4 = 0$

finalement $\sqrt{3}x = 4$ ou $\sqrt{3}x = -4$

d'où: $x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{-4}{\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$

Donc: $S = \left\{\frac{-4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$

2 Résolvons l'équation (E_2): $4x^2 = 1$

L'équation (E_2) s'écrit : $4x^2 - 1 = 0$

c'est-à-dire: $(2x - 1)(2x + 1) = 0$

donc: $2x - 1 = 0$ ou $2x + 1 = 0$

finalement $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

D'où: $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

3 Résolvons l'équation (E_3) : $(2x - 1)^2 = 25$

L'équation (E_3) s'écrit $(2x - 1)^2 - 25 = 0$

donc: $((2x - 1) - 5)((2x - 1) + 5)$

c'est-à-dire: $(2x - 6)(2x + 4) = 0$

dinalement $2x - 6 = 0$ ou $2x + 4 = 0$

d'où: $2x = 6$ ou $2x = -4$

Donc: $S = \{-2; 3\}$

4 Résolvons l'équation (E_4) : $(x - 7)^2 - 2 = 0$

L'équation (E_4) s'écrit: $(x - 7 - \sqrt{2})(x - 7 + \sqrt{2}) = 0$ (car $2 = (\sqrt{2})^2$)

c'est-à-dire: $x - 7 - \sqrt{2} = 0$ ou $x - 7 + \sqrt{2} = 0$

d'où $x = 7 + \sqrt{2}$ ou $x = 7 - \sqrt{2}$

Finalement $S = \{7 - \sqrt{2}; 7 + \sqrt{2}\}$

Exercice 4

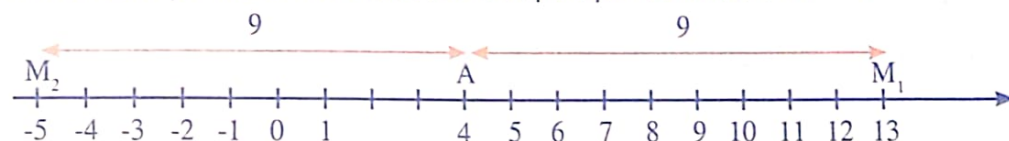
1 Résolution de l'équation (E_1) : $|x - 4| = 9$ de deux façons

a. Géométriquement :

Soit $M(x)$ et $A(4)$ deux points de la droite numérique.

L'équation (E_1) s'écrit $AM = 9$ (AM est la distance de A à M)

Il existe deux points de la droite numérique qui vérifient $AM = 9$



Ces deux points sont $M_1(13)$ et $M_2(-5)$

Donc $S = \{-5; 13\}$

b. Algébriquement :

L'équation (E_1) est équivalente à $x - 4 = 9$ ou $x - 4 = -9$

c'est-à-dire $x = 4 + 9$ ou $x = 4 - 9$

Finalement $S = \{-5; 13\}$

Infos:

$|x| = a$ et $a > 0$
signifie que $x = a$
ou $x = -a$

2 Résolvons l'équation $|2x + 3| = 8$

a. Géométriquement :

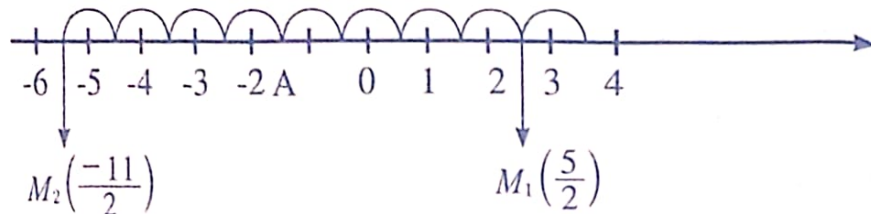
L'équation $(E_2) : |2x + 3| = 8$ s'écrit : $2\left|x + \frac{3}{2}\right| = 8$

c'est-à-dire $\left|x + \frac{3}{2}\right| = 4$

Soit $M(x)$ et $A\left(-\frac{3}{2}\right)$ deux points de la droite numérique.

L'équation (E_2) est équivalente à $AM = 4$,

il existe deux points de la droite numérique qui vérifient $AM = 4$



$$M_2\left(-\frac{11}{2}\right); M_1\left(\frac{5}{2}\right); \text{ Donc : } S = \left\{-\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right\}$$

b. Algébriquement :

L'équation $|2x + 3| = 8$ signifie que $2x + 3 = 8$ ou $2x + 3 = -8$

d'où $2x = 5$ ou $2x = -11$

c'est-à-dire $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{11}{2}$

Finalement $S = \left\{-\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

3 Résolvons l'équation $(E_3) : |x - 3| = |x + 6|$

a. Géométriquement :

Soit les points $M(x)$, $A(3)$ et $B(-6)$ des points de la droite numérique.

L'équation (E_3) signifie que $AM = BM$

donc M est le milieu du segment $[AB]$

c'est-à-dire: $M\left(\frac{3 + (-6)}{2}\right)$

d'où : $M\left(-\frac{3}{2}\right)$

Finalement $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

b. Algébriquement :

L'équation $(E_3) : |x - 3| = |x + 6|$

équivalaut à : $x - 3 = x + 6$ ou $x - 3 = -(x + 6)$

infos:

$|a| = |b|$ signifie que $a = b$
ou $a = -b$

d'où $-3 = 6$ ou $2x = -3$

Finalement $x = -\frac{3}{2}$ Donc : $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

4 Résolvons l'équation (E_1) $|x - 11| + 13 = 0$

a. Géométriquement :

Soit les points $A(11)$ et $M(x)$ deux points de la droite numérique.

L'équation (E_1) s'écrit $AM + 13 = 0$

c'est-à-dire $AM = -13$ (impossible car la distance entre deux points est positive)

D'où $S = \phi$

b. Algébriquement :

L'équation (E_1) s'écrit $|x - 11| = -13$ (impossible car la valeur absolue d'un nombre est toujours positive).

D'où $S = \phi$

Exercice 5

1 Résolvons l'équation (E_1) : $\frac{2x-1}{x} = 3$

L'équation (E_1) est définie si $x \neq 0$

pour $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation (E_1) est équivalente à $2x - 1 = 3x$

d'où $2x - 3x = 1$; c'est-à-dire $-x = 1$

Donc $x = -1$ finalement $S = \{-1\}$

2 Résolvons l'équation (E_2) : $\frac{x(x^2-4)}{x-2} = 0$

L'équation (E_2) est définie si $x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2$

pour $x \neq 2$ l'équation (E_2) signifie que $x(x^2 - 4) = 0$

c'est-à-dire $x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$

d'où $x = 0$ ou $(x - 2)(x + 2) = 0$

finalement $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

Et comme $x \neq 2$ alors $S = \{-2; 0\}$

Exercice 6

► Résolvons l'équation (E): $(m^2 - 9)x + 2m - 6 = 0$

L'équation (E) s'écrit $(m^2 - 9)x = -(2m - 6)$

Les solutions de l'équation (E) dépend du nombre $m^2 - 9$ (nul ou non nul)
or $m^2 - 9 = 0$ signifie que $(m - 3)(m + 3) = 0$

c'est-à-dire $m = 3$ ou $m = -3$

1^{er} cas : si $m = 3$

L'équation (E) s'écrit : $0x = 0$; Donc $S = \mathbb{R}$

2^{ème} cas : si $m = -3$

L'équation (E) s'écrit $0x = 12$; Donc $S = \emptyset$

3^{ème} cas : si $m \neq 3$ et $m \neq -3$ alors $x = \frac{-2(m - 3)}{(m - 3)(m + 3)} = \frac{-2}{m + 3}$

D'où $S = \left\{ \frac{-2}{m + 3} \right\}$

Conclusion:

m	$m = 3$	$m = -3$	$m \neq 3$ et $m \neq -3$
S	$S = \mathbb{R}$	$S = \emptyset$	$S = \left\{ \frac{-2}{m + 3} \right\}$

Exercice 7

1 Résolvons l'inéquation (I_1): $3(2x + 4) \leq 18x + 24$

L'inéquation (I_1) est équivalente à $6x + 12 \leq 18x + 24$

c'est-à-dire: $6x - 18x \leq 24 - 12$

d'où: $-12x \leq 12$; finalement $x \geq -1$

Donc: $S = [-1; +\infty[$

2 Résolvons l'inéquation (I_2): $2\left(2x + \frac{1}{3}\right) > x - \frac{4}{3}$

L'inéquation (I_2) s'écrit $4x + \frac{2}{3} > x - \frac{4}{3}$

c'est-à-dire $4x - x > -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}$

d'où: $3x > -2$; finalement $x > -\frac{2}{3}$

Donc: $S = \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$

3 Résolvons l'inéquation (I_3): $2(x-1)+3(x-3)>5(x-2)-1$

L'inéquation (I_3) s'écrit : $2x-2+3x-9>5x-10-1$

c'est-à-dire: $5x-11>5x-11$

d'où: $0x>0$ (impossible)

Donc: $S = \phi$

4 Résolvons l'inéquation (I_4): $-5\left(x+\frac{1}{5}\right)\geq 3(x-3)-8(x-1)$

L'inéquation (I_4) s'écrit $-5x-1\geq 3x-9-8x+8$

c'est-à-dire: $-5x-3x+8x\geq -9+8+1$

D'où: $0x\geq 0$; donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice 8

1 Dressons le tableau de signe de l'expression $p(x) = 2x - \frac{7}{2}$

On a : $2x - \frac{7}{2} = 0$ est équivalent à $x = \frac{7}{4}$

comme $2 > 0$ alors le tableau de signe de $p(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$p(x)$	-	0	+

2 Dressons le tableau de signe de l'expression $q(x) = 1 - 3x$

On a : $1 - 3x = 0$ est équivalent à $x = \frac{1}{3}$

comme $a = -3$ et $-3 < 0$ alors le tableau de signe de $q(x)$ est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$q(x)$	+	0	-

3 Dressons le tableau de signe de $r(x) = (2x-1)(4-5x)$

L'équation $2x-1=0$ signifie que $x = \frac{1}{2}$

L'équation $4-5x=0$ signifie que $x = \frac{4}{5}$

$2x - 1$	-	+	0	-	
$4 - 5x$	+	+	0	-	
$r(x)$	-	0	+	0	-

4 Dressons le tableau de signes de $t(x)$ (avec $t(x) = \frac{4x-5}{x(1-x)}$)

On a : L'équation $4x - 5 = 0$ signifie que $x = \frac{5}{4}$

L'équation $x(1-x) = 0$ signifie que $x = 0$ ou $x = 1$

L'expression $t(x)$ est non définie pour $x = 0$ et $x = 1$

Donc : le tableau de signe de $t(x) = \frac{4x-5}{x(1-x)}$ est le suivant:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$4x - 5$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$1 - x$	+	+	0	-	-
$t(x)$	+	-	+	0	-

Remarque: Les doubles barres signifie que $t(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 9

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_1): x(3x+1) \leq 0$

Dressons d'abord le tableau de signe de $x(3x+1)$

On a : $x(3x+1) = 0$ signifie que $x = 0$ ou $3x+1 = 0$

c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$;

donc : le tableau de signes de $x(3x+1)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$	
x	-		0	+	
$3x+1$	-	0	+	+	
$x(3x+1)$	+	0	-	0	+

Par conséquent l'ensemble des solutions de l'inéquation $x(3x+1) \leq 0$

$$S = \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$$

2 Résolvons l'inéquation $\frac{2x+7}{2-x} \leq 0$

L'expression $\frac{2x+7}{2-x}$ est définie pour $x \neq 2$

dressons d'abord le tableau de signe de $\frac{2x+7}{2-x}$

L'équation $2x+7=0$ signifie que $2x=-7$; C'est-à-dire $x=-\frac{7}{2}$

L'équation $2-x=0$ équivaut à $x=2$

donc : le tableau de signes de $\frac{2x+7}{2-x}$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	2	$+\infty$
$2x+7$	-	0	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$\frac{2x+7}{2-x}$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2x+7}{2-x} \leq 0$ est:

$$S =]-\infty; -\frac{7}{2}] \cup]2; +\infty[$$

3 Résolvons l'inéquation $2x^3 - 4x \geq 0$

On a: $2x^3 - 4x = 0$ signifie que $2x(x^2 - 2) = 0$

c'est-à-dire $2x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

d'où $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

dressons le tableau de signes de $2x^3 - 4x$ (c'est-à-dire le signe de $2x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$x - \sqrt{2}$	-	-	-	0	+
$x + \sqrt{2}$	-	0	+	+	+
$2x^3 - 4x$	-	0	+	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^3 - 4x \geq 0$ est:

$$S = [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

Exercice 10

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système $(S_1): \begin{cases} 2(x+3) \leq 9-x \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$

Le système (S_1) est équivalent à : $\begin{cases} x + 6 < 9 - x \\ 2x > 1 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x + x \leq 9 - 6 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} 3x \leq 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où : $\frac{1}{2} < x \leq 1$

Donc l'ensemble des solutions du système (S_1) est : $S = \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système $S_2 : 2x - 7 \leq 3x - 5 \leq x + 1$

Le système S_2 équivaut à : $\begin{cases} 2x - 7 \leq 3x - 5 \\ 3x - 5 \leq x + 1 \end{cases}$

équivaut à : $\begin{cases} 2x - 3x \leq -5 + 7 \\ 3x - x \leq 1 + 5 \end{cases}$

équivaut à : $\begin{cases} -x \leq 2 \\ 2x \leq 6 \end{cases}$

Donc : $2 \leq x \leq 3$

Finalement l'ensemble des solutions du système (S_2) est $S = [-2; 3]$

2 Équations du second degré à une inconnue

1. Définition d'une équation du second degré à une inconnue

Définition :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ tels que x est l'inconnue et a, b et c sont des nombres réels ($a \neq 0$) est appelée **équation du second degré à une inconnue**.

2. La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété :

a, b et c sont trois nombres réels et a non nul.

► Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

► L'expression $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée **la forme canonique** du

trinôme $ax^2 + bx + c$

3. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ tels que x est l'inconnue et a, b et c sont des nombres réels ($a \neq 0$)

Solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$)

Δ	On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta > 0$	L'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 avec: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \text{ donc: } S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
$\Delta = 0$	L'équation (E) admet une solution $x_1 = -\frac{b}{2a}$ donc $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
$\Delta < 0$	L'équation (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$; donc : $S = \emptyset$

4. Somme et produit des racines du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 1 :

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $P(x)$ alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
 et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque :

- ▶ Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$
- ▶ Si $b = a + c$ c'est-à-dire: $a - b + c = 0$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

5. Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Propriété 2 :

Soit s et p deux nombres réels.

Si $x + y = S$ et $x \times y = P$ alors x et y s'ils existent sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

Exercices

Exercice 11

Donner la forme canonique de chaque trinôme dans les cas suivants.

1 $x^2 + x + 3$

2 $-x^2 + 3x + 2$

3 $2x^2 + 5x - 7$

4 $x^2 + x$

Exercice 12

Résoudre sans utiliser la méthode de discriminant les équations suivantes:

1 $(2x + 3)^2 = 5$

2 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$

3 $(3x - 1)^2 = (2x + 7)^2$

4 $(x - 2)^2 + (2x - 3)^2 = 0$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $x^2 + 3x + 5 = 0$

2 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

3 $3x^2 - 4x - 15 = 0$

4 $(x^2 - 3x + 2)(2x^2 - 3x + 1) = 0$

Exercice 14

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m les équations:

1 $3x^2 + x + (m - 1) = 0$

2 $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$

3 $(m - 2)x^2 + 2x - 1 = 0$

Exercice 15

Déterminer le produit et la somme des racines de chaque trinôme après avoir vérifié leur existence (sans déterminer les racines)

1 $7x^2 - x - 3$

2 $x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2}$

3 $0,2x^2 + 0,7x - 1,1$

Exercice 16

Déterminer x et y dans chaque cas :

1 $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{3}{4} \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x \times y = -6 \end{cases}$

Exercice 17

Soit les trinômes $p(x)$ et $q(x)$ définies par: $p(x) = x^2 - 2016x + 2015$
et $q(x) = x^2 + 2016x + 2015$

1 Calculer $p(1)$ et $q(-1)$.

2 Résoudre les équations $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$
(sans calculer le discriminant).

Solutions

Exercice 11

1 Donnons la forme canonique de $x^2 + x + 3$

Pour $x^2 + x + 3$ on a : $a = 1$; $b = 1$ et $c = 3$

d'où $\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ et $b^2 - 4ac = -11$ et $4a^2 = 4$

donc $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

On peut trouver ce résultat de la manière suivante:

$$x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3$$

$$\text{Finalement: } x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

2 Donnons la forme canonique de $-x^2 + 3x + 2$

On a: $-x^2 + 3x + 2 = -(x^2 - 3x - 2)$

$$= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2\right]$$

$$\text{Finalement: } -x^2 + 3x + 2 = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right]$$

On peut appliquer la propriété (Calculer $\frac{b}{2a}$; $b^2 - 4ac$ et $4a^2$)

3 Donnons la forme canonique de $2x^2 + 5x - 7$

$$\text{On a: } 2x^2 + 5x - 7 = 2\left[x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{2}\right]$$

$$\text{Finalement: } 2x^2 + 5x - 7 = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right]$$

Infos:

la forme canonique de
 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\text{est } a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Infos:

$$X^2 + aX = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$X^2 - aX = \left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

4 Donnons la forme de canonique $x^2 + x$

On a: $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$, d'où $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Exercice 12

1 Résolvons l'équation (E_1) : $(2x + 3)^2 = 5$

L'équation: $(2x + 3)^2 = 5$ s'écrit $(2x + 3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$

c'est-à-dire: $(2x + 3 - \sqrt{5})(2x + 3 + \sqrt{5}) = 0$

d'où: $2x + 3 - \sqrt{5} = 0$ ou $2x + 3 + \sqrt{5} = 0$

finalement $2x = \sqrt{5} - 3$ ou $2x = -\sqrt{5} - 3$

donc: $x = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$ ou $x = \frac{-\sqrt{5} - 3}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $S = \left\{ \frac{\sqrt{5} - 3}{2} ; \frac{-\sqrt{5} - 3}{2} \right\}$

2 Résolvons l'équation (E_2) : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$

L'équation (E_2) est équivalente à $\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

c'est-à-dire $x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ou $x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d'où $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

Donc: $S = \left\{ \frac{\sqrt{3} - 1}{2} ; \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right\}$

3 Résolvons l'équation (E_3) : $(3x - 1)^2 = (2x + 7)^2$

L'équation (E_3) , est équivalente à $(3x - 1)^2 - (2x + 7)^2 = 0$

c'est-à-dire $((3x - 1) + (2x + 7))(3x - 1 - (2x + 7)) = 0$

d'où $(5x + 6)(x - 8) = 0$

finalement $5x + 6 = 0$ ou $x - 8 = 0$

donc: $x = -\frac{6}{5}$ ou $x = 8$

L'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est $S = \left\{ -\frac{6}{5} ; 8 \right\}$

4 Résolvons l'équation (E_4) : $(x - 2)^2 + (2x - 3)^2 = 0$

On a: $(x - 2)^2 + (2x - 3)^2 = 0$ signifie que $(x - 2) = 0$
et $2x - 3 = 0$

Infos:

$$A^2 + B^2 = 0$$

signifie que $A = 0$

et $B = 0$

c'est-à-dire $x = 2$ et $x = \frac{3}{2}$, impossible d'avoir $x = 2 = \frac{3}{2}$

D'où: $S = \emptyset$

Exercice 13

1 Résolvons l'équation $(E_1): x^2 + 3x + 5 = 0$

On a: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

donc: $\Delta = 9 - 20 = -11$

Comme $\Delta < 0$ alors $S = \emptyset$

2 Résolvons l'équation $(E_2): x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

On a: $a = 1$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 2$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

donc: $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0$

comme $\Delta = 0$ alors la solution de (E_2) est $-\frac{b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{-2} = \sqrt{2}$

C'est-à-dire: $S = \{\sqrt{2}\}$

3 Résolvons l'équation $(E_3): 3x^2 - 4x - 15 = 0$

On a: $a = 3$, $b = -4$ et $c = -15$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

d'où: le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-15)$$

$$= 196$$

on a: $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 14$

les solutions sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{4 - 14}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 14}{6}$$

finalement $x_1 = -\frac{5}{3}$ et $x_2 = 3$

Donc: $S = \left\{-\frac{5}{3}; 3\right\}$

4 Résolvons l'équation $(E_4): (x^2 - 3x + 2)(2x^2 - 3x + 1) = 0$

L'équation (E_4) est équivalente à: $x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Pour l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$

On a: $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$;

calculons le discriminant Δ : on a: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8$ alors $\Delta = 1$.

L'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

c'est à dire $x_1 = \frac{3-1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+1}{2}$

Finalement $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

► Pour l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$

On a : $a = 2$; $b = -3$ et $c = 1$

Donc: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 9 - 8 = 1 ; \text{ on a : } \Delta > 0$$

L'équation admet deux solutions réelles: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

c'est-à-dire: $x_1 = \frac{3-1}{4}$ et $x_2 = \frac{3+1}{4}$

d'où $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

L'ensemble de solutions de l'équation (E_1) est $S = \left\{ \frac{1}{2} ; 1 ; 2 \right\}$

Exercice 14

1 Résolvons l'équation suivant (E_1): $3x^2 + x + (m - 1) = 0$

Calculons le discriminant Δ .

On a : $a = 3$, $b = 1$ et $c = m - 1$

le discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 1 - 12(m - 1)$$

$$= -12m + 13$$

1^{er} Cas : si $\Delta < 0$, c'est-à-dire: $-12m < -13$ équivaut à $m > \frac{13}{12}$

alors $S = \emptyset$

2^{ème} Cas : si $\Delta = 0$ c'est-à-dire: $m = \frac{13}{12}$

alors la seule solution de l'équation (E_1) est $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{6}$

D'où $S = \left\{ -\frac{1}{6} \right\}$

3^{ème} Cas : si $\Delta > 0$ c'est-à-dire: $m < \frac{13}{12}$.

alors l'équation (E_1) admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

c'est-à-dire: $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13 - 12m}}{6}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13 - 12m}}{6}$

Finalement : $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13 - 12m}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13 - 12m}}{6} \right\}$

2 Résolvons l'équation (E_2): $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (m - 1)^2 - 4$$

$$= (m - 1 - 2)(m - 1 + 2)$$

$$= (m - 3)(m + 1)$$

déterminons le signe de Δ suivant les valeurs de m .

on a: $(m - 3)(m + 1) = 0$ signifie que $m - 3 = 0$ ou $m + 1 = 0$

c'est-à-dire $m = 3$ ou $m = -1$

Tableau de signes de Δ :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$m - 3$	-	-	0	+
$m + 1$	-	0	+	+
Δ	+	0	-	+

1^{er} Cas : si $-1 < m < -3$; alors $\Delta < 0$; d'où $S = \emptyset$

2^{ème} Cas: si $m = 3$ alors l'équation (E_2) admet une seule solution:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(m - 1)}{2}; \text{ c'est-à-dire } x_1 = -1; \text{ d'où } S = \{-1\}$$

3^{ème} Cas: si $m = -1$ alors l'équation (E_2) admet une seule solution:

$$x_1 = -\frac{m - 1}{2} = 1$$

D'où $S = \{1\}$

4^{ème} Cas: si $m \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Alors l'équation (E_2) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 tels que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{C'est-à-dire } x_1 = \frac{-(m - 1) - \sqrt{(m + 1)(m - 3)}}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-(m - 1) + \sqrt{(m + 1)(m - 3)}}{2}$$

Finalement :

$$S = \left\{ \frac{-m+1 - \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2} ; \frac{-m+1 + \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2} \right\}$$

3 Résolvons l'équation (E_3) : $(m-2)x^2 + 2x - 1 = 0$

► Si $m = 2$ alors l'équation (E_3) est une équation du premier degré qui s'écrit :

$$2x - 1 = 0$$

C'est-à-dire $2x = 1$ finalement $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

► Si $m \neq 2$ alors l'équation (E_3) est une équation du second degré dont le discriminant est: $\Delta = (2)^2 - 4 \times (m-2) \times (-1)$,

c'est-à-dire $\Delta = 4m - 4 = 4(m-1)$

1^{er} Cas : si $m < 1$ alors $\Delta < 0$, d'où $S = \emptyset$

2^{ème} Cas: si $m = 1$ alors $\Delta = 0$; alors (E_3) admet une seule solution;

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{2a} \\ &= \frac{-2}{2(m-2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement $S = \{1\}$

3^{ème} Cas: si $m > 1$ avec $(m \neq 2)$ alors $\Delta > 0$

donc (E_3) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$$\text{telles que : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{c'est-à-dire: } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4(m-1)}}{2(m-2)} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{4(m-1)}}{2(m-2)}$$

$$\text{d'où } x_1 = \frac{2(-1 - \sqrt{m-1})}{2(m-2)} \text{ et } x_2 = \frac{2(-1 + \sqrt{m-1})}{2(m-2)}$$

$$\text{Finalement } S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{m-1}}{m-2} ; \frac{-1 + \sqrt{m-1}}{m-2} \right\}$$

Exercice 15

1 Calculons le produit et la somme des racines du binôme $7x^2 - x - 3$

$$\text{On a: } \Delta = (1)^2 - 4 \times (-3) \times 7$$

$$\Delta = 85$$

Comme $\Delta > 0$ alors le trinôme $7x^2 - x - 3$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2

Or $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Alors: $x_1 + x_2 = \frac{1}{7}$ et $x_1 \times x_2 = -\frac{3}{7}$

2 Calculons le produit et la somme des racines du trinôme:

$$x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \Delta &= (1 + 2\sqrt{2})^2 - 4(2 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 8 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Delta = 1$$

comme $\Delta > 0$ alors le trinôme $x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2}$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 .

et on a: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

C'est-à-dire: $x_1 + x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ et $x_1 \times x_2 = 2 + \sqrt{2}$

3 Calculons le produit et la somme des racines du trinôme $0,2x^2 + 0,7x - 1,1$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \Delta &= (0,7)^2 - 4 \times (0,2) \times (-1,1) \\ &= (0,7)^2 + 4 \times (0,2) \times (1,1) \end{aligned}$$

donc: $\Delta > 0$

alors le trinôme $0,2x^2 + 0,7x - 1,1$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 .

et on a: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

D'où: $x_1 + x_2 = -\frac{0,7}{0,2} = -\frac{7}{2}$ et $x_1 \times x_2 = -\frac{1,1}{0,2} = -\frac{11}{2}$

Exercice 16

1 Déterminons x et y qui vérifient le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{3}{4} \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation $X^2 - 2X + \frac{3}{4} = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{3}{4}$$

$$\Delta = 1$$

D'où $X_1 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

Finalement: $\left(x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{3}{2}\right)$ ou $\left(x = \frac{3}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2}\right)$

infos:

Si $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ alors x et y

sont solutions de l'équation:
 $X^2 - sX + p = 0$

2 Déterminons x et y qui vérifient le système (S) : $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x \times y = -6 \end{cases}$

le système (S) s'écrit: $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x \times (2y) = -12 \end{cases}$

alors x et $(2y)$ sont solutions de l'équation: $X^2 - (-1)X - 12 = 0$

c'est-à-dire $X^2 + X - 12 = 0$

On a: $\Delta = (1)^2 - 4 \times (-12)$

$$\Delta = 49 = 7^2$$

d'où: $X_1 = \frac{-1-7}{2}$ et $X_2 = \frac{-1+7}{2}$

c'est-à-dire $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$

finalement $(x = -4 \text{ et } 2y = 3)$ ou $(2y = -4 \text{ et } x = 3)$

Donc: $(x = -4 \text{ et } y = \frac{3}{2})$ ou $(y = -2 \text{ et } x = 3)$

Exercice 17

1 Calculons $p(1)$ et $q(-1)$

On a: $p(x) = x^2 - 2016x + 2015$

Donc $p(1) = 1 - 2016 + 2015$ c'est-à-dire $p(1) = 0$

On a: $q(x) = x^2 + 2016x + 2015$

Donc: $q(-1) = (-1)^2 + 2016 \times (-1) + 2015$

D'où: $q(-1) = 0$

2 Résolvons les équations $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$

► Le polynôme $p(x)$ admet deux racines 1 et x_2

qui vérifient: $1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ ($a = 1$; $b = -2016$ et $c = 2015$)

alors: $x_2 = \frac{c}{a} = 2015$

D'où l'ensemble de solutions de l'équation $p(x) = 0$ est $S = \{1; 2015\}$

► Résolvons l'équation $q(x) = 0$

Le polynôme $q(x) = x^2 - 2016x + 2015$ admet deux racines 1 et x_2

qui vérifient $-1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ (avec $c = 2015$ et $a = 1$)

D'où: $-x_2 = 2015$; Finalement: $x_2 = -2015$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 0$

est: $S = \{-1; -2015\}$

3 Factorisation et signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant. Le tableau ci-dessous résume les différents cas de factorisation et du signe de $ax^2 + bx + c$ suivant le signe de Δ :

	Solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $P(x)$	Signe de $P(x)$											
$\Delta > 0$	deux solutions distinctes x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$)	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe contraire de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$										
$P(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a									
$\Delta = 0$	une seule solution $x_1 = -\frac{b}{2a}$	$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de a			
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$											
$P(x)$	signe de a	0	signe de a											
$\Delta < 0$	pas de solution	On ne peut pas factoriser $P(x)$ en deux binômes (dans $\mathbb{R}$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a						
x	$-\infty$	$+\infty$												
$P(x)$	signe de a													

Exercices

Exercice 18

Factoriser les trinômes suivants en utilisant les racines.

1 $p(x) = x^2 - 8x + 15$

2 $q(x) = 3x^2 - 10x + 3$

3 $r(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}x + 1$

4 $s(x) = -2x^2 - x + 15$

Exercice 19

Donner le tableau de signe du trinôme $P(x)$ dans chaque cas:

1 $P(x) = -x^2 + 2x + 3$

2 $P(x) = x^2 - 4x + 5$

3 $P(x) = -9x^2 + 6\sqrt{2}x - 2$

4 $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$

Exercice 20

Donner le tableau de signe de chaque expression.

1 $(1 - 2x)(x^2 - 5x + 6)$

2 $\frac{x^2 + x - 6}{-x^2 + x + 12}$

3 Factorisons le trinôme $r(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}x + 1$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0\end{aligned}$$

Le polynôme $r(x)$ admet une seule racine : $x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$

$$\text{Donc: } r(x) = \frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2$$

4 Factorisons le polynôme $s(x) = -2x^2 - x + 15$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 15 \\ &= 121 = 11^2\end{aligned}$$

d'où: $x_1 = \frac{1-11}{-4}$ et $x_2 = \frac{1+11}{-4}$ sont les racines de $s(x)$

c'est-à-dire: $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = -3$

$$\text{Donc: } s(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = (-2x + 5)(x + 3)$$

Exercice 19

Dressons le tableau de signe de $P(x)$ dans les cas suivants:

1 $P(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= (2)^2 - 4 \times (-1) \times (3) \\ &= 16 = 4^2\end{aligned}$$

d'où: $x_1 = \frac{-2-4}{-2}$ et $x_2 = \frac{-2+4}{-2}$ sont les racines de $P(x)$

c'est-à-dire: $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$;

Donc le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+	0	-

2 $P(x) = x^2 - 4x + 5$

On a: $\Delta = 16 - 20$, d'où: $\Delta < 0$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $2x^2 - 7x + 6 \leq 0$

2 $-3x^2 + 7x - 2 < 0$

3 $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3) \leq 0$

4 $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1} \geq 1$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

2 $2x^2 + 5|x| - 3 = 0$

3 $2(x - 1) - 7\sqrt{x - 1} + 3 = 0$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $x^2 - |x + 2| = 0$

Solutions

Exercice 18

1 Factorisons le trinôme $p(x) = x^2 - 8x + 15$

Pour factoriser $p(x)$, il suffit de connaître ses racines,

le discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-8)^2 - 4 \times 15$$

On a: $\Delta = 4$.

Les racines de $p(x)$ sont $x_1 = \frac{8 - \sqrt{4}}{2}$ et $x_2 = \frac{8 + \sqrt{4}}{2}$

c'est-à-dire: $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$

d'où $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = 1$

Finalement: $p(x) = (x - 3)(x - 5)$

2 Factorisons le polynôme $q(x) = 3x^2 - 10x + 3$

On a: $\Delta = (-10)^2 - 4 \times (3) \times (3)$

$$\Delta = 64$$

Les racines de $q(x)$ sont $x_1 = \frac{10 - 8}{6}$ et $x_2 = \frac{10 + 8}{6}$.

c'est-à-dire: $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 3$

Finalement: $q(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3) = (3x - 1)(x - 3)$

3 Factorisons le trinôme $r(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}x + 1$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0\end{aligned}$$

le polynôme $r(x)$ admet une seule racine : $x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$

$$\text{Donc: } r(x) = \frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2$$

4 Factorisons le polynôme $s(x) = -2x^2 - x + 15$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 15 \\ &= 121 = 11^2\end{aligned}$$

d'où: $x_1 = \frac{1-11}{-4}$ et $x_2 = \frac{1+11}{-4}$ sont les racines de $s(x)$

c'est-à-dire: $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = -3$

$$\text{Donc: } s(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = (-2x + 5)(x + 3)$$

Exercice 19

Dressons le tableau de signe de $P(x)$ dans les cas suivants:

1 $P(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= (2)^2 - 4 \times (-1) \times (3) \\ &= 16 = 4^2\end{aligned}$$

d'où: $x_1 = \frac{-2-4}{-2}$ et $x_2 = \frac{-2+4}{-2}$ sont les racines de $P(x)$

c'est-à-dire: $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$;

Donc le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+	0	-

2 $P(x) = x^2 - 4x + 5$

$$\text{On a: } \Delta = 16 - 20, \text{ d'où: } \Delta < 0$$

Donc le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	+	

3 $P(x) = -9x^2 + 6\sqrt{2}x - 2$

On a: $\Delta = (6\sqrt{2})^2 - 4 \times (-9) \times (-2) = 72 - 72 = 0$,

d'où $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, est l'unique racine de $P(x)$.

Donc le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$+\infty$
$P(x)$	-	0	-

4 $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$

On a: $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times (-4) = 64 = 8^2$

D'où les racines de $P(x)$ sont: $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = 2$,

Donc le tableau de signe de $P(x)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 20

Dressons le tableau de signe de chaque expression

1 $(1 - 2x)(x^2 - 5x + 6)$

On a: $1 - 2x = 0$ signifie que $x = \frac{1}{2}$.

Réolvons l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$, alors: $x_1 = \frac{5-1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+1}{2}$

c'est-à-dire $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ sont les solutions de cette équation.

Donc le tableau de signe de $(1 - 2x)(x^2 - 5x + 6)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$		
$1 - 2x$	+	0	-	-	-		
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0	+	
$(1 - 2x)(x^2 - 5x + 6)$	+	0	-	0	+	0	-

2 $\frac{x^2 + x - 6}{-x^2 + x + 12}$

Réolvons les équations $x^2 + x - 6 = 0$ et $-x^2 + x + 12 = 0$

► Pour l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ (1)

On a: $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$

d'où $x_1 = \frac{-1-5}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2}$

C'est-à-dire $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$, donc $S_1 = \{-3; 2\}$

► Pour l'équation $-x^2 + x + 12 = 0$ (2)

On a: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (12) = 49 = 7^2$

d'où $x_1 = \frac{-1-7}{-2}$ et $x_2 = \frac{-1+7}{-2}$

C'est-à-dire $x_1 = 4$ et $x_2 = -3$; donc $S_2 = \{4; -3\}$

L'expression $\frac{x^2 + x - 6}{-x^2 + x + 12}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-3; 4\}$, par suite son tableau de signe est le suivant.

x	$-\infty$	-3	2	4	$+\infty$	
x^2+x-6	+	0	-	0	+	
$-x^2+x+12$	-	0	+	+	0	-
$\frac{x^2+x-6}{-x^2+x+12}$	-		-	0	+	-

Exercice 21

Réolvons les inéquations suivantes:

1 $2x^2 - 7x + 6 \leq 0$

On a: $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6$

$\Delta = 1$

D'où: $x_1 = \frac{7-1}{4}$ et $x_2 = \frac{7+1}{4}$

C'est-à-dire $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$ sont les solutions de l'équation: $2x^2 - 7x + 6 = 0$

Donc le tableau de signe de $2x^2 - 7x + 3$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'où l'ensemble de solutions de l'inéquation $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$ est $S = \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$

2 $-3x^2 + 7x - 2 < 0$

On a: $\Delta = 49 - 24$
 $= 25 = 5^2$

d'où $x_1 = \frac{-7-5}{-6}$ et $x_2 = \frac{-7+5}{-6}$

donc $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{3}$ sont les solutions de l'équation: $-3x^2 + 7x - 2 = 0$

Donc le tableau de signe de $-3x^2 + 7x - 2$ est le suivant:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$	
$-3x^2+7x-2$	-	0	+	0	-

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2 + 7x - 2 < 0$

est $S = \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[\cup] 2 ; +\infty [$

3 $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3) \leq 0$

On a: $x^2 - 3 = 0$ signifie que $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Pour l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$

On a: $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (2)$

$\Delta = 9 = 3^2$

D'où $x_1 = \frac{-1-3}{-2}$ et $x_2 = \frac{-1+3}{-2}$

Donc 2 et -1 sont les solutions de l'équation: $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3) = 0$

Donc le tableau de signe de $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3)$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	-	-	0	+
$-x^2 + x + 2$	-	-	0	+	+	0
$(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3)$	-	0	+	0	+	0

infos:

l'équation $x^2 = a$; $a > 0$
 admet deux solutions $x_1 = \sqrt{a}$
 et $x_2 = -\sqrt{a}$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 3) \leq 0$ est

$$S =]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [-1 ; \sqrt{3}] \cup [2 ; +\infty[$$

Exercice 22

Réolvons les équations suivantes

1 $(E_1) : x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

Posons $X = x^2$ avec $X \geq 0$.

L'équation (E_1) s'écrit: $X^2 - 4X - 5 = 0$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \times (1) \times (-5) \\ = 36 = 6^2$$

$$\text{d'où: } X = \frac{4-6}{2} \quad \text{ou } X = \frac{4+6}{2}$$

c'est-à-dire: $X = -1$ ou $X = 5$

-1 n'est pas solution (Car $X \geq 0$)

donc: $X = 5$; C'est-à-dire: $x^2 = 5$

finalement $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

L'ensemble de solutions de l'équation $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$; est $S = \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

2 $(E_2) : 2x^2 + 5|x| - 3 = 0$

(E_2) s'écrit $2|x|^2 + 5|x| - 3 = 0$.

On pose $X = |x|$ avec $X \geq 0$.

L'équation (E_2) devient $2X^2 + 5X - 3 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 = 7^2$$

$$\text{d'où: } X = \frac{-5-7}{4} \quad \text{ou } X = \frac{-5+7}{4}$$

c'est-à-dire: $X = -3$ ou $X = \frac{1}{2}$

-3 n'est pas solution (Car $X \geq 0$)

donc: $X = \frac{1}{2}$

c'est-à-dire $|x| = \frac{1}{2}$

d'où $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

L'ensemble de solutions de l'équation (E_2) est $S = \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$

infos:

$$|x|^2 = x^2$$

infos:

$|x| = a$, $a \geq 0$ signifie $x = a$ ou $x = -a$

$$2(E_3): 2(x-1) - 7\sqrt{x-1} + 3 = 0$$

L'équation (E_3) est définie pour $x-1 \geq 0$ (c'est-à-dire $x \geq 1$)

dans ce cas on a : $(\sqrt{x-1})^2 = x-1$

posons $X = \sqrt{x-1}$ avec $X \geq 0$.

L'équation (E_3) devient : $2X^2 - 7X + 3 = 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 = 5^2$$

$$\text{d'où: } X = \frac{7-5}{4} \text{ ou } X = \frac{7+5}{4}$$

$$\text{c'est-à-dire: } X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = 3$$

$$\text{donc: } \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \text{ ou } \sqrt{x-1} = 3$$

$$\text{dinalement } x-1 = \frac{1}{4} \text{ ou } x-1 = 9$$

$$\text{d'où } x = 1 + \frac{1}{4} \text{ ou } x = 10$$

L'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est $S = \left\{ \frac{5}{4}; 10 \right\}$

info

$\sqrt{x} = a (a \geq 0)$
signifie que $x = a^2$

Exercice 23

► Résolvons l'équation (E) : $x^2 - |x+2| = 0$

1^{er} Cas : si $x+2 \geq 0$ (C'est-à-dire $x \geq -2$)

$$\text{alors: } |x+2| = x+2$$

L'équation (E) s'écrit $x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times (1 \times -2) = 9 = 3^2$$

$$\text{d'où: } x = \frac{1-3}{2} \text{ ou } x = \frac{1+3}{2}$$

$$\text{d'est-à-dire: } x = -1 \text{ ou } x = 2$$

comme $-1 \geq -2$ et $2 \geq -2$

alors -1 et 2 sont les solutions de l'équation (E) dans $[-2; +\infty[$

$$\text{Donc: } S_1 = \{-1; 2\}$$

2^{ème} Cas: si

$$x+2 \leq 0 \text{ (c'est-à-dire } x \leq -2) \text{ alors } |x+2| = -(x+2)$$

L'équation (E) s'écrit $x^2 + x + 2 = 0$

On a: $\Delta = -7$ c'est-à-dire $\Delta < 0$

(E) n'admet pas de solutions dans $]-\infty; -2]$; finalement: $S = \{-1; 2\}$

4 Équations du premier degré à deux inconnues

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que: $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Définition et propriété :

Toute équation de la forme (1) $ax + by + c = 0$ tels que : a , b et c sont trois nombres réels donnés; avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une équation du premier degré à deux inconnues x et y .

► Le couple $(x_0; y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ est solution de l'équation (1) si et seulement si $ax_0 + by_0 + c = 0$.

► Résoudre l'équation (1) c'est déterminer tous les couples $(\alpha; \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $a\alpha + b\beta + c = 0$.

5 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Soit le système $(S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ tels que a , a' , b et b' sont des nombres réels.

Définition et propriété :

Le nombre $D = ab' - a'b$ est appelé déterminant du système (S) et on note: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

$$\text{note: } D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

► Si $D = 0$ alors le système (S) n'admet aucune solution ou bien il admet une infinie de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

► Si $D \neq 0$ alors le système (S) est appelé système de Cramer et admet une seule solution, c'est le couple $(x; y)$ tels que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{cb' - bc'}{D} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac' - a'c}{D}$$

$$\text{Soit } D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

alors l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) \right\}$.

► Dans le cas où $D = 0$ et $D_x = 0$, le système admet une infinité de solutions (les deux équations sont équivalentes).

▶ Dans le cas où $D = 0$ et $D_r \neq 0$ ou $D_r \neq 0$ alors le système n'admet pas de solutions.

Exercices

Exercice 24

On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $(E): 2x - 3y = 5$

- 1 Déterminer parmi les couples suivants ceux qui sont solutions de l'équation (E) : $(1; 1)$, $(1; -1)$ et $(-5; -5)$.
- 2 Trouver le réel a sachant que le couple $(a; 2)$ est solution de l'équation (E) .
- 3 Déterminer le réel b sachant que le couple $(\frac{b}{3}; 2b)$ est solution de l'équation (E) .
- 4 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E) .

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chaque système:

$$(S_1): \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} 3x - y = 6 \\ -x + \frac{1}{3}y = -2 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}y = \sqrt{7} \end{cases}$$

Exercice 26

- 1 Déterminer l'ensemble des réels m pour que le système (S) admet une seule solution dans $\mathbb{R}^2$. $(S): \begin{cases} (m-1)x + y = 5 \\ 3x + (m-3)y = 2 \end{cases}$
- 2 Résoudre le système (S) dans les cas suivants: $m = 3$ et $m = 0$.

Exercice 27

- 1 Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient (dans chaque cas):
 - a. $2x - y + 5 > 0$
 - b. $x + y \leq 0$

2 En déduire une représentation dans le même plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient le système:

$$\begin{cases} 2x - y + 5 > 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$$

Solutions

Exercice 24

1 Déterminons les couples qui sont solutions de l'équation $(E): 2x - 3y = 5$.

► Pour le couple $(1; 1)$:

On a: $2 \times 1 - 3 \times 1 = -1$ et $-1 \neq 5$

Donc le couple $(1; 1)$ n'est pas solution de l'équation (E) .

► Pour le couple $(1; -1)$:

On a: $2 \times 1 - 3 \times (-1) = 5$

Donc le couple $(1; -1)$ est solution de l'équation (E) .

► Pour le couple $(-5; -5)$:

On a: $2 \times (-5) - 3 \times (-5) = 5$

Donc le couple $(-5; -5)$ est solution de l'équation (E) .

2 Déterminons a sachant que le couple $(a; 2)$ est solution de (E) .

On a le couple $(a; 2)$ est solution (E) signifie que: $2a - 3 \times 2 = 5$

C'est-à-dire: $2a = 11$; Donc: $a = \frac{11}{2}$

3 Déterminons b sachant que $(\frac{b}{3}; 2b)$ est solution de l'équation (E) .

On a le couple $(\frac{b}{3}; 2b)$ est solution de (E) signifie que: $2 \times \frac{b}{3} - 3 \times 2b = 5$

c'est-à-dire: $-\frac{16}{3}b = \frac{15}{3}$

D'où: $b = -\frac{15}{16}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E): $2x - 3y = 5$.

On a: $2x - 3y = 5$ signifie que: $-3y = -2x + 5$

C'est-à-dire: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

D'où: l'ensemble des solutions de (E) est: $S = \left\{ \left(x; \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

Remarque: On peut déterminer x en fonction de y ($x = \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$)

et dans ce cas on aura: $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 25

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants:

1 $(S_1): \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$

Calculons le déterminant D du système (S_1) :

$$\text{On a: } D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ = 6 + 6 = 12$$

on a: $D \neq 0$; alors le système (S_1) admet une seule solution

$$\text{Calculons } D_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \text{ et } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{On a: } D_x = 12 - (5 \times (-3)) \text{ et } D_y = 1 \times 5 - (2 \times 2)$$

$$\text{Donc: } D_x = 27 \text{ et } D_y = 1$$

$$\text{Et comme } x = \frac{D_x}{D} \text{ et } y = \frac{D_y}{D}$$

$$\text{Alors: } x = \frac{27}{12} \text{ et } y = \frac{1}{12}; \text{ C'est-à-dire: } x = \frac{9}{4} \text{ et } y = \frac{1}{12}$$

$$\text{Finalement: } S = \left\{ \left(\frac{9}{4}; \frac{1}{12} \right) \right\}$$

2 $(S_2): \begin{cases} 3x - y = 6 \\ -x + \frac{1}{3}y = -2 \end{cases}$

Calculons le déterminant D du système (S_2) :

$$\text{On a: } D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(3 \times \frac{1}{3} \right) - (-1) \times (-1) = 0$$

et $D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 6 \times \frac{1}{3} - (-1) \times (-2)$ C'est-à-dire: $D_x = 0$

comme $D = 0$ et $D_x = 0$ alors le système (S_2) admet une infinité de solutions.

Les équations du système (S_2) sont équivalentes.

On a: (S_2) équivaut à: $3x - y = 6$.

Réolvons l'équation: $3x - y = 6$.

On a: $3x - y = 6$ signifie que $y = 3x - 6$

D'où l'ensemble des solutions du système (S_2) est: $S = \{(x; 3x - 6) / x \in \mathbb{R}\}$

3 $(S_3): \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}y = \sqrt{7} \end{cases}$

Calculons le déterminant D du système (S_3) .

On a: $D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} \end{vmatrix}$
 $= -3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - (2\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}))$
 $= 0$

et on a: $D_x = \begin{vmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{7} & -3\sqrt{2} \end{vmatrix}$
 $= -3\sqrt{2} \times \sqrt{6} - (-\sqrt{3}) \times \sqrt{7}$
 $= -6\sqrt{3} + \sqrt{21}$

Comme $D_x \neq 0$ et $D = 0$; alors: $S = \emptyset$

Exercice 26

1 Déterminons les valeurs de m pour que le système (S) admet une seule solution.

On a: $(S): \begin{cases} (m-1)x + y = 5 \\ 3x + (m-3)y = 2 \end{cases}$

alors (S) admet une seule solution si son déterminant D est différent de zéro ($D \neq 0$).

On a: $D = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 3 & m-3 \end{vmatrix}$
 $= (m-1)(m-3) - 3$
 $= m^2 - 4m$

alors $D = 0$ signifie que $m(m-4) = 0$

c'est-à-dire: $m = 0$ ou $m = 4$

Donc le système (S) admet une seule solution si $m \in \mathbb{R} - \{0; 4\}$

2 Résolvons le système (S) dans les cas où $m = 0$.

Dans ce cas on a: $(S): \begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$

on a: $D = 0$ et $D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$
 $= -17$

alors: $D_x \neq 0$ et $D = 0$; Donc: $S = \emptyset$.

► Résolvons (S) dans le cas où $m = 3$.

On a: $(S): \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x = 2 \end{cases}$; équivaut à: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 5 - 2x \end{cases}$
 équivaut à: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$

Donc: $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3} \right) \right\}$

Exercice 27

1 a. Représentons dans le plan les points $M(x; y)$ qui vérifient $2x - y + 5 > 0$.

Traçons la droite (D_1) d'équation $2x - y + 5 = 0$

Les points $A(0; 5)$ et $B(-2; 1)$ sont deux points de (D_1) .

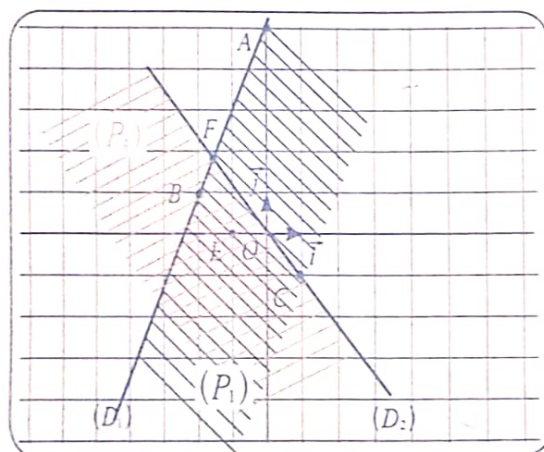
On obtient deux demi-plans (P_1) et (P_2) de frontière la droite (D_1) .

(P_1) contient le point O et (P_2) ne contient pas le point O .

Car les coordonnées de O vérifient $2x - y + 5 > 0$.

Donc l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $2x - y + 5 > 0$.

C'est le demi-plan (P_1) privé de (D_1) (partie hachurée en bleu).



b. Représentons l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $x + y \leq 0$.

Traçons la droite (D_2) d'équation: $x + y = 0$.

(D_2) passe par les points $O(0; 0)$ et $C(1; -1)$.

On obtient deux demi plans (P_3) et (P_4) de frontière (D_2) .

On a les coordonnées du point $E(-1; 0)$ vérifie l'équation $x + y \leq 0$.

Donc l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifie $x + y \leq 0$ est le demi-plan (P_4) qui contient E . (hachurée en orange)

2 Représentation de l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient le système:

$$(S): \begin{cases} 2x - y + 5 < 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$$

L'ensemble cherché est la partie colorée de deux couleurs.

C'est le secteur angulaire $B\hat{F}O$ privée de la demi-droite $[FK)$.

(Voir schéma) F est le point commun entre les droites (D_1) et (D_2) .

Exercices de synthèse

Exercice 28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $\left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - 5\right) = 0$

2 $x^3 - 3x^2 = 0$

3 $\frac{5x - 3}{2} - \frac{2x + 1}{3} = \frac{11(x - 1)}{6}$

4 $(\sqrt{2}x - 1)\left(\frac{3x + \sqrt{2}}{6}\right) = 0$

Exercice 29 Equations qui se ramènent à des équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $(0,6x - 5)^7 = 0$

2 $(\sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2})^{11} = 0$

3 $(2x - 3)^4 \left(\frac{2x}{15} - 0,2\right)^2 = 0$

4 $x^2(x^2 - x)^3 = 0$

Exercice 30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $3(x - 3)^2 = x^2 - 9$

2 $4(x + 1)^2 = 9x^2$

3 $(2x + 1)(x - 3)^2 = 2x + 1$

4 $(x^2 - 3x + 2)^2 - (x^2 + 5x - 2)^2 = 0$

5 $(3x + 1)^3 - (3x + 1) = 0$

6 $8x^4 = x^2$

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$1 \quad (2x-1)(x-2) + 2(x^2-4) = 3(x-2)^2 \quad 2 \quad x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$3 \quad x^3 - 1 = (x-1)^2 \quad 4 \quad (2x-3)^2 - 9(x-3) = x^2$$

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$1 \quad 3x^2 - x + (3x-1)^2 = 1 - 3x$$

$$2 \quad (x+1)^4 - 8(x+1) = 4(x^2-1)$$

Exercice 33

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$1 \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$2 \quad \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

$$3 \quad \frac{2x-1}{4x^2-1} = 1$$

$$4 \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{4x-1}{x^2+x}$$

$$5 \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$$

Exercice 34 Équations contenant un paramètre

Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations suivantes:

$$(E): mx - 3(m-1) = \frac{m}{2} + \frac{7+x}{2}$$

$$(F): (4m+7)x + m = 3mx + 10x + 3m - 6$$

$$(G): m(mx-2) + (m+1)x = x-2 + m(m-3)$$

Exercice 35 Équations avec valeur absolue.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$1 \quad |x-3| - 2|x+1| = 0$$

$$2 \quad |x^2-1| = |x-1|$$

$$3 \quad x^2 - |x| = 0$$

Exercice 36

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $|3x - 6| + |x^2 - 4| = 0$

2 $|x| + x^3 = 0$

3 $|3x - 1| = x$

4 $|x - 3| + x = 3$

Exercice 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $|x - 2| + 4\left|1 - \frac{x}{4}\right| = 3x - 5$

2 $|x| - 2|x + 1| + 3|x - 2| = 0$

Exercice 38 Les systèmes du premier degré à deux inconnues.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants:

1
$$\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{6}y = \sqrt{3} \\ x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

Exercice 39

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants:

1
$$\begin{cases} |x| + 3|y| = 9 \\ 2|x| + 14|y| = 2 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ 2x^2 + 14y = 2 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9 \\ 2\sqrt{x} + 14y = 2 \end{cases}$$

Exercice 40

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant: (S):
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 5 \\ \frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$$

Exercice 41 Inéquations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $\frac{1}{3}(2x - 1) \geq x - \frac{1}{2}$

2 $\frac{x-1}{7} < \frac{3x+1}{2}$

3 $\frac{10\sqrt{2}x-3}{5} - \frac{2\sqrt{2}x+1}{2} \geq x\sqrt{2} + 3$

4 $\sqrt{3}(2x + 3\sqrt{3}) > \sqrt{3}(2x + 1) + \sqrt{5}$

Exercice 42 Inéquations du premier degré avec paramètre

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m les inéquations suivantes:

1 $2mx - 3m(x + 2) > x(m - 3)$

2 $m(mx - 2) \leq 2(3 + mx) - 10$

3 $(m^2 - 9)x > (m - 3)$

Exercice 43 Signe d'une expression

Donner le tableau de signes de chaque expression

1 $\frac{2 - 5x}{x + 3}$

2 $\frac{(x + 1)^2}{2 - 3x}$

3 $\frac{1 - x}{(x - 3)(4 - x)}$

Exercice 44

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $\frac{3x - 1}{x} \leq \frac{2}{3}$

2 $\frac{(x + 2)^2}{x - 3} \geq 0$

3 $\frac{(3x - 1)x}{2x + 1} \leq 0$

Exercice 45

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants:

1
$$\begin{cases} 3(1 - x) \geq 2x - 7 \\ 4 + 3x < 5x + 3 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} 5x - 6 \leq 3 - 4x \\ 3 - 4x < \frac{3}{2} - 3x \end{cases}$$

Exercice 46

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 9x + 10 = 0$

2 En déduire les solutions de l'équation $2x - 9\sqrt{x} + 10 = 0$

Exercice 47

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(x - 3)^2 + 2x(x - 3) + x^2 = 0$

2 Dresser le tableau de signe de l'expression $x(x - 3)$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(x - 3)^2 + 2|x(x - 3)| + x^2 = 9$

Exercice 48

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1 $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

2 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

3 $\left(\frac{2}{2x-1}\right)^2 - \frac{14}{2x-1} + 12 = 0$

4 $(x-1)^4 + 4(x-1)^2 - 5 = 0$

Exercice 49

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $3x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$

1 Vérifier que l'équation (E) admet deux solutions distinctes a et b (sans les déterminer).

2 Calculer $a + b$, $a \times b$ et $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$.

3 Calculer $a^2 + b^2$ et $a^2b + b^2a$

Exercice 50

Déterminer, dans chaque cas, les couples (x, y) (s'ils existent qui vérifient le système).

1
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = \frac{-15}{4} \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 36 \end{cases}$$

Exercice 51

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x \times y = -12 \end{cases}$$

Exercice 52 Inéquations du second degré.

Résoudre les inéquations suivantes:

1 $3x^2 + 10x + 8 \geq 0$

2 $2x^2 + 5x - 3 < 0$

3 $(4x^2 - 9)(-3x^2 - x + 4) \leq 0$

4 $x^2 + 3x + 4 \geq 0$

Exercice 53

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $x^5 - 8x^2 \leq 0$

2 $\left[\frac{1}{2x(2x-1)}\right]^2 \leq \frac{1}{4x^2}$

Exercice 54

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1 $\frac{(x^2 - 4x + 4)^2}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$

2 $\frac{x+1}{x} < \frac{x+2}{x+3}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système:
$$\begin{cases} x^2 + 14x - 15 \geq 0 \\ -x^2 - x + 2 < 0 \end{cases}$$

Exercice 55

Résoudre l'inéquation suivante: $\frac{(x+1)^2}{x+3} \leq 2$

Exercice 56

Soit $P(x)$ le polynôme défini par: $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$

1 Vérifier que $P(1) = 0$

2 a. Déterminer les réels a et b tels que: $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx - 8)$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $x\sqrt{x} + x = 2(5\sqrt{x} - 4)$

Exercice 57

1 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$ puis dresser le tableau de signes de $P(x) = x^2 - 7x + 12$

b. Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 - 7x + 12$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a. $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$; b. $x - 7\sqrt{x} + 12 > 0$

Exercice 58

On considère le polynôme $P(x) = 6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6$

1 a. Est-ce que le nombre 0 est une racine de $P(x)$?

b. Montrer que $\frac{3}{2}$ est une racine de $P(x)$.

2 Déterminer le polynôme $q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)q(x)$.

3 a. Soit a un nombre réel non nul.

Montrer que: $\frac{P(a)}{a^4} = P\left(\frac{1}{a}\right)$

b. En déduire les racines de $P(x)$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq (x+1)(2x-3)(x-2)$

Exercice 59

Soit le polynôme $P(x)$ défini par: $P(x) = 6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6$

1 a. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$.

b. Montrer que $\frac{P(x)}{x^2} = 6t^2 - 19t + 13$ où $t = x + \frac{1}{x}$ et $x \neq 0$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6t^2 - 19t + 13 = 0$.

3 En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$, dans $\mathbb{R}$.

Exercice 60

On considère l'équation (E): $x^2 - 8x - 2 = 0$

1 On pose $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

a. Vérifier que $\frac{a}{b} = 4 - 3\sqrt{2}$

b. Vérifier que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) - 2 = 0$

c. En déduire les solutions de l'équation (E) sans calculer le discriminant (Δ).

Exercice 61

On considère les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que:

$$P(x) = 2x^2 + 11x - 21 \text{ et } Q(x) = 2x^3 + 9x^2 - 33x + 14.$$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = xP(x)$.

2 a. Vérifier que $Q(x)$ est divisible par $(x-2)$.

b. En déduire les solutions de l'équation $Q(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

3 Calculer $P(1)$ et $Q(1)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = Q(x)$

Exercice 62

On considère le polynôme: $P(x) = x^4 + 12x^3 + 50x^2 + 84x + 45$

- 1 Montrer que -3 est une racine du polynôme $P(x)$.
- 2 a. Déterminer le réel k sachant $P(x) + k = (x^2 + 6x + 7)^2$.
b. En déduire que $P(x) = (x + 3)^2(x^2 + 6x + 5)$
- 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

Exercice 63

On considère le polynôme $P(x)$ défini par: $P(x) = 10x^3 - 9x^2 - 37x + 42$

- 1 a. Montrer que $P(x)$ est divisible par $x + 2$.
b. Déterminer le réel a tel que $P(x) = (x + 2)(10x^2 + ax + 21)$
- 2 On considère le polynôme $Q(x)$ défini par: $Q(x) = 10x^2 - 29x + 21$.
a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$
b. Montrer que pour tout réel x on a: $(1 + Q(x)) > 0$
c. Vérifier que $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, en déduire que $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$
d. Calculer $Q(\sqrt{2})$, en déduire que $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

Exercice 64

On considère le polynôme $P(x)$ défini par:

$$P(x) = x^3 - (2 + m)x^2 - 4mx + (11m + 3) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

- 1 Déterminer m sachant que 2 est une racine de $P(x)$.
- 2 On suppose dans la suite que $m = 3$.
a. Déterminer les réels a , b et c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$
d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x\sqrt{x} - 5x - 12\sqrt{x} + 36 < 0$

e. Soit α un réel tel que : $-1 < \alpha < 1$

Déterminer le signe de $Q(\alpha)$.

Exercice 65

On considère le polynôme $P(x)$ et l'équation (F) tels que :

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \text{ et } (F) : X^2 - 2X - 3 = 0$$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (F)

2 a. Vérifier que $P(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

3 a. Écrire $P(x)$ sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c)^2$.

b. En déduire le signe de $P(\sqrt{2})$.

Exercice 66

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 - 3x - 4 = 0$ et le polynôme :

$$P(x) = -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4.$$

1 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

b. En déduire la résolution de l'équation $|x^2 - 4|^2 - 3|x^2 - 4| - 4 = 0$.

2 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x+1)$.

3 a. Développer et réduire $(-2x+1)(x^2-3x-4)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

► L'inéquation $P(x) \leq 0$

► L'équation : $-2x\sqrt{x} + 7x + 5\sqrt{x} - 4 = 0$

Exercice 67

Soit $P(x)$ le polynôme défini par :

$$P(x) = 2x^3 + (1 - 2\sqrt{3})x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$$

1 a. Montrer que (-1) est une racine du polynôme $P(x)$.

b. Vérifier que $P(x) = (x+1)(2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3})$.

2 a. Vérifier que : $(2\sqrt{3} - 1)^2 = 13 - 4\sqrt{3}$ et en déduire la résolution de l'équation: $2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

b. Écrire $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs des polynômes de premier degré.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 2x(2x-1)(x+1)$

Exercice 68

A. On considère le polynôme $P(x)$ défini par:

$$P(x) = x^3 + (\sqrt{3} - 2)x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3}$$

1 a. Vérifier que $P(-1) = 0$

b. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x+1)Q(x)$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.

3 a. Dresser le tableau de signe de $P(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation:

$$x^2|x| + (\sqrt{3} - 2)x^2 - (3 + 2\sqrt{3})|x| - 3\sqrt{3} \geq 0$$

B. On considère les nombres réels a , b et c qui vérifient le système

$$(S): \begin{cases} a+b+c = 2-\sqrt{3} \\ a^2+b^2+c^2 = 13 \\ abc = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

1 Développer $(a+b+c)^2$, en déduire que : $ab+ac+bc = -3-2\sqrt{3}$

2 Calculer $P(a)$; $P(b)$ et $P(c)$.

3 Déduire les triplets (a, b, c) solutions du système (S) .

Solutions

Exercice 28

1 Résolvons l'équation $(3x - \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x - 5) = 0$

On a : $(3x - \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x - 5) = 0$ est équivalente à $3x - \frac{1}{2} = 0$ ou $\frac{1}{2}x - 5 = 0$

c'est-à-dire : $3x = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}x = 5$; D'où: $x = \frac{1}{6}$ ou $x = 10$

Finalement: $S = \{\frac{1}{6}; 10\}$

2 Résolvons l'équation $x^3 - 3x^2 = 0$

L'équation $x^3 - 3x^2 = 0$ est équivalente à $x^2(x - 3) = 0$

c'est-à-dire: $x^2 = 0$ ou $x - 3 = 0$; D'où $x = 0$ ou $x = 3$

Finalement: $S = \{0; 3\}$

3 Résolvons l'équation $\frac{5x-3}{2} - \frac{2x+1}{3} = \frac{11(x-1)}{6}$

L'équation (E) est équivalente à $\frac{3(5x-3)}{6} - \frac{2(2x+1)}{6} = \frac{11x-11}{6}$

d'où: $3(5x-3) - 2(2x+1) - (11x-11) = 0$

c'est-à-dire: $15x - 4x - 11x = 9 + 2 - 11$

D'où: $0x = 0$; Finalement: $S = \mathbb{R}$

4 Résolvons l'équation $(\sqrt{2}x - 1)\left(\frac{3x + \sqrt{2}}{6}\right) = 0$

L'équation $(\sqrt{2}x - 1)\left(\frac{3x + \sqrt{2}}{6}\right) = 0$ est équivalente à $\sqrt{2}x - 1 = 0$ ou $\frac{3x + \sqrt{2}}{6} = 0$

c'est-à-dire: $\sqrt{2}x = 1$ ou $3x + \sqrt{2} = 0$

d'où $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Finalement $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice 29

1 Résolvons l'équation $(E_1): (0,6x - 5)^7 = 0$

L'équation (E_1) est équivalente à $0,6x - 5 = 0$

c'est-à-dire: $0,6x = 5$

d'où: $x = \frac{5}{0,6} = \frac{25}{3}$

Finalement: $S = \left\{\frac{25}{3}\right\}$

2 Résolvons l'équation $(E_2): (\sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2})^{11} = 0$

L'équation (E_2) est équivalente à $\sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2} = 0$

c'est-à-dire: $\sqrt{2}x = 3 - \sqrt{2}$

$$\text{d'où : } x = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$\text{Finalement: } S = \left\{ \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$$

3 Résolvons l'équation (E_3) : $(2x - 3)^4 \left(\frac{2x}{15} - 0,2 \right)^2 = 0$

L'équation (E_3) est équivalente à: $(2x - 3)^4 = 0$ ou $\left(\frac{2x}{15} - 0,2 \right)^2 = 0$

c'est-à-dire: $2x - 3 = 0$ ou $\frac{2x}{15} - 0,2 = 0$

d'où: $x = \frac{3}{2}$ ou $2x = 0,2 \times 15$

donc: $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

$$\text{Finalement: } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

4 Résolvons l'équation (E_4) : $x^2(x^2 - x)^3 = 0$

L'équation (E_4) est équivalente à: $x^2 = 0$ ou $(x^2 - x)^3 = 0$

c'est-à-dire: $x = 0$ ou $x^2 - x = 0$

d'où: $x = 0$ ou $x(x - 1) = 0$

donc: $x = 0$ ou $x = 0$ ou $x = 1$

$$\text{Finalement: } S = \{0; 1\}$$

Exercice 30

1 Résolvons l'équation (E_1) : $3(x - 3)^2 = x^2 - 9$

L'équation (E_1) est équivalente à $3(x - 3)^2 - (x^2 - 9) = 0$

c'est-à-dire: $3(x - 3)^2 - (x - 3)(x + 3) = 0$

d'où: $(x - 3)[3(x - 3) - (x + 3)] = 0$

donc: $(x - 3)(2x - 12) = 0$

par suit: $x - 3 = 0$ ou $2x - 12 = 0$

ce qui signifie: $x = 3$ ou $x = 6$

$$\text{Finalement: } S = \{3; 6\}$$

2 Résolvons l'équation $(E_2): 4(x+1)^2 = 9x^2$

L'équation (E_2) est équivalente à $[2(x+1)]^2 - (3x)^2 = 0$

c'est à dire: $(2(x+1) - 3x)(2(x+1) + 3x) = 0$

d'où: $(-x+2)(5x+2) = 0$

donc: $-x+2 = 0$ ou $5x+2 = 0$

par suite: $x = 2$ ou $x = -\frac{2}{5}$

Finalement : $S = \left\{-\frac{2}{5}; 2\right\}$

3 Résolvons l'équation $(E_3): (2x+1)(x-3)^2 = 2x+1$

L'équation (E_3) est équivalente à $(2x+1)(x-3)^2 - (2x+1) = 0$

ce qui signifie: $(2x+1)[(x-3)^2 - 1] = 0$

d'où: $(2x+1)(x-3-1)(x-3+1) = 0$

d'où: $2x+1 = 0$ ou $x-4 = 0$ ou $x-2 = 0$

par suit: $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 4$ ou $x = 2$

Finalement : $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2; 4\right\}$

4 Résolvons l'équation $(E_4): (x^2 - 3x + 2)^2 - (x^2 + 5x - 2)^2 = 0$

L'équation (E_4) est équivalente à:

$(x^2 - 3x + 2 + x^2 + 5x - 2)(x^2 - 3x + 2 - x^2 - 5x + 2) = 0$

c'est-à-dire: $(2x^2 + 2x)(-8x + 4) = 0$

d'où : $2x(x+1)(-8x+4) = 0$

donc: $x = 0$ ou $x+1 = 0$ ou $-8x+4 = 0$

par suite: $x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

Finalement: $S = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\}$

5 Résolvons l'équation $(E_5): (3x+1)^3 - (3x+1) = 0$

L'équation (E_5) est équivalente à $(3x+1)[(3x+1)^2 - 1] = 0$

ce qui signifie: $(3x+1)(3x+1-1)(3x+1+1) = 0$

d'où: $3x + 1 = 0$ ou $3x = 0$ ou $3x + 2 = 0$

donc: $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Finalement: $S = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0\right\}$

6 Résolvons l'équation (E_6): $8x^4 - x^2 = 0$

L'équation (E_6) est équivalente à $x^2(8x^2 - 1) = 0$

ce qui signifie: $x^2 = 0$ ou $8x^2 - 1 = 0$

d'où: $x = 0$ ou $(2\sqrt{2}x - 1)(2\sqrt{2}x + 1) = 0$

donc: $x = 0$ ou $2\sqrt{2}x - 1 = 0$ ou $2\sqrt{2}x + 1 = 0$

par suite: $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ou $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Finalement: $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$

Exercice 31

1 Résolvons l'équation (E_1): $(2x - 1)(x - 2) + 2(x^2 - 4) = 3(x - 2)^2$

L'équation (E_1) est équivalente à:

$$(2x - 1)(x - 2) + 2(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2)^2 = 0$$

ce qui signifie: $(x - 2)[(2x - 1) + 2(x + 2) - 3(x - 2)] = 0$

c'est-à-dire: $(x - 2)(x + 9) = 0$

d'où: $x - 2 = 0$ ou $x + 9 = 0$

donc: $x = 2$ ou $x = -9$

Finalement: $S = \{-9; 2\}$

2 Résolvons l'équation (E_2): $x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$

L'équation (E_2) est équivalente à $x^2(x + 1) + 2(x + 1) = 0$

ce qui signifie: $(x + 1)(x^2 + 2) = 0$

d'où: $x + 1 = 0$ ou $x^2 + 2 = 0$

donc: $x = -1$ ou $x^2 = -2$

or: $x^2 \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ alors l'équation $x^2 = -2$ est impossible.

Finalement: $S = \{-1\}$

3 Résolvons l'équation $(E_3) : x^3 - 1 = (x - 1)^2$

On sait que: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

donc: L'équation (E_3) est équivalente à:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x - 1)^2 = 0$$

ce qui signifie: $(x - 1)(x^2 + x + 1 - (x - 1)) = 0$

$$\text{d'où: } (x - 1)(x^2 + 2) = 0$$

donc: $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 2 = 0$

par suite: $x = 1$ (car $x^2 \neq -2$)

Finalement: $S = \{1\}$

Infos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

4 Résolvons l'équation $(E_4) : (2x - 3)^2 - 9(x - 3) = x^2$

L'équation (E_4) est équivalente à $(2x - 3)^2 - x^2 - 9(x - 3) = 0$

c'est-à-dire: $(2x - 3 - x)(2x - 3 + x) - 9(x - 3) = 0$

$$\text{d'où } (x - 3)(3x - 3) - 9(x - 3) = 0$$

ce qui signifie: $(x - 3)(3x - 3 - 9) = 0$

donc: $x - 3 = 0$ ou $3x - 12 = 0$

par suite: $x = 3$ ou $x = \frac{12}{3} = 4$

Finalement: $S = \{3, 4\}$

Exercice 32

1 Résolvons l'équation $(E_1) : 3x^2 - x + (3x - 1)^2 = 1 - 3x$

L'équation (E_1) est équivalente à: $x(3x - 1) + (3x - 1)^2 + (3x - 1) = 0$

ce qui signifie $(3x - 1)[x + 3x - 1 + 1] = 0$

$$\text{d'où: } 3x - 1 = 0 \text{ ou } 4x = 0$$

donc: $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 0$

Finalement: $S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

2 Résolvons l'équation $(E_2) : (x + 1)^4 - 8(x + 1) = 4(x^2 - 1)$

L'équation (E_2) est équivalente à $(x + 1)((x + 1)^3 - 8) = 4(x - 1)(x + 1)$

ce que signifie:

$$(x - 1)(x + 1 - 2)((x + 1)^2 + 2^2 + 2(x + 1)) - 4(x - 1)(x + 1) = 0$$

d'où: $(x-1)(x-1)[(x+1)^2 + 4 + 2(x+1) - 4] = 0$

donc: $(x-1)(x-1)[(x+1)^2 + 2(x+1)] = 0$

qu'on peut écrire: $(x+1)(x-1)((x-1)(x+1+2)) = 0$

par suite: $x+1=0$ ou $x-1=0$ ou $x+1=0$ ou $x+3=0$

donc: $x=-1$ ou $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=-3$

Finalement: $S = \{-3; -1; 1\}$

Exercice 33

1 Résolvons l'équation (E_1) : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$

L'équation (E_1) est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (car: $x-1 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$)

info:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que $ad = bc$ et $bd \neq 0$

soit $x \neq 1$ et $x \neq -1$; l'équation (E_1) est équivalente à $(x+1)^2 = (x-1)^2$

ce qui signifie: $x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

D'où $4x = 0$ donc $x = 0$ finalement $S = \{0\}$

2 Résolvons l'équation (E_2) : $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

L'équation (E_2) est définie si $x \neq 1$ et $x \neq -1$

donc: L'équation (E_2) est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

soit $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a:

L'équation (E_2) s'écrit: $\frac{(x+1)^2}{x^2-1} + \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{4}{x^2-1}$

d'où $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 4$

donc: $2(x^2 - 1) = 0$

c'est-à-dire: $2(x-1)(x+1) = 0$

par suite $x-1=0$ ou $x+1=0$

d'où: $x=1$ ou $x=-1$ et comme 1 et -1 n'appartiennent pas à $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Alors: $S = \emptyset$

3 Résolvons l'équation (E_3): $\frac{2x+1}{4x^2-1} = 1$

L'équation (E_3) est définie si $4x^2 - 1 \neq 0$

or $4x^2 - 1 = 0$ signifie que $(2x-1)(2x+1) = 0$.

c'est-à-dire: $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

donc l'équation (E_3) est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$, l'équation (E_3) est équivalente à $\frac{2x-1}{4x^2-1} = \frac{4x^2-1}{4x^2-1}$

d'où: $2x = 4x^2$

c'est-à-dire: $2x(1-2x) = 0$ donc: $2x = 0$ ou $1-2x = 0$

Par suite: $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ et comme $\frac{1}{2} \notin \left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right)$ alors: $S = \{0\}$

4 Résolvons l'équation (E_4): $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{4x-1}{x^2+x}$

L'équation (E_4) est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$

soit x un élément de $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$

On a: $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2+x}{x^2+x} = \frac{3x+2}{x^2+x}$

donc l'équation (E_4) est équivalente à $\frac{3x+2}{x^2+x} = \frac{4x-1}{x^2+x}$ d'où $3x+2 = 4x-1$

Donc: $-x = -3$ c'est-à-dire $x = 3$ et comme $3 \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$ alors: $S = \{3\}$

5 Résolvons l'équation (E_5): $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

L'équation (E_5) est définie pour:

$x+1 \neq 0$ et $1+\frac{1}{1+x} \neq 0$ et $1-x \neq 0$ et $1-\frac{1}{1-x} \neq 0$

Résolvons les équations: $x+1 = 0$, $1+\frac{1}{1+x} = 0$, $1-x = 0$

et $1-\frac{1}{1-x} = 0$

▶ $1x+1 = 0$ équivaut à $x = -1$

▶ $1+\frac{1}{1+x} = 0$ équivaut à $\frac{x+2}{x+1} = 0$

équivaut à $x = -2$

▶ $1-x = 0$ équivaut à $x = 1$

▶ $1-\frac{1}{1-x} = 0$ équivaut à $\frac{-x}{1-x} = 0$

équivaut à $x = 0$

finalement l'équation (E_1) est définie sur $\mathbb{R} - \{-2; -1; 0; 1\}$

soit x un élément de $\mathbb{R} - \{-2; -1; 0; 1\}$

L'équation (E_1) est équivalente à $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-x}$

ce qui signifie: $\frac{(x+1)}{x+2} = \frac{x-1}{x}$

d'où: $x^2 + x = x^2 + 2x - x - 2$

par suite: $x - 2x + x = -2$

alors l'équation (E_1) est équivalente $0x = -2$ ce qui est impossible

Donc: $S = \emptyset$

Exercice 34

▶ Résolvons l'équation (E) : $m \cdot x - 3(m-1) = \frac{m}{2} + \frac{7+x}{2}$

L'équation (E) est équivalente à $mx - \frac{1}{2}x = 3m - 3 + \frac{m}{2} + \frac{7}{2}$

d'où: $(m - \frac{1}{2})x = \frac{7m+1}{2}$

▶ Si $m = \frac{1}{2}$ alors l'équation s'écrit: $0x = \frac{9}{4}$; alors $S = \emptyset$

$m \neq \frac{1}{2}$ alors: $x = \frac{\frac{7m+1}{2}}{m - \frac{1}{2}} = \frac{7m+1}{2m-1}$; alors $S = \left\{ \frac{7m-1}{2m-1} \right\}$

▶ Résolvons l'équation (F) : $(4m+7)x + m = 3mx + 10x + 3m - 6$

L'équation (F) s'écrit: $(4m+7-3m-10)x = 3m-6-m$

d'où: $(m-3)x = 2(m-3)$

▶ Si $m = 3$ L'équation devient $0x = 0$ alors $S = \mathbb{R}$

▶ Si $m \neq 3$ alors: $x = \frac{2(m-3)}{m-3} = 2$

Finalement: $S = \{2\}$

▶ Résolvons l'équation (G) : $m(mx-2) + (m+1)x = x-2 + m(m-3)$

L'équation (G) est équivalente à: $(m^2 + m + 1 - 1)x = m^2 - 3m + 2m - 2$

c'est-à-dire: $m(m+1)x = m^2 - m - 2$

La résolution de l'équation (G) dépend du nombre $m(m+1)$

• Si $m = 0$ alors l'équation (G) s'écrit $0x = -2$

Donc: $S = \emptyset$

• Si $m = -1$ alors l'équation (G) s'écrit $0x = 0$

D'où $S = \mathbb{R}$

• Si $m \neq 0$ et $m \neq -1$, alors $x = \frac{m^2 - m - 2}{m(m+1)}$

$$= \frac{(m+1)(m-2)}{m(m+1)}$$

Donc: $S = \left\{ \frac{m-2}{m} \right\}$

En résumé:

Valeur de m	$m = 0$	$m = -1$	$m \neq 0$ et $m \neq -1$
Ensemble de solutions	$S = \emptyset$	$S = \mathbb{R}$	$S = \left\{ \frac{m-2}{m} \right\}$

Exercice 35

1 Résolvons l'équation $(E_1): |x-3| - 2|x+1| = 0$

L'équation (E_1) est équivalente à $|x-3| = |2x+2|$

(car $2 = |2|$ et $|ab| = |a||b|$)

ce qui signifie: $x-3 = 2x+2$ ou $x-3 = -2x-2$

d'où: $-x = 5$ ou $3x = 1$

c'est-à-dire: $x = -5$ ou $x = \frac{1}{3}$

Info: $|a| = |b|$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$

Finalement: $S = \left\{ -5; \frac{1}{3} \right\}$

2 Résolvons l'équation $(E_2): |x^2-1| = |x-1|$

L'équation (E_2) s'écrit: $|(x-1)(x+1)| = |x-1|$ et comme $|a \times b| = |a| \times |b|$

alors l'équation (E_2) est équivalente à $|x-1||x+1| - |x-1| = 0$

d'où: $|x-1|(|x+1| - 1) = 0$

ce qui signifie: $|x-1| = 0$ ou $|x+1| = 1$

c'est-à-dire: $x = 1$ ou $x+1 = 1$ ou $x+1 = -1$

donc: $x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = -2$

Finalement: $S = \{-2; 0; 1\}$

3 Résolvons l'équation (E_3): $x^2 - |x| = 0$

On a: $x^2 = |x|^2 = |x| \times |x|$ ($|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$)

donc: L'équation (E_3) est équivalente à $|x|(|x| - 1) = 0$

ce qui signifie: $|x| = 0$ ou $|x| = 1$

d'où: $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Finalement: $S = \{-1; 0; 1\}$

Exercice 36

1 Résolvons l'équation (E_1): $|3x - 6| + |x^2 - 4| = 0$

comme $|3x - 6| \geq 0$ et $|x^2 - 4| \geq 0$

alors l'équation (E_1) est équivalente à

$$3x - 6 = 0 \text{ et } x^2 - 4 = 0$$

d'où $x = 2$ et $((x - 2)(x + 2) = 0)$

donc: $x = 2$ et $(x = 2 \text{ ou } x = -2)$.

La solution commune aux équations $|x - 2| = 0$ et $|x^2 - 4| = 0$ est 2.

Donc: $S = \{2\}$

2 Résolvons l'équation (E_2): $|x| + x^3 = 0$

► Si $x \geq 0$

L'équation (E_2) s'écrit $x + x^3 = 0$ d'où $x(1 + x^2) = 0$ et comme $1 + x^2 \neq 0$

alors: $x = 0$; donc: $S_1 = \{0\}$

(S_1 est l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}^+$)

► Si $x \leq 0$

L'équation (E_2) s'écrit: $x^3 - x = 0$

d'où: $x(x - 1)(x + 1) = 0$

donc: $x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$

c'est-à-dire: $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$ et comme $1 > 0$ alors $S_2 = \{-1, 0\}$

(S_2 est l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R}^-$)

d'où $S_2 = \{-1, 0\}$

Infos:

Pour tout A et B de $\mathbb{R}^+$

On a: $A + B = 0$ si et seulement si

$A = 0$ et $B = 0$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est $S = S_1 \cup S_2$

C'est-à-dire: $S = \{-1, 0\}$

3 Résolvons l'équation (E_3) : $|3x - 1| = x$

► Si $x < 0$

L'égalité $|3x - 1| = x$ est impossible (Car $|3x - 1| \geq 0$)

► Si $x \geq 0$

L'équation (E_3) est équivalente à: $3x - 1 = x$ ou $3x - 1 = -x$

d'où $2x = 1$ ou $4x = 1$

donc: $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$ et comme $\frac{1}{2} \geq 0$ et $\frac{1}{4} \geq 0$

Alors: $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$

4 Résolvons l'équation (E_4) : $|x - 3| + x = 3$

L'équation (E_4) est équivalente à $|x - 3| = 3 - x = -(x - 3)$

or on sait que $|A| = -A$ si et seulement si $A \leq 0$

donc l'équation (E_4) est équivalente à $x - 3 \leq 0$ d'où $x \leq 3$

Finalement: $S =]-\infty; 3]$

Exercice 37

1 Résolvons l'équation (E_1) : $|x - 2| + 4\left|1 - \frac{x}{4}\right| = 3x - 5$

Nous allons écrire l'équation (E_1) sans symbole de valeur absolue

(pour cela dressons le tableau de signes de $x - 2$ et $1 - \frac{x}{4}$)

$x - 2 = 0$ si et seulement si $x = 2$

$1 - \frac{x}{4} = 0$ si et seulement si $x = 4$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+	+
$ x - 2 =$	$-x + 2$	0	$x - 2$	$x - 2$
$1 - \frac{x}{4}$	+	+	0	-
$ 1 - \frac{x}{4} =$	$1 - \frac{x}{4}$	$1 - \frac{x}{4}$	0	$\frac{x}{4} - 1$

D'après le tableau de signes on a : 3 cas:

$x \leq 2$ ou $2 \leq x \leq 4$ ou $x \geq 4$

infos:

$$|A| = A \text{ si } A \geq 0$$

$$\text{et } |A| = -A \text{ si } A \leq 0$$

► Sur l'intervalle $]-\infty; 2]$:

$$\text{L'équation } (E_1) \text{ équivaut à } -x + 2 + 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 3x - 2$$

$$\text{équivaut à: } -x + 2 + 4 - x = 3x - 2 \text{ D'où : } -5x = -8$$

$$\text{Donc: } x = \frac{8}{5} \text{ et } \frac{8}{5} \in]-\infty; 2] \text{ finalement : } S_1 = \left\{\frac{8}{5}\right\}$$

► Sur l'intervalle $[2; 4]$:

$$\text{L'équation } (E_1) \text{ est équivalente à } x - 2 + 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 3x - 2$$

$$\text{que l'on peut écrire: } x - 2 + 4 - x = 3x - 2$$

$$\text{D'où: } 3x = 4 \text{ donc: } x = \frac{4}{3} \text{ mais } \frac{4}{3} \notin [2; 4] \text{ finalement } S_2 = \emptyset$$

► Sur l'intervalle $[4; +\infty[$:

$$\text{L'équation } (E_1) \text{ est équivalente à } x - 2 + 4\left(\frac{x}{4} - 1\right) = 3x - 2$$

$$\text{que l'on peut écrire } x - 2 + x - 4 = 3x - 2 \text{ d'où } x = -4 \text{ mais } -4 \notin [4; +\infty[$$

$$\text{Finalement : } S_3 = \emptyset$$

Conclusion: L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$\text{C'est-à-dire : } S = \left\{\frac{8}{5}\right\}$$

Remarque: On peut déterminer le signe de $x - 2$ et $1 - \frac{x}{4}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 2]$; $[2, 4]$ et $[4, +\infty[$ sans passer par le tableau de signe.

2 Résolvons l'équation (E_2) : $|x| - 2|x + 1| + 3|x - 2| = 0$

comme l'exercice précédent:

$$x + 1 = 0 \text{ si et seulement si } x = -1$$

$$x - 2 = 0 \text{ si et seulement si } x = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
Signe de x	-	-	0	+	+
$ x =$	$-x$	$-x$	0	x	x
Signe de $x + 1$	-	0	+	+	+
$ x + 1 =$	$-x - 1$	0	$x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
Signe de $x - 2$	-	-	-	0	+
$ x - 2 =$	$-x + 2$	$-x + 2$	$-x + 2$	0	$x - 2$

► Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, l'équation (E_2) est équivalente à :

$$-x - 2(-x - 1) + 3(-x + 2) = 0 \text{ que l'on peut écrire } -2x = -8$$

d'où $x = 4$ mais $4 \notin]-\infty; -1]$

Donc 4 n'est pas solution de l'équation (E_2) sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

► Sur l'intervalle $[-1; 0]$ l'équation (E_2) est équivalente à

$$-x - 2(x + 1) + 3(-x + 2) = 0 \text{ d'où } -6x = -4 \text{ c'est-à-dire } x = \frac{2}{3} \text{ mais } \frac{2}{3} \notin [-1; 0] \text{ donc } \frac{2}{3} \text{ n'est pas solution de l'équation } (E_2)$$

► Sur l'intervalle $[0; 2]$.

$$\text{L'équation } (E_2) \text{ est équivalente à } x - 2(x + 1) + 3(-x + 2) = 0$$

$$\text{d'où : } -4x = -4$$

Donc : $x = 1$ et $1 \in [0; 2]$ d'où 1 est solution de l'équation (E_2)

► Sur l'intervalle $[2; +\infty[$

$$\text{L'équation } (E_2) \text{ est équivalente à : } x - 2(x + 1) + 3(x - 2) = 0 \text{ que l'on peut écrire } 2x = 8 \text{ d'où : } x = 4 \text{ et } 4 \in [2; +\infty[$$

donc 4 est solution de l'équation (E_2)

donc : l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $S = \{1, 4\}$

1 Résolvons le système (S_1) : $\begin{cases} 4x - 5y = 7 & (1) \\ x - 2y = 3 & (2) \end{cases}$

L'équation (2) du système s'écrit $x = 3 + 2y$ donc le système (S_1) est équivalent

à $\begin{cases} 4(3 + y) - 5y = 7 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$

d'où: $\begin{cases} 3y = -5 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ que l'on peut écrire $\begin{cases} y = -\frac{5}{3} \\ x = 3 - \frac{10}{3} \end{cases}$

Finalement: $S = \left\{ \left(-\frac{10}{3}; -\frac{5}{3} \right) \right\}$

2 Résolvons le système (S_2) : $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{6}y = \sqrt{3} \\ x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$

Calculons le déterminant système (S_2) :

On a: $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$

L'ensemble de solutions du système dépend du déterminant Δx

On a: $Dx = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$

puisque: $D = 0$ et $Dx = 0$

alors le système (S_2) admet une infinité de solutions.

(S_2) s'écrit: $\begin{cases} \sqrt{3}(x - \sqrt{2}y) = \sqrt{3} \\ x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$

c'est-à-dire: $\begin{cases} x - \sqrt{2}y = 1 \\ x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$

donc l'ensemble de solution de l'équation (S_2) est celui des solutions de l'équation $x - \sqrt{2}y = 1$

or $x - \sqrt{2}y = 1$ est équivalent à $x = \sqrt{2}y + 1$

Finalement: $S = \{(\sqrt{2}y + 1; y) / y \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des solutions du système (S_2) .

Exercice 39

1 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (S_1) :
$$\begin{cases} |x| + 3|y| = 9 \\ 2|x| + 14|y| = 2 \end{cases}$$

Posons $|x| = X$ et $|y| = Y$ avec $X \geq 0$ et $Y \geq 0$

Le système (S_1) s'écrit
$$\begin{cases} X + 3Y = 9 \\ 2X + 14Y = 2 \end{cases}$$

On a: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 8$; $D_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 9 \times 14 - (3 \times 2) = 120$

et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16$

alors: $X = \frac{D_x}{D} = \frac{120}{8}$ et $Y = \frac{D_y}{D} = \frac{-16}{8} = -2$

c'est-à-dire $X = 15$ et $Y = -2$

et comme $-2 < 0$ alors le système (S_1) n'a pas de solutions d'où $S = \emptyset$

2 Résolvons le système (S_2) :
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ 2x^2 + 14y = 2 \end{cases}$$

posons $X = x^2$ avec $X \geq 0$

Le système (S_2) s'écrit
$$\begin{cases} X + 3y = 9 \\ 2X + 14y = 2 \end{cases}$$

On a: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 8$, $D_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 120$ et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16$

finalement: $X = \frac{D_x}{D} = 15$ et $Y = \frac{D_y}{D} = \frac{-16}{8} = -2$

d'où $x^2 = 15$ et $y = -2$ donc $(x = \sqrt{15} \text{ ou } x = -\sqrt{15})$ et $y = -2$

L'ensemble des solutions du système est: $S = \{(-\sqrt{15}, -2); (\sqrt{15}, -2)\}$

3 Résolvons le système (S_3) :
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9 \\ 2\sqrt{x} + 14y = 2 \end{cases}$$

Posons $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$

On obtient $X = 15$ et $y = -2$ (même raisonnement que le système précédent)

d'où: $\sqrt{x} = 15$ et $y = -2$

finalement: $x = 15^2$ et $y = -2$

Donc: $S = \{(225; -2)\}$

infos:

$X^2 = a$ avec $a \geq 0$

signifie que $X = \sqrt{a}$

ou $X = -\sqrt{a}$

Exercice 40

1 Résolvons le système (S):
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 5 \\ \frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$$

Posons $X = \frac{1}{x^2}$ et $Y = \frac{1}{y^2}$ avec $X > 0$ et $Y > 0$

Le système (S) s'écrit
$$\begin{cases} 3X - Y = 5 & (1) \\ 2X - Y = 1 & (2) \end{cases}$$

des deux équations (1) et (2) du système on obtient

$$(3X - Y) - (2X - Y) = 5 - 1$$

c'est-à-dire: $X = 4$ et comme $2X - Y = 1$ alors: $Y = 2X - 1 = 7$

d'où: $\frac{1}{x^2} = 4$ et $\frac{1}{y^2} = 7$ donc $x^2 = \frac{1}{4}$ et $y^2 = \frac{1}{7}$.

finalement: $\left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(y = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$

D'où: $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right\}$

Exercice 41

1 Résolvons l'inéquation (I_1) : $\frac{1}{3}(2x - 1) \geq x - \frac{1}{2}$

L'inéquation (I_1) est équivalente à $\frac{2}{3}x - x \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ c'est-à-dire: $-\frac{1}{3}x \geq -\frac{1}{6}$

ce qui signifie que: $\frac{1}{3}x \leq \frac{1}{6}$ donc: $x \leq \frac{1}{2}$

C'est-à-dire $x \leq \frac{1}{2}$ finalement: $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

2 Résolvons l'inéquation (I_2) : $\frac{x-1}{7} < \frac{3x+1}{2}$

L'inéquation (I_2) est équivalente à $\frac{2(x-1)}{14} \leq \frac{7(3x+1)}{14}$

équivalent à: $2x - 2 \leq 21x + 7$ ce qui signifie $-19x < 9$

donc: $x > -\frac{9}{19}$ finalement: $S = \left]-\frac{9}{19}; +\infty\right[$

3 Résolvons l'inéquation (I_3): $\frac{10\sqrt{2}x-3}{5} - \frac{2\sqrt{2}x+1}{2} \geq x\sqrt{2}+3$

L'inéquation (I_3) est équivalente à:

$$\frac{2(10\sqrt{2}x-3)}{10} - \frac{5(2\sqrt{2}x+1)}{10} \geq \frac{10(x\sqrt{2}+3)}{10}$$

équivalent à : $20\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}x \geq 30 + 6 + 5$ donc: $0x \geq 41$

Finalement : $S = \phi$

4 Résolvons l'inéquation (I_4): $\sqrt{3}(2x+3\sqrt{3}) > \sqrt{3}(2x+1) + \sqrt{5}$

L'inéquation (I_4) est équivalente à $2x\sqrt{3} + 9 > 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

d'où: $0x > \sqrt{3} + \sqrt{5} - 9$

or $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 9 = (\sqrt{3} - 3) + (\sqrt{5} - 6)$ et $\sqrt{5} < 6$ donc $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 9 < 0$

Et comme $0x \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ alors : $S = \mathbb{R}$.

Exercice 42

1 Résolvons l'inéquation (I_1): $2mx - 3m(x+2) > x(m-3)$

L'inéquation (I_1) équivaut à : $(2mx - 3mx - x(m-3)) > 6m$

équivalent à : $(2m - 3m + 3 - m)x > 6m$

c'est-à-dire $(-2m + 3)x > 6m$

► Si $m = \frac{3}{2}$ (c'est-à-dire $-2m + 3 = 0$)

L'inéquation s'écrit $0x > 9$ d'où $S = \phi$

► Si $m < \frac{3}{2}$ (c'est-à-dire $3 - 2m > 0$)

alors l'inéquation est équivalente à $x > \frac{6m}{3-2m}$ d'où $S = \left] \frac{6m}{3-2m}; +\infty \right[$

► Si $m > \frac{3}{2}$ (c'est-à-dire $3 - 2m < 0$)

alors l'inéquation est équivalente à $x < \frac{6m}{3-2m}$

D'où: $S = \left] -\infty; \frac{6m}{3-2m} \right[$

En résumé:

$m = \frac{3}{2}$	$m < \frac{3}{2}$	$m > 3$
$S = \emptyset$	$S = \left] \frac{6m}{3-2m}; +\infty \right[$	$S = \left] -\infty; \frac{6m}{3-2m} \right[$

2 Résolvons l'inéquation (I_2) : $m(mx - 2) \leq 2(3 + mx) - 10$

L'inéquation (I_2) est équivalente à $(m^2 - 2m)x \leq 2m + 6 - 10$

que l'on peut écrire $m(m - 2)x \leq 2(m - 2)$

► Si $m = 2$

L'inéquation (I_2) devient $0x \leq 0$ d'où $S = \mathbb{R}$

► Si $m = 0$

L'inéquation (I_2) devient $0x \leq -4$ d'où: $S = \emptyset$,

Dressons le tableau de signe de $m(m - 2)$

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
m	-	0	+	+
$m - 2$	-	-	0	+
$m(m - 2)$	+	0	-	+

► Si $m \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ alors:

L'inéquation (I_2) est équivalente à: $x \leq \frac{2(m - 2)}{m(m - 2)}$,

C'est-à-dire: $x \leq \frac{2}{m}$, d'où: $S = \left] -\infty; \frac{2}{m} \right]$

► Si $m \in]0; 2[$ alors:

L'inéquation (I_2) est équivalente à $x \geq \frac{2(m - 2)}{m(m - 2)}$, c'est-à-dire: $x \geq \frac{2}{m}$,

D'où: $S = \left[\frac{2}{m}; +\infty \right[$

En résumé:

$m = 0$	$m = 2$	$m \in]0; 2[$	$m \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
$S = \emptyset$	$S = \mathbb{R}$	$S = \left[\frac{2}{m}; +\infty \right[$	$S = \left] -\infty; \frac{2}{m} \right]$

3 Résolvons l'inéquation $(I_3) : (m^2 - 9)x > (m - 3)$

► Dressons le tableau de signe de $m^2 - 9$

On a : $m^2 - 9 = (m - 3)(m + 3)$

m	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$m - 3$	-	-	0	+
$m + 3$	-	0	+	+
$m^2 - 9$	+	0	-	+

► Si $m = 3$

L'inéquation s'écrit $0x > 0$

D'où $S = \emptyset$

► Si $m = -3$

L'inéquation s'écrit : $0x > -6$

D'où $S = \mathbb{R}$

► Si $m \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

L'inéquation (I_3) est équivalente à $x > \frac{m - 3}{(m - 3)(m + 3)}$,

C'est-à-dire : $x > \frac{1}{m + 3}$, d'où : $S = \left] \frac{1}{m + 3}; +\infty \right[$

► Si $m \in]-3; 3[$

L'inéquation (I_3) est équivalente à $x < \frac{m - 3}{m^2 - 9}$,

C'est-à-dire : $x < \frac{1}{m + 3}$, d'où : $S = \left] -\infty; \frac{1}{m + 3} \right[$

En résumé :

$m = 3$	$m = -3$	$m \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$	$m \in]-3; 3[$
$S = \emptyset$	$S = \mathbb{R}$	$S = \left] \frac{1}{m + 3}; +\infty \right[$	$S = \left] -\infty; \frac{1}{m + 3} \right[$

Exercice 43

1 Dressons le tableau de signe de l'expression : $\frac{2 - 5x}{x + 3}$

On a : $2 - 5x = 0$ signifie que $x = \frac{2}{5}$

$x + 3 = 0$ signifie que $x = -3$

L'expression $\frac{2 - 5x}{x + 3}$ est définie

pour $x \neq -3$

d'où le tableau de signes de l'expression $\frac{2-5x}{x+3}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$2-5x$	+	0	+	-
$x+3$	-		+	+
$\frac{2-5x}{x+3}$	-		+	-

2 Dressons le tableau de signe de l'expression $\frac{(x+1)^2}{2-3x}$

On a : $(x+1)^2 = 0$ signifie que $x = -1$
 $2-3x = 0$ signifie que $x = \frac{2}{3}$

L'expression $\frac{(x+1)^2}{2-3x}$ est définie pour $x \neq \frac{2}{3}$

D'où le tableau de signes de l'expression $\frac{(x+1)^2}{2-3x}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+
$2-3x$	+		0	-
$\frac{(x+1)^2}{2-3x}$	+	0	+	-

3 Le signe de l'expression $\frac{1-x}{(x-3)(4-x)}$

l'expression $\frac{1-x}{(x-3)(4-x)}$

On a : $1-x = 0$ signifie que $x = 1$

est définie sur $\mathbb{R} - \{3; 4\}$

$(x-3)(4-x) = 0$ signifie que $x = 3$ ou $x = 4$,

D'où le tableau de signe de $\frac{1-x}{(x-3)(4-x)}$ et le suivant:

x	$-\infty$	1	3	4	$+\infty$
$1-x$	+	0	-	-	-
$x-3$	-		0	+	+
$4-x$	+	+	+	0	-
$\frac{1-x}{(x-3)(4-x)}$	-	0	+	-	+

Exercice 44

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_1) : \frac{3x-1}{x} \leq \frac{2}{3}$;

l'inéquation est définie pour $x \neq 0$;

pour $x \neq 0$

L'inéquation (I_1) équivaut à : $\frac{3x-1}{x} - \frac{2}{3} \leq 0$

équivaut à : $\frac{3(3x-1)-2x}{3x} \leq 0$

que l'on peut écrire $\frac{7x-3}{3x} \leq 0$

Dressons le tableau de signes de l'expression $\frac{7x-3}{3x}$

On a : $7x-3=0$ signifie que $x=\frac{3}{7}$

$3x=0$ signifie que $x=0$

D'où le tableau de signes de l'expression $\frac{7x-3}{3x}$ est le suivant:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{7}$	$+\infty$
$7x-3$	-	-	0	+
$3x$	-	0	+	+
$\frac{7x-3}{3x}$	+	-	0	+

L'inéquation (I_1) a pour ensemble des solutions l'ensemble $S =]0; \frac{3}{7}]$

2 Résolvons l'inéquation $(I_2) : \frac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$

L'inéquation est définie pour $x \neq 3$

Dressons le tableau de signes de l'expression $\frac{(x+2)^2}{x-3}$

$(x+2)^2=0$ signifie que $x=-2$

$x-3=0$ signifie que $x=3$

D'où le tableau de signes de l'expression $\frac{(x+2)^2}{x-3}$ est le suivant:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(x+2)^2$	+	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$\frac{(x+2)^2}{x-3}$	-	0	-	+

Remarquer que -2 est solution de l'inéquation $(I_1) : \frac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$

D'où : $S =]3; +\infty[\cup \{-2\}$

3 Résolvons l'inéquation $\frac{(3x-1)x}{2x+1} \leq 0$

On a : $2x+1 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{2}$

alors l'inéquation est définie pour $x \neq -\frac{1}{2}$

On a : $(3x-1)x = 0$ signifie que $x = 0$ ou $3x-1 = 0$

C'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$

D'où le tableau de signes de l'expression $\frac{(3x-1)x}{2x+1}$ est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
x	-	-	0	+	+	
$3x-1$	-	-	-	0	+	
$2x+1$	-	0	+	+	+	
$\frac{x(3x-1)}{2x+1}$	-	+	0	-	0	+

Donc : l'inéquation $\frac{x(3x-1)}{2x+1} \leq 0$ a pour ensemble des solutions l'ensemble :

$$S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

Exercice 45

1 Résolvons le système $(S) : \begin{cases} 3(1-x) \geq 2x-7 \\ 4+3x < 5x+3 \end{cases}$

Le système (S) équivaut à : $\begin{cases} -5x \geq -10 \\ -2x < -1 \end{cases}$

équivaut à : $\begin{cases} x \leq \frac{10}{5} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$; équivaut à : $\frac{1}{2} < x \leq 2$

Donc : $S = \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$

2 Résolvons le système (S_2) :
$$\begin{cases} 5x - 6 \leq 3 - 4x \\ 3 - 4x < \frac{3}{2} - 3x \end{cases}$$

Le système peut s'écrire:
$$\begin{cases} 5x + 4x \leq 3 + 6 \\ -4x + 3x < \frac{3}{2} - 3 \end{cases}$$

(S_2) est équivalent à:
$$\begin{cases} 9x \leq 9 \\ -x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

c'est à dire :
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

ce qui impossible,

Donc: $S = \emptyset$

Exercice 46

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $2x^2 - 9x + 10 = 0$

On a: $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10$
 $= 1$

d'où les solutions de l'équation (E_1) sont $x_1 = \frac{9-1}{4}$ et $x_2 = \frac{9+1}{4}$,

C'est-à-dire: $x_1 = 2$ et $x = \frac{5}{2}$; donc: $S = \left\{ \frac{5}{2}, 2 \right\}$

2 Déduisons les solutions de l'équation (E_2) : $2x - 9\sqrt{x} + 10 = 0$

Posons $\sqrt{x} = X$ avec $X \geq 0$; l'équation (E_2) devient $2X^2 - 9X + 10 = 0$

et d'après la question 1) on a: $X = \frac{5}{2}$ ou $X = 2$

d'où $\sqrt{x} = \frac{5}{2}$ ou $\sqrt{x} = 2$

finalement: $x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ou $x = 2^2 = 4$

Donc: $S = \left\{ 4, \frac{25}{4} \right\}$

Exercice 47

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x-3)^2 + 2x(x-3) + x^2 = 0$

Remarquons que (E_1) peut s'écrire : $[(x-3) + x]^2 = 0$

d'où : $x-3+x=0$

C'est-à-dire : $x = \frac{3}{2}$; donc : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Remarque : on peut développer, réduire et utiliser le discriminant.

2 Dressons le tableau de signe $x(x-3)$

On a : $x(x-3) = 0$ est équivalent à $x = 0$ ou $x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$x-3$	-	-	0	+	
$x(x-3)$	+	0	-	0	+

3 Résolvons l'équation $(E_2): (x-3)^2 + 2|x(x-3)| + x^2 = 9$

On a pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$(x-3)^2 = |x-3|^2 \text{ et } x^2 = |x|^2$$

L'équation $|x-3|^2 + 2|x||x-3| + |x|^2 = 9$ équivaut à $(|x-3| + |x|)^2 = 9$

équivaut à $|x-3| + |x| = 3$ ou $\underbrace{|x-3| + |x| = -3}_{\text{impossible}}$

équivaut à $|x-3| + |x| = 3$

On a : $|x-3| = 0$ équivaut $x = 3$ et $x = 0$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
signe de $(x-3)$	-	-	0	+
$ x-3 $	$-x+3$	$-x+3$	0	$x-3$
signe de x	-	0	+	+
$ x $	$-x$	x	x	x

Sur $]-\infty; 0]$; l'équation (E_3) est équivalente à $-x+3-x=3$

c'est-à-dire : $-2x = 0$

donc : $x = 0$ et $0 \in]-\infty; 0]$

► Sur $[0; 3]$; l'équation (E_1) est équivalente à $-x + 3 + x = 3$

$0x = 0$ donc : $S_2 = [0; 3]$

► Sur $[3; +\infty[$ l'équation (E_1) est équivalente à $x - 3 + x = 3$

c'est-à-dire : $x = 3$

donc : $S = \{0\} \cup [0; 3] \cup \{3\}$,

D'où : $S = [0; 3]$

Exercice 48

Résolvons les équations suivantes:

1 $(E_1): x + \sqrt{x} - 2 = 0$

Posons : $\sqrt{x} = X$ avec $X \geq 0$.

L'équation (E_1) s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$.

On a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$
 $= 9$

d'où : $X = \frac{-1-3}{2}$ ou $X = \frac{-1+3}{2}$

c'est-à-dire $X = -2$ ou $X = 1$

et comme $X \geq 0$ alors $X = 1$; d'où $\sqrt{x} = 1$; donc : $x = 1^2 = 1$

Finalement: $S = \{1\}$

2 $(E_2): x^2 - 2|x| - 3 = 0$

Posons : $X = |x|$ avec $X \geq 0$,

et comme $x^2 = |x|^2 = X^2$

alors (E_2) s'écrit : $X^2 - 2X - 3 = 0$

(E_2) est équivalente à $(X - 1)^2 = 4$

d'où $X - 1 = 2$ ou $X - 1 = -2$

c'est-à-dire : $X = 3$ ou $X = -1$

et comme $X \geq 0$ alors $X = 3$; Donc : $|x| = 3$

finalemt $x = 3$ ou $x = -3$

D'où : $S = \{-3; 3\}$

3 $(E_3): \frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{14}{2x-1} + 12 = 0$

L'équation (E_3) est définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,

(E_3) équivalente à $2 \times \left(\frac{1}{2x-1} \right)^2 - 14 \left(\frac{1}{2x-1} \right) + 12 = 0$

Posons : $X = \frac{1}{2x-1}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$.

L'équation (E_3) s'écrit $2X^2 - 14X + 12 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100$

d'où : $X_1 = \frac{14-10}{4}$ et $X_2 = \frac{14+10}{2}$ car $\sqrt{\Delta} = 10$

$X_1 = 1$ et $X_2 = 12$

donc : $\frac{1}{2x-1} = 1$ ou $\frac{1}{2x-1} = 12$

par suite $2x-1 = 1$ ou $2x-1 = \frac{1}{12}$

d'où : $2x = 2$ ou $2x = \frac{13}{12}$

ainsi : $x = 1$ ou $x = \frac{13}{24}$

Donc : $S = \left\{ 1, \frac{13}{24} \right\}$

4 $(E_4): (x-1)^4 + 4(x-1)^2 - 5 = 0$

Posons $(x-1)^2 = X$ avec $X \geq 0$

L'équation (E_4) devient : $X^2 + 4X - 5 = 0$

Les solutions de l'équation $X^2 + 4X - 5 = 0$

sont $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{c}{a} = -5$

car 1 est une solution de cette équation,

et la deuxième solution est :

$X_2 = \frac{c}{a} = -5$

d'où : $(x-1)^2 = 1$ (car $-5 < 0$)

ce qui signifie $x-1 = 1$ ou $x-1 = -1$

d'où : $x = 2$ ou $x = 0$

Donc : $S = \{0; 2\}$

Exercice 49

1 Vérifions que l'équation (E): $3x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$ admet deux solutions distinctes

$$\text{On a : } \Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-\sqrt{2}) \\ = 4 + 12\sqrt{2}$$

$$\text{On a : } \Delta > 0$$

Donc l'équation (E) admet deux racines distinctes a et b .

2 Calculons $a + b$; $a \times b$ et $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$

$$\text{On a : } a + b = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a \times b = \frac{-\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 &= \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} \\ &= \frac{(a + b)^2}{ab} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{-\sqrt{2}}{3}} \\ &= -\frac{4}{9} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

3 Calculons $a^2 + b^2$ et $a^2b + b^2a$

$$\begin{aligned} \text{On a : } a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}\right) \times 2 \\ &= \frac{4}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } a^2 + b^2 = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{9}$$

$$\begin{aligned} a^2b + b^2a &= ab(a + b) \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } a^2b + b^2a = \frac{-2\sqrt{2}}{9}$$

infos

si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

$$\text{alors } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercice 50

1 Déterminons les couples (x, y) tels que :
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = \frac{-15}{4} \end{cases}$$

On a : x et y sont solutions de l'équation $(E) : X^2 + X - \frac{15}{4} = 0$

Réolvons l'équation (E) :

$$\text{On a : } \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{-15}{4}\right) = 16$$

$$\text{d'où : } X_1 = \frac{-1-4}{2} = \frac{-5}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{donc : } \left(x = -\frac{5}{2} \text{ et } y = \frac{3}{2}\right) \text{ ou } \left(x = \frac{3}{2} \text{ et } y = -\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{D'où } S = \left\{\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)\right\}$$

2 Déterminons les couples (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

On a : x et y sont solutions de l'équation

$$X^2 + 4X + 3 = 0$$

Réolvons l'équation $X^2 + 4X + 3 = 0$,

$$\text{On a : } X = -1 \text{ ou } X = -3$$

$$\text{d'où } (x = -1 \text{ et } y = -3) \text{ ou } (x = -3 \text{ et } y = -1)$$

$$\text{Donc : } S = \{(-1; -3); (-3; -1)\}$$

3 Déterminons les couples (x, y) tels que :
$$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ xy = 18 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ xy = 18 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ x \times (2y) = 36 \end{cases}$

donc : x et $2y$ sont solutions de l'équation $X^2 - 15X + 36 = 0$,

Réolvons l'équation $X^2 - 15X + 36 = 0$,

$$\text{On a : } \Delta = (15)^2 - 4 \times 1 \times 36$$

$$= 81$$

$$\text{d'où : } X_1 = \frac{15-9}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{15+9}{2} = 12$$

$$\text{donc : } (x = 3 \text{ et } 2y = 12) \text{ ou } (x = 12 \text{ et } 2y = 3)$$

$$\text{c'est-à-dire : } (x = 3 \text{ et } y = 6) \text{ ou } (x = 12 \text{ et } y = \frac{3}{2})$$

$$\text{Donc : } S = \{(3; 6); (12; \frac{3}{2})\}$$

infos:

si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ tels que $a \neq 0$ et $a + c = b$ alors les solutions sont -1 et $-\frac{c}{a}$

Exercice 51

Réolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x \times y = -12 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x \times y = -12 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x \times 2y = -72 \end{cases}$

$3x$ et $2y$ sont solutions de l'équation $X^2 - X - 72 = 0$.

Réolvons l'équation: $X^2 - X - 72 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= (-1)^2 + 4 \times 1 \times (-72) \\ &= 289 \\ &= (17)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } X_1 = \frac{1-17}{2} = -8 \text{ et } X_2 = \frac{1+17}{2} = 9$$

donc : $(3x = -8 \text{ et } 2y = 9)$ ou $(3x = 9 \text{ et } 2y = -8)$

c'est-à-dire : $(x = -\frac{8}{3} \text{ et } y = \frac{9}{2})$ ou $(x = 3 \text{ et } y = -4)$,

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left(-\frac{8}{3}; \frac{9}{2} \right); (3; -4) \right\}$$

Exercice 52

1 Réolvons l'inéquation $I_1: 3x^2 + 10x + 8 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= (10)^2 - 4 \times 3 \times (8) \\ \Delta &= 4 \end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation $3x^2 + 10x + 8 = 0$

$$\text{sont } x_1 = \frac{-10-2}{6} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-10+2}{6} = -\frac{4}{3}$$

Dressons le tableau de signes du trinôme $3x^2 + 10x + 8$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	
$3x^2 + 10x + 8$	+	0	-	0	+

Donc : L'ensemble des solutions de l'inéquation I_1 est:

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[-\frac{4}{3}; +\infty[$$

2 Réolvons l'inéquation $I_2: 2x^2 + 5x - 3 < 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= (5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) \\ \Delta &= 49 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont $x_1 = \frac{-5-7}{4}$ et $x_2 = \frac{-5+7}{4}$
c'est-à-dire : $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Dressons le tableau de signes du trinôme $2x^2 + 5x - 3$

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 + 3x - 5$	+	0	-	0	+

Donc : L'ensemble des solutions de l'inéquation I_2 est $S =]-3; \frac{1}{2}[$.

3 Résolvons l'inéquation $(4x^2 - 9)(-3x^2 - x + 4) \leq 0$

$(4x^2 - 9)(3x^2 + x - 9) = 0$ est équivalent à $4x^2 - 9 = 0$ ou $-3x^2 - x + 4 = 0$

► $4x^2 - 9 = 0$ si et seulement si $4x^2 = 9$

ce qui signifie $2x = 3$ ou $2x = -3$; C'est-à-dire : $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$,

Les solutions de l'équation $-3x^2 - x + 4 = 0$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$ (car on a : $a + b + c = 0$)

Dressons le tableau de signes de l'expression $E(x) = (4x^2 - 9)(-3x^2 - x + 4)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$		
$4x^2 - 9$	+	0	-	-	-	0	+
$-3x^2 - x + 4$	-	-	0	+	0	-	-
$E(x)$	-	0	+	0	-	0	-

Donc : L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est

$$S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{4}{3}; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$$

4 Résolvons l'inéquation (I_4): $x^2 + 3x + 4 \geq 0$

On a : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4$; d'où : $\Delta < 0$.

L'équation $x^2 + 3x + 4 = 0$ n'admet pas de solutions.

Le signe du trinôme $x^2 + 3x + 4$ est celui de a ($a = 1$).

Donc : $x^2 + 3x + 4 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$; d'où : $S = \mathbb{R}$

1 Résolvons l'inéquation $(I_1): x^5 - 8x^2 \leq 0$

L'inéquation (I_1) est équivalente à $x^2(x^3 - 8) \leq 0$,

On a : $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$,

Le signe de $x^3 - 8$ est celui de $x - 2$ (car $x^2 + 2x + 4 > 0$: $\Delta < 0$ et $a = 1$; $a > 0$),

D'où le tableau de signe $x^2(x^3 - 8)$ est le suivant:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x^2	+	0	+	+	
$x^3 - 8$	-	-	0	+	
$x^5 - 8x^2$	-	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $S =]-\infty; 2]$

2 Résolvons l'inéquation $(I_2): \left[\frac{1}{2x(2x-1)} \right]^2 \leq \frac{1}{4x^2}$

L'inéquation (I_2) est définie pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$

On a: L'inéquation (I_2) est équivalente à $\left(\frac{1}{2x(2x-1)} \right)^2 - \left(\frac{1}{2x} \right)^2 \leq 0$

que l'on peut écrire $\left(\frac{1}{2x(2x-1)} - \frac{1}{2x} \right) \left(\frac{1}{2x(2x-1)} + \frac{1}{2x} \right) \leq 0$

d'où: $\frac{1-2x+1}{2x(2x-1)} \times \frac{1+2x-1}{2x(2x-1)} \leq 0$

c'est-à-dire : $\frac{2(1-x) \times 2x}{(2x)^2(2x-1)^2} \leq 0$

donc: $\frac{1-x}{x(2x-1)^2} \leq 0$ (car $x \neq 0$)

Dressons le tableau de signes de l'expression $\frac{1-x}{x(2x-1)^2}$

► $1-x = 0$ si et seulement si $x = 1$

► $2x-1 = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$

que l'on peut écrire $\frac{2x+3}{x(x+3)} < 0$

Dressons le tableau de signes de $\frac{2x+3}{x(x+3)}$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$+\infty$
$2x+3$	-	-	0	+	+
x	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$\frac{2x+3}{x(x+3)}$	-	+	0	-	+

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation I , est :

$$S =]-\infty; -3[\cup]-\frac{3}{2}; 0[$$

❶ Résolvons le système (S) : $\begin{cases} x^2 + 14x - 15 \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases}$

L'équation $x^2 + 14x - 15 = 0$ a pour solutions 1 et -15 (car $a + b + c = 0$).

L'équation $-x^2 - x + 2 = 0$ a pour solutions 1 et -2 (car $a + b + c = 0$).

Dressons les tableaux de signes de $x^2 + 14x - 15$ et $-x^2 - x + 2$

x	$-\infty$	-15	1	$+\infty$	
$x^2 + 14x - 15$	+	0	-	0	+

L'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 + 14x - 15 \leq 0$ est $S = [-15; 1]$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-x^2 - x + 2$	-	0	+	0

L'ensemble de solutions de l'inéquation $-x^2 - x + 2 \leq 0$ est :

$$S_1 =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

L'ensemble de solutions du système (S) $\begin{cases} x^2 + 14x - 15 \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases}$ est : $S = S_1 \cap S_2$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(1-x)$	+	+	+	-	-
$(2x-1)^2$	+	+	0	+	+
x	-	0	+	+	+
$\frac{1-x}{x(2x-1)^2}$	-	+	+	0	-

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Exercice 54

1 Résolvons l'inéquation $I_1 : \frac{(x^2 - 4x + 4)^2}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$

On a : $x^2 + 4x - 5 = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \frac{c}{a} = -5$

(car $a + b + c = 0$); donc les valeurs interdites sont 1 et -5

$(x^2 - 4x + 4)^2 = 0$ si et seulement si $((x - 2)^2)^2 = 0$;

c'est-à-dire : $x = 2$

Dressons le tableau de signes de $\frac{(x^2 - 4x + 4)^2}{x^2 + 4x - 5}$

x	$-\infty$	-5	1	2	$+\infty$
$(x^2 - 4x + 4)^2$	+	+	+	0	+
$x^2 + 4x - 5$	+	0	-	0	+
$\frac{(x^2 - 4x + 4)^2}{x^2 + 4x - 5}$	+	-	+	0	+

Donc : $S =]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$

2 Résolvons l'inéquation $I_2 : \frac{x+1}{x} < \frac{x+2}{x+3}$

pour $x \neq 0$ et $x \neq -3$

On a l'inéquation I_2 équivalente à $\frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+3} < 0$

d'où : $\frac{x^2 + x + 3x + 3 - x^2 - 2x}{x(x+3)} < 0$

que l'on peut écrire $\frac{2x+3}{x(x+3)} < 0$



Dressons le tableau de signes de $\frac{2x+3}{x(x+3)}$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	0
$2x+3$	-	-	0	+
x	-	-	-	0
$x+3$	-	0	+	+
$\frac{2x+3}{x(x+3)}$	-	+	0	+

Donc: l'ensemble des solutions de l'inéquation I_2 est :

$$S =]-\infty; -3[\cup]-\frac{3}{2}; 0[$$

3 Résolvons le système $(S): \begin{cases} x^2 + 14x - 15 \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases}$

L'équation $x^2 + 14x - 15 = 0$ a pour solutions 1 et -15 (car $a+b+c=0$),

L'équation $-x^2 - x + 2 = 0$ a pour solutions 1 et -2 (car $a+b+c=0$),

Dressons les tableaux de signes de $x^2 + 14x - 15$ et $-x^2 - x + 2$

x	$-\infty$	-15	1	$+\infty$
$x^2 + 14x - 15$	+	0	-	0

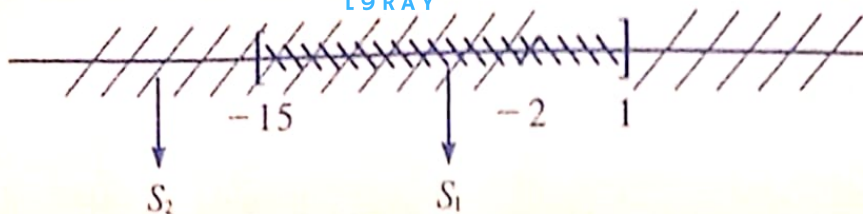
L'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 + 14x - 15 \leq 0$ est $S_1 = [-15; 1]$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-x^2 - x + 2$	-	0	+	0

L'ensemble de solutions de l'inéquation $-x^2 - x + 2 \leq 0$ est:

$$S_2 =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

L'ensemble de solutions du système $(S): \begin{cases} x^2 + 14x - 15 \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases}$ est : $S = S_1 \cap S_2$



Donc : $S = [-15; -2] \cup \{1\}$

Exercice 55

Réolvons l'inéquation : (I): $\frac{(x+1)^2}{x+3} \leq 2$

L'inéquation (I) est équivalente à $\frac{(x+1)^2}{x+3} - 2 \leq 0$

ce qui signifie $\frac{x^2 + 2x + 1 - 2x - 6}{x+3} \leq 0$

d'où: $\frac{x^2 - 5}{x+3} \leq 0$

On a : $\triangleright x^2 - 5 = 0$ est équivalent à $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

$\triangleright x + 3 = 0$ est équivalent à $x = -3$

D'où le tableau de signe de $\frac{x^2 - 5}{x+3}$ est le suivant:

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$		
$x^2 - 5$	+	+	0	-	0	+	
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	
$\frac{x^2 - 5}{x + 3}$	-		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I): $\frac{(x+1)^2}{x+3} \leq 2$ est :

$$S =]-\infty; -3[\cup [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

Exercice 56

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$

1 Vérifions que $P(1) = 0$

On a : $P(1) = 1^3 + 1 - 10 + 8 = 0$

2 a. Déterminons a et b tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx - 8)$ en utilisant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} \text{On a : } x^3 + x^2 - 10x + 8 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 8 \\ \hline 2x^2 + 10x + 8 & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -8x + 8 & \\ 8x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où : $P(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 8)$, c'est-à-dire $a=1$ et $b=2$.

b. Résolvons l'équation $P(x) = 0$ ($P(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 8)$)

On a : $P(x) = 0$ si et seulement si $x-1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 8 = 0$

équivalent à : $x = 1$ ou $(x+1)^2 = 9$

équivalent à : $x = 1$ ou $x+1 = 3$ ou $x+1 = -3$

équivalent à : $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = -4$

Donc : $S = \{-4; 1; 2\}$

c. Résolvons l'inéquation $P(x) < 0$

Dressons le tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$		
$x-1$	-	-	0	+	+		
x^2+2x-8	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est :

$$S =]-\infty, -4[\cup]1, 2[$$

3 Résolvons l'équation (E): $x\sqrt{x} + x = 2(5\sqrt{x} - 4)$

L'équation (E) est définie sur $[0; +\infty[$

L'équation (E) est équivalente à : $x\sqrt{x} + x - 10\sqrt{x} + 8 = 0$

Posons $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$. (Donc $\sqrt{x^2} = X$ et $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x} = X^3$)

L'équation (E) devient: $X^3 + X^2 - 10X + 8 = 0$

et d'après la question 2) b) on a: $X \geq 0$ ou $X = 1$ ou $X = 2$ et comme $X \geq 0$,
alors $X = 1$ ou $X = 2$,

C'est-à-dire $\sqrt{x} = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$ finalement $x = 1$ ou $x = 4$ d'où $S = \{1; 4\}$

Exercice 57

1 a. Résolvons l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$

On a: $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$ d'où $x_1 = \frac{7-1}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$,

Donc $S = \{3; 4\}$

► Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

b. Factorison le polynôme $P(x) = x^2 - 7x + 12$

puisque les racines de $P(x)$ sont 3 et 4 et $a = 1$ alors $P(x) = 1(x-3)(x-4)$,

C'est-à-dire : $P(x) = (x-3)(x-4)$

2 a. Résolvons l'inéquation $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$

Posons $X = x^2$ avec $X \geq 0$.

On a: $x^4 - 7x^2 + 12 = X^2 - 7X + 12$

$x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$ équivaut à $P(X) \leq 0$ et $X \geq 0$

d'où $X \in [3; 4]$ (d'après de tableau de signes de $P(x)$)

et comme $x^2 = X$

alors $3 \leq x^2 \leq 4$

finalement: $\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$ d'où $\sqrt{3} \leq |x| \leq 2$

donc $-2 \leq x \leq -\sqrt{3}$ ou $2 \leq x \leq \sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$ est:

$$S = [-2, -\sqrt{3}] \cup [2, \sqrt{3}]$$

b. Résolvons l'inéquation $x - 7\sqrt{x} + 12 > 0$

Posons: $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$ et $x \geq 0$.

L'inéquation devient $X^2 - 7X + 12 > 0$ et $X \geq 0$

et d'après le tableau de signes de $P(x)$.

On a: $((X < 3 \text{ ou } X > 4) \text{ et } X \geq 0)$ d'où $(0 \leq X < 3 \text{ et } X > 4)$

et comme $\sqrt{x} = X$

alors: $0 \leq \sqrt{x} < 3 \text{ ou } \sqrt{x} > 4$ c'est-à-dire $0 \leq x < 9 \text{ ou } x > 16$

Donc: $S = [0; 9[\cup]16; +\infty[$

Exercice 58

$$P(x) = 6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6$$

1 a. Est-ce que 0 est une racine de $P(x)$?

On a: $P(0) = 6$ et $6 \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de $P(x)$

b. Montrons que $\frac{3}{2}$ est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{on a: } P\left(\frac{3}{2}\right) &= 6 \times \frac{81}{16} - \frac{27}{8} - 14 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 6 \\ &= \frac{243 - 27 - 252 - 12 + 48}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{2}$ est une racine de $P(x)$

2 Déterminons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$

Avec la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$ on a:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6 & x + 1 \\ -6x^4 - 6x^3 & 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 \\ \hline -7x^3 - 14x^2 - x + 6 & \\ 7x^3 + 7x^2 & \\ \hline -7x^2 - x + 6 & \\ 7x^2 + 7x & \\ \hline 6x + 6 & \\ -6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc: $Q(x) = 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$

3 a. Montrons que: $\frac{Q(a)}{a^4} = P\left(\frac{1}{a}\right)$

Soit a un réel non nul

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } P\left(\frac{1}{a}\right) &= \frac{6}{a^4} - \frac{1}{a^3} - \frac{14}{a^2} - \frac{1}{a} + 6 \\
 &= \frac{1}{a^4}(6 - a - 14a^2 - a^3 + 6a^4) \\
 &= \frac{6a^4 - a^3 - 14a^2 - a + 6}{a^4} \\
 &= \frac{P(a)}{a^4}
 \end{aligned}$$

Donc: $\frac{P(a)}{a^4} = P\left(\frac{1}{a}\right)$

b. Dédons les racines de $P(x)$

Si a est racine de $P(x)$ alors $P(a) = 0$

d'où: $\frac{P(a)}{a^4} = 0$; c'est-à-dire $P\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

donc $\frac{1}{a}$ est une racine de $P(x)$,

On a $\frac{3}{2}$ une racine de $P(x)$ et -1 est aussi une racine de $P(x)$ (Car $P(x) = (x+1)Q(x)$)

d'où $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{-1}$ sont aussi des racines de $P(x)$

Finalement les racines de $P(x)$ sont $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ et -1

4 Résolvons l'inéquation $P(x) \geq (x+1)(2x-3)(x-2)$

On sait que $P(x)$ admet trois racines (avec -1 racine double)

d'où $P(x) = 6(x+1)^2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$ que l'on peut écrire:

$$(x+1)^2(2x-3)(3x-2)$$

L'inéquation $P(x) \geq (x+1)(2x-3)(x-2)$ est équivalente à

$$(x+1)^2(3x-2) \geq (x+1)(2x-3)(x-2)$$

que l'on peut écrire: $(x+1)^2(2x-3)(3x-2) - (x+1)(2x-3)(x-2) \geq 0$

d'où: $(x+1)(2x-3)[(x+1)(3x-2) - (x-2)] \geq 0$

c'est-à-dire: $(x+1)(2x-3)(3x^2 - 2x + 3x - 2 - x + 2) \geq 0$

d'où: $3x^2(x+1)(2x-3) \geq 0$

Dressons le tableau de signes de l'expression $3x^2(x+1)(2x-3)$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3x^2$	+	+	0	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$2x-3$	-	-	-	0	+
$3x^2(x+1)(2x-3)$	-	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq (x+1)(2x-3)(x-2)$ est:

$$S =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right] \setminus \{0\}$$

Exercice 59

$$P(x) = 6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6$$

1 a. Vérifions que 0 n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$

On a : $P(0) = 6$ et $6 \neq 0$.

Donc 0 n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$

b. Montrons que $\frac{P(x)}{x^2} = 6t^2 - 19t + 13$, avec : $t = x + \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

Posons $t = x + \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } 6t^2 - 19t + 13 &= 6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 19\left(x + \frac{1}{x}\right) + 13 \\
 &= 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 19x - \frac{19}{x} + 13 \\
 &= 6x^2 + \frac{6}{x^2} + 12 - 19x - \frac{19}{x} + 13 \\
 &= \frac{6x^4 + 6 + 12x^2 - 19x^3 - 19x + 13x^2}{x^2} \\
 &= \frac{6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 6t^2 - 19t + 13 = \frac{P(x)}{x^2}$$

2 Résolvons l'équation (E): $6t^2 - 19t + 13 = 0$

On a : $a + b + c = 0$ donc les solutions de l'équation (E) sont 1 et $\frac{c}{a} = \frac{13}{6}$

$$\text{D'où } S = \left\{1; \frac{13}{6}\right\}$$

3 Résolvons l'équation $P(x) =$

Comme 0 n'est pas racine de $P(x)$ alors $P(x) = 0$ est équivalent à $\frac{P(x)}{x^2} = 0$

$$\text{or } \frac{P(x)}{x^2} = 6t^2 - 19t + 13$$

donc $\frac{P(x)}{x^2} = 0$ signifie que $6t^2 - 19t + 13 = 0$ et $t = x + \frac{1}{x}$ et d'après la question précédente $t = 1$ ou $t = \frac{13}{6}$,

$$\text{Donc: } x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

► L'équation $x + \frac{1}{x} = 1$ est équivalente à : $x^2 - x + 1 = 0$ et comme $\Delta < 0$ alors l'équation $x + \frac{1}{x}$ n'admet pas de solution.

► L'équation $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ est équivalente à : $6x^2 - 13x + 6 = 0$

$$\text{le discriminant : } \Delta = (-13)^2 - 4 \times 6 \times 6$$

$$\text{on a : } \Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{13 + 5}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right\}$$

Exercice 60

1 a. Vérifions que $\frac{a}{b} = 4 - 3\sqrt{2}$

$$\text{On a : } a = 1 - \sqrt{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ donc : } \frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{a}{b} &= \frac{(1 - \sqrt{2})2}{(2 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{2(2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{a}{b} = 4 - 3\sqrt{2}$$

b. Vérifions que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) - 2 &= (4 - 3\sqrt{2})^2 - 8(4 - 3\sqrt{2}) - 2 \\ &= 16 + 18 - 24\sqrt{2} - 32 + 24\sqrt{2} - 2 = 0 \end{aligned}$$

c. Dédoublons les solutions de l'équation (E): $x^2 - 8x - 2 = 0$

D'après la question précédente le nombre $\frac{a}{b} = 4 - 3\sqrt{2}$ est solution de l'équation (E).

déterminons la 2ème solution de l'équation (E).

on sait que si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $mx^2 + nx + p = 0$ ou $m \neq 0$

$$\text{alors: } x_1 + x_2 = \frac{-n}{m}$$

$$\text{donc: } (4 - 3\sqrt{2}) + x_2 = 8 ; x_2 = 8 - 4 + 3\sqrt{2} = 4 + 3\sqrt{2}$$

$$\text{D'où: } S = \{4 - 3\sqrt{2}; 4 + 3\sqrt{2}\}$$

Exercice 61

1 Résolvons l'équation $Q(x) = xP(x)$

$$\text{On a: } P(x) = 2x^2 + 11x - 21 \text{ et } Q(x) = 2x^3 + 9x^2 - 33x + 14$$

$$Q(x) = xP(x) \text{ équivaut à } 2x^3 + 9x^2 - 33x + 14 = 2x^3 + 11x^2 - 21x$$

$$\text{équivaut à } 2x^2 + 12x - 14 = 0$$

$$\text{équivaut à } x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\text{On a: } a + b + c = 0 \text{ alors } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = -7 ; \text{ finalement } S = \{1; -7\}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le discriminant Δ .

2 a. Vérifions que $Q(x)$ est divisible par $x - 2$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } Q(2) &= 2 \times 8 + 9 \times 4 - 33 \times 2 + 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

b. Résolvons l'équation $Q(x) = 0$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $(x - 2)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 9x^2 - 33x + 14 & x - 2 \\ - 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 + 13x - 7 \\ \hline 13x^2 - 33x + 14 & \\ - 13x^2 + 26x & \\ \hline - 7x + 14 & \\ 7x - 14 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc: $Q(x) = (x-2)(2x^2 + 13x - 7)$



Finalement $Q(x) = 0$ si et seulement si $(x-2 = 0 \text{ ou } 2x^2 + 13x - 7)$

► Pour l'équation $2x^2 + 13x - 7 = 0$

On a: $\Delta = (13)^2 - 4 \times 2 \times (-7)$

$$= 225$$

$$= (15)^2$$

$$\text{D'où } x_1 = \frac{-13-15}{4} = -7 \text{ et } x_2 = \frac{-13+15}{4} = \frac{1}{2}$$

► Pour l'équation $x-2=0$

On a: $x-2=0$ si et seulement si $x=2$

Finalement: l'ensemble des solutions de l'équation $Q(x) = 0$ est:

$$S = \left\{ -7, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

3 Calculons $P(1)$ et $Q(1)$ puis résolvons l'équation $P(x) = Q(x)$

$$P(1) = 2 \times 1^2 + 11 - 21 = -8$$

$$Q(1) = 2 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 33 + 14 = -8$$

$$\text{D'où } P(1) = Q(1)$$

► L'équation $P(x) = Q(x)$ est équivalente à $Q(x) - P(x) = 0$ et comme $Q(1) - P(1) = 0$

alors 1 est une racine du polynôme $Q(x) - P(x)$

$$\text{On a: } Q(x) - P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 44x + 35$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 - 44x + 35 & x - 1 \\ \underline{2x^3 + 2x^2} & 2x^2 + 9x - 35 \\ & 9x^2 - 44x + 35 \\ & \underline{-9x^2 + 9x} \\ & -35x + 35 \\ & \underline{35x - 35} \\ & 0 \end{array}$$

$$\text{donc: } Q(x) - P(x) = (x-1)(2x^2 + 9x - 35)$$

$$Q(x) - P(x) = 0 \text{ si et seulement si } (x-1 = 0 \text{ ou } 2x^2 + 9x - 35 = 0)$$

► $x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 1$

► Pour l'équation $2x^2 + 9x - 35 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (9)^2 - 4 \times 2 \times (-35) \\ &= 361 \\ &= (19)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où: } x_1 &= \frac{-9 - 19}{4} \quad \text{et } x_2 = \frac{-9 + 19}{4} \\ x_1 &= -7 \quad \text{et } x_2 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Finalement: l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = Q(x)$ est:

$$S = \left\{-7; 1; \frac{5}{2}\right\}$$

Exercice 62

$$P(x) = x^4 + 12x^3 + 50x^2 + 84x + 45$$

1 Montrons que -3 est une racine du polynôme $P(x)$

$$\begin{aligned}\text{On a: } P(-3) &= 81 - 12 \times 27 + 50 \times 9 - 84 \times 3 + 45 \\ &= 576 - 576 = 0\end{aligned}$$

Donc -3 est une racine de $P(x)$

2 a. Déterminons k tel que $P(x) + k = (x^2 + 6x + 7)^2$

$$\text{On a: } (x^2 + 6x + 7)^2 = x^4 + 36x^2 + 49 + 12x^3 + 14x^2 + 84x$$

infos:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\text{d'où: } (x^2 + 6x + 7)^2 = x^4 + 12x^3 + 50x^2 + 84x + 45 + 4$$

$$\text{c'est-à-dire: } (x^2 + 6x + 7)^2 = P(x) + 4,$$

$$\text{D'où: } k = 4$$

b. Dédudons que $P(x) = (x + 3)^2(x^2 + 6x + 5)$

$$\begin{aligned}\text{On a: } P(x) &= (x^2 + 6x + 7)^2 - 4 \\ &= (x^2 + 6x + 7 - 2)(x^2 + 6x + 7 + 2) \\ &= (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 9) \\ &= (x^2 + 6x + 5)(x + 3)^2\end{aligned}$$

$$\text{Finalement: } P(x) = (x + 3)^2(x^2 + 6x + 5)$$

3 Résolvons l'équation $P(x) = 0$

On a : $P(x) = 0$ équivaut à $((x+3)^2 = 0$ ou $x^2 + 6x + 5 = 0$)

équivaut à : $(x+3 = 0$ ou $(x+3)^2 - 9 + 5 = 0$)

équivaut à : $(x = -3$ ou $(x+3)^2 = 4$)

équivaut à : $(x = -3$ ou $x+3 = 2$ ou $x+3 = -2$)

équivaut à : $(x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = -5$)

Finalement: $S = \{-5; -1; 3\}$

Exercice 63

$$P(x) = 10x^3 - 9x^2 - 37x + 42$$

1 a. Montrons que $P(x)$ est divisible par $x+2$

$$\begin{aligned} \text{On a: } P(-2) &= 10 \times (-8) - 9 \times (4) - 37 \times (-2) + 42 \\ &= -116 + 116 = 0 \end{aligned}$$

Donc: $P(x)$ est divisible par $x+2$

b. Déterminons le réel a tel que $P(x) = (x+2)(10x^2 + ax + 21)$

$$\begin{aligned} (x+2)(10x^2 + ax + 21) &= 10x^3 + ax^2 + 21x + 20x^2 + 2ax + 42 \\ &= 10x^3 + (a+20)x^2 + (21+2a)x + 42 \end{aligned}$$

$$P(x) = (x+2)(10x^2 + ax + 21) \text{ équivaut à: } \begin{cases} a+20 = -9 \\ 2a+21 = -37 \end{cases} ; (\text{par identification})$$

$$\text{équivaut à: } a = -29$$

$$\text{D'où: } P(x) = (x+2)(10x^2 - 29x + 21)$$

2 Résolvons l'inéquation $Q(x) < 0$ (avec $Q(x) = 10x^2 - 29x + 21$)

$$\begin{aligned} \Delta &= (-29)^2 - 4 \times 10 \times 21 \\ &= 841 - 840 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } x_1 = \frac{29-1}{20} = \frac{7}{5} \text{ et } x_2 = \frac{29+1}{20} = \frac{3}{2}$$

Dressons le tableau de signe de $Q(x)$

x	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$Q(x)$	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) < 0$ est $S = \left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[$

b. Montrons que $1 + Q(x) > 0$ pour tout réel x

On a: $Q(x) + 1 = 10x^2 - 29x + 22,$

On a: $\Delta = (-29)^2 - 4 \times 10 \times 22 = -39$

d'où $\Delta < 0$ et $a > 0$; ($a = 10$)

donc $10x^2 - 29x + 22 > 0$ pour tout réel x

(Le trinôme $10x^2 - 29x + 22$ a le signe de 10),

Finalement: $1 + Q(x) > 0$ pour tout réel x .

c. ▶ Vérifions que: $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

On a: $\sqrt{2}^2 = 2$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$ et $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} < 2$

d'où $\left(\frac{7}{5}\right)^2 < \sqrt{2}^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$ et les nombres $\frac{7}{5}$, $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$ sont positifs,

Donc: $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

▶ Déduisons que: $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

Comme $Q(x) < 0$ sur l'intervalle $\left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[$ et $\sqrt{2} \in \left] \frac{7}{5}; \frac{3}{2} \right[$

alors: $Q(\sqrt{2}) < 0$ (1);

d'après 2) b) $1 + Q(x) > 0$ pour tout réel x

c'est-à-dire: $Q(x) > -1$ pour tout réel x

en particulier: $Q(\sqrt{2}) > -1$ (2);

De (1) et (2) on déduit que $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

d. Calculons $Q(\sqrt{2})$ et déduisons que $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

On a: $Q(x) = 10x^2 - 29x + 21$

d'où: $Q(\sqrt{2}) = 20 + 21 - 29\sqrt{2} = 41 - 29\sqrt{2}$

comme $-1 < Q(\sqrt{2}) < 0$

alors: $-1 < 41 - 29\sqrt{2} < 0$

donc: $-42 < -29\sqrt{2} < -41$

D'où: $41 < 29\sqrt{2} < 42$ finalement $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{42}{29}$

Exercice 64

1 Déterminons m sachant que 2 est une racine de $P(x)$

On a: $P(x) = x^3 - (2 + m)x^2 - 4mx + (11m + 3)$

2 est une racine de $P(x)$ signifie que $P(2) = 0$

c'est-à-dire $8 - 4(2 + m) - 8m + 11m + 3 = 0$; d'où $-m = -3$,

Donc $m = 3$

2a. Déterminons a, b et c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ (avec $m = 3$)

Pour $m = 3$ on a: $P(x) = x^3 - 5x^2 - 12x + 36$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 - 12x + 36 & x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 & x^2 - 3x - 18 \\ \hline -3x^2 - 12x + 36 & \\ 3x^2 - 6x & \\ \hline -18x + 36 & \\ 18x - 36 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

d'où $P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 18)$,

Finalement $a = 1$, $b = -3$ et $c = -18$

b. Résolvons l'équation $x^2 - 3x - 18 = 0$

On a: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18)$

$\Delta = 81$

donc: $x_1 = \frac{3-9}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{3+9}{2} = 6$,

D'où $S = \{-3; 6\}$

c. Résolvons l'inéquation $P(x) < 0$

On a: $P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 18)$

x	$-\infty$	-3	2	6	$+\infty$		
$x-2$	-	-	0	+	+		
$x^2-3x-18$	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est:

$$S =]-\infty; -3[\cup]2; 6[$$

d. Résolvons l'inéquation (I): $x\sqrt{x} - 5x - 12\sqrt{x} + 36 < 0$

Posons $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$ et $x \geq 0$

L'inéquation (I) devient $X^3 - 5X^2 - 12X + 36 < 0$

$$X^3 - 5X^2 - 12X + 36 < 0 \text{ équivaut à } P(x) < 0$$

$$\text{équivaut à } X \in]2; 6[\quad (\text{car } X > 0)$$

$$\text{équivaut à } 2 < \sqrt{x} < 6$$

$$\text{équivaut à } 4 < x < 36$$

$$\text{Donc : } S =]4; 36[$$

e. Déterminons le signe $Q(\alpha)$ sachant que $-1 < \alpha < 1$

$Q(x) = x^2 - 3x - 18$ et d'après le tableau de signes ci-dessus, on a $Q(x) < 0$

Pour tout $x \in]-3; 6[$ et comme $-1 < \alpha < 1$ alors $\alpha \in]-3; 6[$

$$\text{Donc: } Q(\alpha) < 0$$

Exercice 65

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \text{ et } (F): X^2 - 2X - 3 = 0$$

1 Résolvons l'équation (F): $X^2 - 2X - 3 = 0$

On a: $a + c = b$ donc l'équation (F) a pour solution -1 et $\frac{-c}{a} = 3$

$$\text{D'où: } S = \{-1; 3\}$$

Remarque : On peut utiliser le discriminant Δ .

2 a. Vérifions que: $P(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$

$$\begin{aligned} \text{On a: } (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } P(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$$

b. Résolvons l'équation $P(x) = 0$

$$\text{Posons: } X = x^2 - 2x,$$

L'équation $P(x) = 0$ s'écrit: $X^2 - 2X - 3 = 0$ et d'après la question 1.

On a: $X = -1$ ou $X = 3$

d'où: $x^2 - 2x = -1$ ou $x^2 - 2x = 3$

que l'on peut écrire $x^2 - 2x + 1 = 0$ ou $x^2 - 2x - 3 = 0$

d'où: $(x - 1)^2 = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 3$ (d'après 1)

finalement: $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 3$,

Donc: $S = \{-1; 1; 3\}$

c. Résolvons l'inéquation $P(x) \leq 0$

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 \leq 0$ où $X = x^2 - 2x$

► Résolvons d'abord l'inéquation $X^2 - 2X - 3 \leq 0$

On a:

X	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$X^2 - 2X - 3$	+	0	-	0	+

d'où $X^2 - 2X - 3 \leq 0$ si et seulement si $X \in [-1; 3]$

d'où: $P(x) \leq 0$ équivaut à $(x^2 - 2x) \in [-1; 3]$

équivaut à: $\begin{cases} x^2 - 2x \leq 3 \\ x^2 - 2x \geq -1 \end{cases}$

équivaut à: $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ (x - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$

équivaut à: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ (x - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$ est: $S = [-1; 3]$

3 a. Écrivons $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)^2$

On pose: $X = x^2 - 2x$ alors $P(x) = X^2 - 2X - 3$,

On a: $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$

donc: $P(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 3)$,

D'où: $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 3)$

b. Déduisons le signe de $P(\sqrt{2})$

$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)^2(\sqrt{2} - 3)$ et comme $(\sqrt{2} - 1)^2 > 0$ et $\sqrt{2} + 1 > 0$

et $\sqrt{2} - 3 < 0$; alors: $P(\sqrt{2}) < 0$

Exercice 66

Soit le polynôme $P(x) = -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4$

et l'équation: $(E): x^2 - 3x - 4 = 0$

1 a. Résolvons l'équation (E):

On a: $(E): x^2 - 3x - 4 = 0$

Les solutions de l'équation (E) sont -1 et $x_2 = -\frac{c}{a} = 4$ (Car $a + c = b$)

D'où $S = \{-1; 4\}$ (On peut aussi calculer le discriminant Δ)

b. Déduisons les solutions de l'équation: $|x^2 - 4|^2 - 3|x^2 - 4| - 4 = 0$

Posons $|x^2 - 4| = X$ avec $X \geq 0$

L'équation devient: $X^2 - 3X - 4 = 0$ et d'après la première question:

$X = -1$ ou $X = 4$

et comme $X \geq 0$ alors $X = 4$

d'où: $|x^2 - 4| = 4$ donc: $x^2 - 4 = 4$ ou $x^2 - 4 = -4$

finalement: $x^2 = 8$ ou $x^2 = 0$

par suite: $x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$ ou $x = 0$

Donc: $S = \{-2\sqrt{2}; 0; 2\sqrt{2}\}$

2 Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4 & x + 1 \\
 \underline{2x^3 + 2x^2} & -2x^2 + 9x - 4 \\
 9x^2 + 5x - 4 & \\
 \underline{-9x^2 - 9x} & \\
 -4x - 4 & \\
 \underline{4x + 4} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Donc le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$ est :

$Q(x) = -2x^2 + 9x - 4$ est le reste zéro.

3 a. Développons et réduisons $(-2x + 1)(x^2 - 3x - 4)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } (-2x + 1)(x^2 - 3x - 4) &= -2x^3 + 6x^2 + 8x + x^2 - 3x - 4 \\
 &= -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4 \\
 &= P(x)
 \end{aligned}$$

b. Résolvons l'inéquation $P(x) \leq 0$

Dressons le tableau de signes de $P(x)$. On a: $P(x) = (-2x + 1)(x^2 - 3x - 4)$

$P(x) = 0$ équivaut à $(-2x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 3x - 4 = 0)$

d'où $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$ ou $x = 4$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$		
$-2x+1$	+	+	0	-	-		
x^2-3x-4	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$ est:

$$S = \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty[$$

► Résolvons l'équation (E): $-2x\sqrt{x} + 7x + 5\sqrt{x} - 4 = 0$

Posons $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$. on a: $X^3 = x\sqrt{x}$ et $X^2 = x$

donc l'équation (E) s'écrit: $-2X^3 + 7X^2 + 5X - 4 = 0$

d'où $(X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = 4)$ (D'après 3) a)) et comme $X \geq 0$,

alors $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 4$

d'où: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x} = 4$ finalement $x = \frac{1}{4}$ ou $x = 16$

Conclusion: $S = \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$

Exercice 67

1 a. Montrons que (-1) est une racine du polynôme $P(x)$

On a: $P(x) = 2x^3 + (1 - 2\sqrt{3})x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

donc: $P(-1) = -2 + 1 - 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $= 0$

Donc: -1 est une racine du polynôme $P(x)$

b. Vérifions que : $P(x) = (x+1)(1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3}$

On a :

$$\begin{aligned}(x+1)(2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3}) &= 2x^3 - (1+2\sqrt{3})x^2 + x\sqrt{3} + 2x^2(1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3} \\&= 2x^3 + (2-1-2\sqrt{3})x^2 - (1+2\sqrt{3}-\sqrt{3})x\sqrt{3} \\&= 2x^3 + (1-2\sqrt{3})x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} \\&= P(x)\end{aligned}$$

Donc : $P(x) = (x+1)(2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3})$

2 a. Vérifions que : $(2\sqrt{3} - 1)^2 = 13 - 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{On a: } (2\sqrt{3} - 1)^2 &= 4 \times 3 - 2 \times 2\sqrt{3} + 1 \\&= 13 - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

► Résolvons l'équation $2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= (1+2\sqrt{3})^2 - 4 \times 2\sqrt{3} \\&= 13 + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \\&= 13 - 4\sqrt{3} \\&\Delta = (2\sqrt{3} - 1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où } x_1 &= \frac{1+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}{4} \quad \text{et } x_2 = \frac{1+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1}{4} \\x_1 &= \sqrt{3} \quad \text{et } x_2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc: } S = \left\{ \sqrt{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

b. Factorisons $P(x)$:

$$\text{On a: } P(x) = (x+1)(2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3})$$

Les racines du polynôme $Q(x) = 2x^2 - (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3}$ sont 1 et $2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{donc: } Q(x) &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \sqrt{3}) \\&= (2x - 1)(x - \sqrt{3})\end{aligned}$$

$$\text{D'où: } P(x) = (x+1) \times (2x-1)(x-\sqrt{3})$$

c. Résolvons l'inéquation (I): $P(x) \leq 2x(2x-1)(x+1)$

L'inéquation $P(x) \leq 2x(2x-1)(x+1)$ est équivalente à :

$$\begin{aligned}(x+1)(2x-1)(x-\sqrt{3}) &\leq 2x(2x-1)(x+1) \\(x+1)(2x-1)(x-\sqrt{3}) - 2x(2x-1)(x+1) &\leq 0 \\(x+1)(2x-1)(x-\sqrt{3}-2x) &\leq 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire: $(x+1)(2x-1)(-x-\sqrt{3}) \leq 0$

Dressons le tableau de signes de l'expression $(x+1)(2x-1)(-x-\sqrt{3})$

▶ $x+1=0$ signifie que $x=-1$

▶ $2x-1=0$ signifie que $x=\frac{1}{2}$

▶ $-x-\sqrt{3}=0$ signifie que $x=-\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$-x-\sqrt{3}$	+	0	-	-	-
$(x+1)(2x-1)(-x-\sqrt{3})$	+	0	-	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $S = [-\sqrt{3}; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 68

A. 1 a. Vérifions que $P(-1) = 0$

$$\text{On a: } P(x) = x^3 + (\sqrt{3}-2)x^2 - (3+2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3}$$

$$\text{donc: } P(-1) = -1 + \sqrt{3} - 2 + 3 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ = 0$$

D'où $P(-1) = 0$

b. Déterminons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + (\sqrt{3}-2)x^2 - (3+2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} & x+1 \\ \hline x^3 & x^2 + (\sqrt{3}-3)x - 3\sqrt{3} \\ \hline (\sqrt{3}-3)x^2 - (3+2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} & \\ -(\sqrt{3}-3)x^2 - (\sqrt{3}-3)x & \\ \hline -3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} & \\ 3\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{d'où } P(x) = (x+1)(x^2 + (\sqrt{3}-3)x - 3\sqrt{3})$$

$$\text{Donc: } Q(x) = x^2 + (\sqrt{3}-3)x - 3\sqrt{3}$$

2 Résolvons l'équation $Q(x) = 0$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Delta &= (\sqrt{3} - 3)^2 - 4 \times 1 \times (-3\sqrt{3}) \\ &= 12 - 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \\ &= 12 + 6\sqrt{3} \\ \Delta &= (\sqrt{3} + 3)^2\end{aligned}$$

$$\text{d'où: } x_1 = \frac{-(\sqrt{3} - 3) + \sqrt{3} + 3}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(\sqrt{3} - 3) - \sqrt{3} - 3}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Donc: } S = \{3; -\sqrt{3}\}$$

3 Dressons le tableau de signe de $P(x)$

$$\text{On a: } P(x) = (x + 1)(x^2 + (\sqrt{3} - 3)x - 3\sqrt{3})$$

$$P(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = -1 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = 3$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$	-		- 0 +		+
$x^2 + (\sqrt{3} - 3)x - 3\sqrt{3}$	+	0	-	- 0	+
$P(x)$	-		+ 0 -		+

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation:

$$(I): x^2|x| + (\sqrt{3} - 2)x^2 - (3 + 2\sqrt{3})|x| - 3\sqrt{3} \geq 0$$

$$\text{On pose: } X = |x|; \text{ d'où } X^3 = x^2|x| \text{ et } X^2 = |x|^2 = x^2$$

L'inéquation (I) devient $P(X) \geq 0$ et $X \geq 0$ et d'après le tableau de signe de $P(x)$

$$\text{On a: } P(x) \geq 0 \text{ équivaut à } (X \in [-\sqrt{3}, -1] \text{ ou } X \in [3; +\infty[) \text{ et } X \geq 0$$

$$\text{équivaut à: } X \in [3; +\infty[$$

$$\text{équivaut à: } |x| \geq 3$$

$$\text{équivaut à: } (x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3)$$

$$\text{Donc: } S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$$

infos:

$$|X| \geq A \text{ et } A \geq 0$$

équivaut:

$$X \leq -A \text{ ou } X \geq A$$

B. 1 Développons $(a + b + c)^2$ et déduisons que $ab + ac + bc = -3 - 2\sqrt{3}$

$$\text{On a: } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\text{et comme: } a + b + c = 2 - \sqrt{3} \text{ et } a^2 + b^2 + c^2 = 13$$

alors: $(2 - \sqrt{3})^2 = 13 + 2(ab + ac + bc)$

$$7 - 4\sqrt{3} - 13 = 2(ab + ac + bc)$$

$$-6 - 4\sqrt{3} = 2(ab + ac + bc)$$

D'où: $ab + ac + bc = \frac{2(-3 - 2\sqrt{3})}{2} = -3 - 2\sqrt{3}$

2 Calculons $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$

On a: $P(a) = a^3 + (\sqrt{3} - 2)a^2 - (3 + 2\sqrt{3})a - 3\sqrt{3}$

or: $a + b + c = 2 - \sqrt{3}$, $ab + ac + bc = -3 - 2\sqrt{3} = -(3 + 2\sqrt{3})$

et $abc = 3\sqrt{3}$.

Donc: $P(a) = a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc$
 $= a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc$

$$P(a) = 0$$

De la même façon on trouve $P(b) = P(c) = 0$

3 Déterminons l'ensemble des solutions du système (S):
$$\begin{cases} a + b + c = 2 - \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13 \\ abc = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

si le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (S), alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$

d'où $a = -\sqrt{3}$, $b = -1$ et $c = 3$

comme a, b et c jouent des rôles symétriques alors les solutions sont triplets:

$$(-\sqrt{3}, -1, 3); (-\sqrt{3}, 3, -1); (3, -1, -\sqrt{3}), (3, -\sqrt{3}, -1);$$

$$(-1, 3, -\sqrt{3}) \text{ et } (-1, -\sqrt{3}, 3).$$

Inversement: on vérifie que les triplets précédents sont solutions du système (S).

1 Rappels

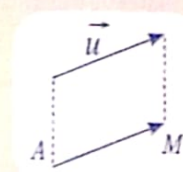
1. Vecteur dans le plan

Définition:

- ▶ Un vecteur non nul est défini par :
 - ▶ Une direction
 - ▶ Un sens
 - ▶ Une norme (une longueur)
- ▶ Soit A et B deux points distincts . On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
 - ▶ La direction du vecteur $\vec{u}$ est la droite (AB)
 - ▶ Le sens du vecteur $\vec{u}$ est le sens de A vers B
 - ▶ La norme du vecteur $\vec{u}$ (notée $\|\vec{u}\|$) est la distance AB : $\|\vec{u}\| = AB$
- ▶ Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a ni direction, ni sens , sa norme est nulle.
- ▶ Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul noté $\vec{0}$: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

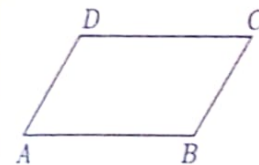
Propriété :

Si $\vec{u}$ est un vecteur et A un point du plan , alors , il existe un unique point M du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$



2. Égalité de deux vecteurs

- ▶ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux et on note : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement ils ont,
 - ▶ La même direction
 - ▶ Le même sens
 - ▶ La même norme.
- ▶ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $M = B$
- ▶ Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



(On peut remplacer cette égalité par l'une des égalités suivantes:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

3. Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont opposés lorsque'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

- ▶ L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$.
- ▶ L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$; $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

4. Somme de deux vecteurs

a. Relation de Chasles :

Soit A et B deux points du plan

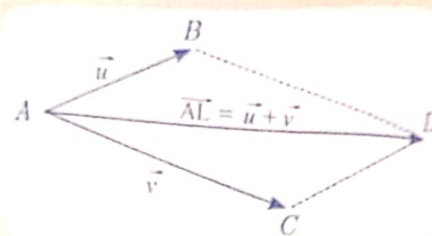
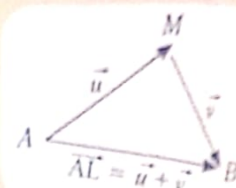
- ▶ Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
- ▶ Pour tous points M, N, P et L du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LB}$$

b. Règle du parallélogramme

La somme des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.



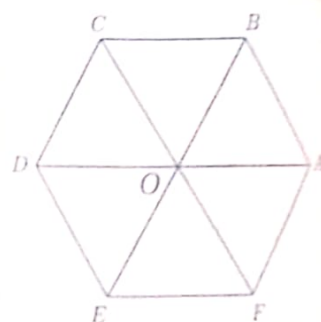
Exercices

Exercice 1

ABCDEF est un hexagone régulier de centre O (voir figure)

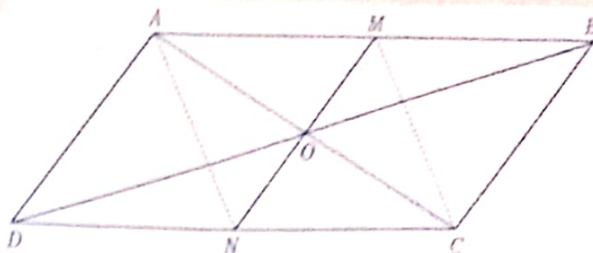
En utilisant les points de la figure,

- 1 Indiquer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$
- 2 Indiquer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{OA}$
- 3 Indiquer deux vecteurs de même direction, de même sens mais de longueurs différentes.
- 4 Indiquer deux vecteurs opposés.
- 5 Indiquer deux vecteurs de même direction, de sens opposé mais qui ne sont pas opposés.
- 6 Indiquer un vecteur égal à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité O
- 7 Indiquer un vecteur égal à $\overrightarrow{DE}$ d'origine B.



Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Les points M et N sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[DC]$ (voir figure).



Compléter les égalités suivantes par un point de la figure.

1 $\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{C}$

4 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D\dots}$

7 $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM} = \dots \overrightarrow{B}$

2 $\overrightarrow{CN} = \dots \overrightarrow{A}$

5 $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA} = \dots \overrightarrow{B}$

8 $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{D\dots}$

3 $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{M\dots}$

6 $\overrightarrow{C\dots} + \overrightarrow{NA} = \dots \overrightarrow{A}$

9 $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND} = \dots \overrightarrow{M}$

Exercice 3

A, B, C et D étant quatre points du plan. Démontrer que :

1 $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

2 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

3 $-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}$

4 $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que :

1 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

2 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

3 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

4 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$

5 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$

6 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle .

1 Construire les points E, F, G et H définis par :

a. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

d. $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BH}$

2 Montrer que le quadrilatère ACEB est un de parallélogramme.

Solutions

Exercice 1

1 Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FO}$

2 Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{OA}$ sont : $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{EF}$

3 Deux vecteurs de même direction , de même sens et de longueurs différentes : $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}$ (on peut citer aussi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$ ou encore $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EB}$...)

4 Deux vecteurs opposés : $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ (on peut citer aussi : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ (ou $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{CO}$) ou $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{FE}$ )

5 Deux vecteurs de même direction , de sens opposé mais qui ne sont pas opposés : $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BE}$

6 Un vecteur égal à $\overrightarrow{DC}$ et d'extrémité O : $\overrightarrow{EO}$

7 Un vecteur égal à $\overrightarrow{DE}$ d'origine B : $\overrightarrow{BA}$

Exercice 2

1 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2 $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA}$

3 $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB}$

7 $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB}$
 $= \overrightarrow{DB}$

8 $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}$

4 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$ (Relation de Chasles)

5 $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ (Car $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$)

6 $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ (Relation de Chasles)

(Car $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$)

(Relation de Chasles)

(Car $-\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MB}$)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{DN} \end{aligned}$$

(Car $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NM}$)

$$\begin{aligned} 9 \quad \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND} &= \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DN} \\ &= \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA} \\ &= \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{NM} \end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} 1 \quad \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \quad (\text{D'après la relation de Chasles}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad -\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \quad (\text{Car } -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{BA} \quad (\text{D'après la relation de Chasles}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

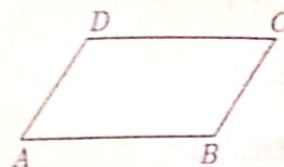
Exercice 4

$ABCD$ est un parallélogramme.

$$\begin{aligned} 1 \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{Car } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}) \\ &= \overrightarrow{DB} \quad (\text{D'après la relation de Chasles}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \quad (\text{Car } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{Car } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}) \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{CA} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}5 \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC} \quad (\text{Car } \overrightarrow{CC} = \vec{0}) \\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Exercice 5

1 Construction des points E, F, G et H

- a. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (Donc E est le 4ème sommet du parallélogramme ABEC)
- b. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ (ABFE est un parallélogramme)
- c. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
- d. $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BH}$ équivaut à $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH}$
équivaut à $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}$
équivaut à $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}$ (ABCH est un parallélogramme)

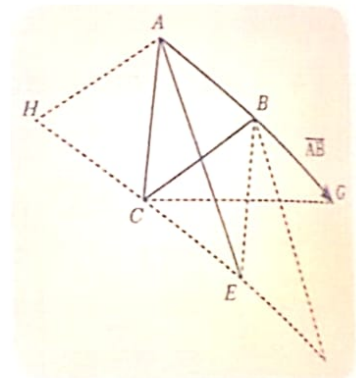
2 Montrons que ACEB est un parallélogramme

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

d'où : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

Donc ACEB est un parallélogramme.

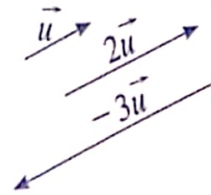


2 Produit d'un vecteur par un réel

Définition:

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ ou $k.\vec{u}$ tel que:



- Le vecteur $k\vec{u}$ a la même direction que celle du vecteur $\vec{u}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et il est de sens contraire si $k < 0$.
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

Propriétés:

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous réels k et k' on a:

- 1 $(k + k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- 2 $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- 3 $k'(k\vec{u}) = (k'k)\vec{u}$
- 4 $1.\vec{u} = \vec{u}$
- 5 $0.\vec{u} = \vec{0}$ et $k.\vec{0} = \vec{0}$
- 6 $k.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à : $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercices

Exercice 6

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs.

Écrire dans chacun des cas suivants, le vecteur $\vec{u}$ sous la forme $a\vec{i} + b\vec{j}$ où a et b sont des réels.

- 1 $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7(-\vec{i} + 3\vec{j})$
- 2 $\vec{u} = -(\vec{i} - 2\vec{j}) + 2(-\vec{i} + \vec{j}) - 3(2\vec{i} + \vec{j})$
- 3 $\vec{u} = -\frac{3}{2}(5\vec{i} + 4\vec{j}) - \frac{5}{3}(-3\vec{i} - 2\vec{j})$

Exercice 7

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A et B sont deux points comme indiqués sur la figure.

1 Recopier la figure.

2 Placer les points M , N , P , Q , L , K et H définis par:

a. $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u}$

e. $\overrightarrow{AL} = \vec{u} + \vec{v}$

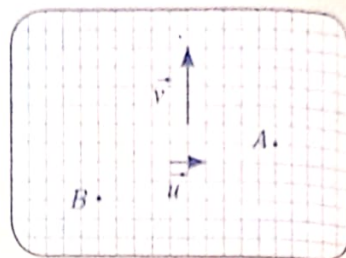
b. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{v}$

f. $\overrightarrow{BK} = -2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

c. $\overrightarrow{BP} = -2\vec{u}$

g. $\overrightarrow{HA} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$

d. $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\vec{v}$



Exercice 8

Soit A , B et C trois points.

1 Montrer que: $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{AC}$

2 Montrer que: $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

3 Montrer que pour tout point M du plan,

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

4 Montrer que: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 9

Soit A et B deux points du plan.

Construire avec précision les points I , J et K définis par:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ} = \frac{9}{5}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 10

Soit ABC un triangle.

Construire les points M , N , P et Q définis par:

1 $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$

2 $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$

3 $5\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{CP} = \vec{0}$

4 $2\overrightarrow{BQ} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice 6

$$\begin{aligned} 1 \quad \vec{u} &= 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7(-\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= 3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{i} - 21\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + 7\vec{i} - 5\vec{j} - 21\vec{j} \\ &= (3 + 7)\vec{i} + (-5 - 21)\vec{j} \end{aligned}$$

Donc : $\vec{u} = 10\vec{i} - 26\vec{j}$

$$\begin{aligned} 2 \quad \vec{u} &= -(\vec{i} - 2\vec{j}) + 2(-\vec{i} + \vec{j}) - 3(2\vec{i} + \vec{j}) \\ &= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{i} - 3\vec{j} \\ &= (-\vec{i} - 2\vec{i} - 6\vec{i}) + (2\vec{j} + 2\vec{j} - 3\vec{j}) \end{aligned}$$

Donc : $\vec{u} = -9\vec{i} + \vec{j}$

$$\begin{aligned} 3 \quad \vec{u} &= -\frac{3}{2}(5\vec{i} + 4\vec{j}) - \frac{5}{3}(-3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= -\frac{15}{2}\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{i} + \frac{10}{3}\vec{j} \\ &= \left(-\frac{15}{2}\vec{i} + 5\vec{i}\right) + \left(-6\vec{j} + \frac{10}{3}\vec{j}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\vec{u} = -\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{8}{3}\vec{j}$

Exercice 7

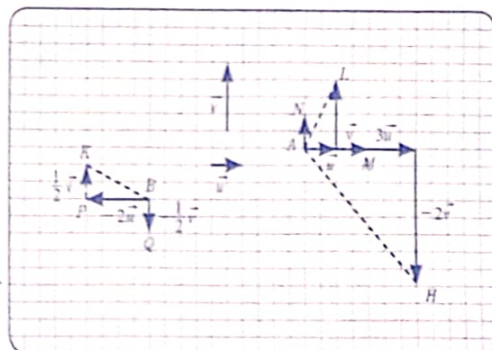
1 Construction des points M, N, P, Q et L :

$$\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} \quad ; \quad \overrightarrow{AL} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad ; \quad \overrightarrow{BK} = -2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{BP} = -2\vec{u} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{HA} = -3\vec{u} + 2\vec{v}, \text{ donc : } \overrightarrow{AH} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$$



Exercice 8

1 Montrons que : $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 5\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

2 Montrons que : $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

3 Montrons que pour tout point M du plan,

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

On a :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} &= 3\overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{AC} \\ &= 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

4 Montrons que : $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a :

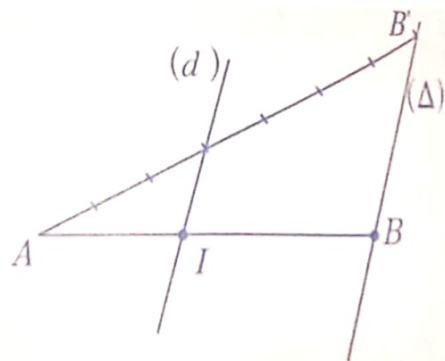
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2 - 4\right)\overrightarrow{AB} + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Exercice 9

Construction des points I , J et K :

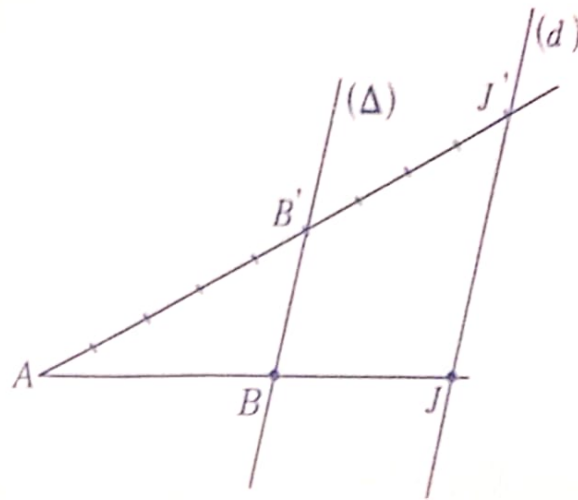
1 $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

Pour placer le point I , on trace une demi-droite d'origine A (non perpendiculaire à (AB)), trace 7 graduations égales sur cette demi-droite,

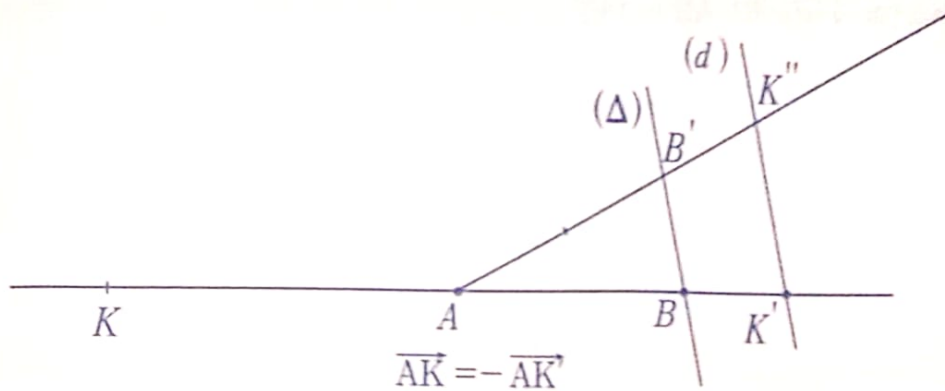


on trace la droite (Δ) passant par la 1^{ère} graduation et le point B
 on trace la droite (d) passant par la 3^{ème} graduation et parallèle à (Δ) ,
 la droite (d) coupe le segment $[AB]$ au point I (utilisation du théorème de Thalès).

2 $\overrightarrow{AI} = \frac{9}{5} \overrightarrow{AB}$ (On procède de la même façon pour placer J)



3 $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$



Exercice 10

Construction des points M , N , P et Q :

1 On a: $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$,

Donc: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

2 $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

équivaut à $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AB}$

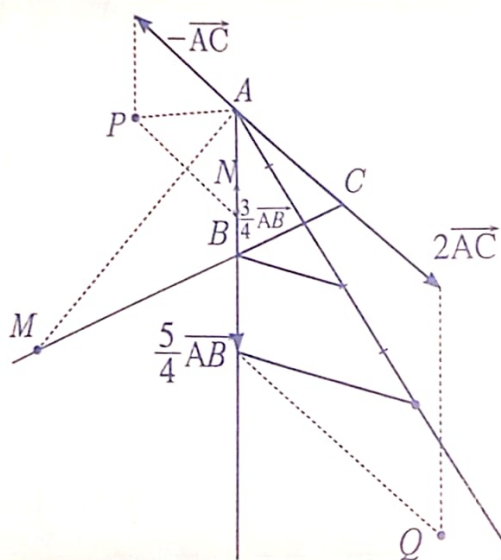
équivaut à $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

3

$$\begin{aligned}
 5\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{CP} &= \vec{0} \text{ équivaut à } 5\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) - 4(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) = \vec{0} \\
 &\text{équivaut à } 5\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{AP} = \vec{0} \\
 &\text{équivaut à } 5\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \\
 &\text{équivaut à } 4\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \\
 &\text{équivaut à } \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{BQ} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \\
 \text{équivaut à } 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}) - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \\
 \text{équivaut à } 2\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} &= \vec{0} \\
 \text{équivaut à } \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ} - \frac{11}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\
 \text{équivaut à } \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ} - \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\
 \text{équivaut à } \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ} - \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\
 \text{équivaut à } \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\
 \text{équivaut à } \overrightarrow{AQ} &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

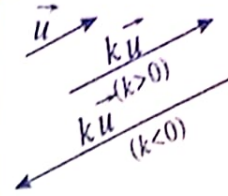


a. Colinéarité de deux vecteurs:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

► On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

► $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que: $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$).



b. Alignement de trois points:

Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

c. Parallélisme de deux droites:

Soit A , B , C et D quatre points distincts deux à deux.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercices

Exercice 11

Soit A et B deux points du plan.

E et F sont les points définis par: $-\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{BF} = \vec{0}$

1 Montrer que: $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

2 Montrer que: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3 a. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

b. Que peut-on déduire pour les points A , E et F ?

Exercice 12

Soit ABC un triangle. I , J , K et G sont les points définis par: $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$;

$$2\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{JC}; 4\overrightarrow{BK} + 5\overrightarrow{CK} = \vec{0}; 2\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

1 a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

b. Que peut-on déduire pour les points A , B et I ?

2 Montrer que les points A , J et C sont alignés.

- 3 a. Montrer que: $2\overrightarrow{AG} + 9\overrightarrow{KG} = \vec{0}$
- b. Que peut-on conclure pour les points A , G et K ?
- 4 a. Montrer que: $\overrightarrow{JG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{JB}$
- b. En déduire que la droite (BJ) passe par le point G .
- 5 Montrer que: $\overrightarrow{IG} = \frac{5}{11}\overrightarrow{IC}$
- 6 En déduire les droites (AK) , (BJ) et (IC) ont un point commun.

Exercice 13

Soit ABC un triangle. On considère les points M , N et P définis par:

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} ; 3\overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{CN} ; \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

- 1 Montrer que: $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- 2 Montrer que: $\overrightarrow{MN} = -\frac{12}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- 3 Montrer que: $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- 4 En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Que peut-on dire des points M , N et P ?
- 5 Soit K le point défini par: $3\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
- a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b. Montrer que les points A , N et K sont alignés.
- 6 Montrer que les droites (AC) et (BK) sont parallèles.

Solutions

Exercice 11

$$-\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{BF} = \vec{0}$$

- 1 Montrons que: $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{BF} &= \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{FA} - 5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) = \vec{0} \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AF} = \vec{0} \\ &\text{équivaut à } -6\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{BA} \\ &\text{équivaut à } -6\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AB} \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2 Montrer que: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} &= \vec{0} \text{ équivaut à } -\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AF} = \vec{0} \\ &\text{équivaut à } -\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AF} \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB} + 3\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\right) \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

3 a. Colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$:

On a: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

donc: $\overrightarrow{AF} = -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$
 $= -\frac{5}{3}\overrightarrow{AE}$

autrement:

$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

donc: $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AF}$

D'où: $-2\overrightarrow{AE} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AF}$; ainsi $\overrightarrow{AF} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AE}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

Remarque: On peut trouver le coefficient de colinéarité en calculant le rapport:

$$\frac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \times (-2) = -\frac{5}{3}, \text{ donc: } \overrightarrow{AF} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AE}$$

On peut aussi inverser: $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = -\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = -\frac{3}{5}, \text{ donc: } \overrightarrow{AE} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$

b. Conséquence sur les points A , E et F .

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, donc les points A , E et F sont alignés.

Exercice 12

ABC est un triangle, et $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$

1 a. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

On a: $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ donc: $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{BI}$, d'où $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

b. Conséquence sur les points A , B et I .

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, donc les points A , B et I sont alignés.

2 Montrons que les points A , J et C sont alignés.

On a: $2\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{JC}$ donc: $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont colinéaires et par conséquent les points A, J et C sont alignés.

3 a. Montrons que: $2\overrightarrow{AG} + 9\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

$$\text{On a: } 2\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = \vec{0} \text{ et } 4\overrightarrow{BK} + 5\overrightarrow{CK} = \vec{0}$$

$$\text{donc: } 2\overrightarrow{AG} + 4(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KG}) + 5(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG}) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BK} + 4\overrightarrow{KG} + 5\overrightarrow{CK} + 5\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG} + \underbrace{(4\overrightarrow{BK} + 5\overrightarrow{CK})}_{\vec{0}} + 9\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

$$\text{D'où: } 2\overrightarrow{AG} + 9\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

b. Dédution pour les points A, G et K .

$$\text{On a: } 2\overrightarrow{AG} + 9\overrightarrow{KG} = \vec{0}, \text{ donc: } \overrightarrow{AG} = -\frac{9}{2}\overrightarrow{KG}.$$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{KG}$ sont colinéaires; et par conséquent les points A, K et G sont alignés.

4 a. Montrons que: $\overrightarrow{JG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{JB}$

$$\text{On a: } 2\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = \vec{0} \text{ et } 2\overrightarrow{AJ} - 5\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\text{donc: } 2(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JG}) + 4(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}) + 5(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JG}) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{JG} + 4\overrightarrow{BJ} + 4\overrightarrow{JG} + 5\overrightarrow{CJ} + 5\overrightarrow{JG} = \vec{0}$$

$$\underbrace{2\overrightarrow{AJ} - 5\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} - 4\overrightarrow{JB} + 11\overrightarrow{JG} = \vec{0}$$

$$\text{D'où: } \overrightarrow{JG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{JB}$$

b. Montrons que: $G \in (BJ)$

On a: $\overrightarrow{JG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{JB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JB}$ sont colinéaires, d'où les points J, G et B sont alignés (ils sont sur une même droite) donc la droite (BJ) passe par le point G .

5 Montrons que: $\overrightarrow{IG} = \frac{5}{11}\overrightarrow{IC}$

$$\text{On a: } 2\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

$$\text{donc: } 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG}) + 4(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IG}) + 5(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IG}) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IG} + 4\overrightarrow{BI} + 4\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{CI} + 5\overrightarrow{IG} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IG} + 4\overrightarrow{BI} + 4\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{CI} + 5\overrightarrow{IG} = \vec{0}$$

$$\underbrace{2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{BI}}_{\vec{0}} + 11\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{CI} = \vec{0} \quad (\text{Car: } \overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0})$$

Donc: $\vec{IG} = \frac{5}{11} \vec{IC}$

6 Montrons que les droites (AK) , (BJ) et (IC) ont un point commun.

- ▶ D'après la question 3)b), les points A , G et K sont alignés, donc $G \in (AK)$.
- ▶ D'après la question 4)b), la droite (BJ) passe par le point G donc $G \in (BJ)$.
- ▶ D'après la question 5) les vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{IC}$ sont colinéaires, donc les points I , G et C sont alignés, d'où $G \in (IC)$.

Conclusion: les trois droites (AK) , (BJ) et (IC) passent par le point G . Le point G est donc commun aux trois droites; on dit que les droites (AK) , (BJ) et (IC) sont concourantes en G .

Exercice 13

$$2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0} ; 3\vec{NB} = 2\vec{CN} ; \vec{PA} + \vec{PC} = \vec{0}.$$

1 Montrons que : $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{▶ } 2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0} & \text{ équivaut à } 2\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } 2\vec{MA} - 3\vec{MA} - 3\vec{AB} = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } \vec{AM} = 3\vec{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{▶ On a: } 3\vec{NB} = 2\vec{CN} & \text{ équivaut à } 3(\vec{NA} + \vec{AB}) - 2(\vec{CA} + \vec{AN}) = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } 3\vec{NA} + 3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 2\vec{AN} = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } -5\vec{AN} = -3\vec{AB} - 2\vec{AC} \\ & \text{équivaut à } \vec{AN} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC} \end{aligned}$$

2 Montrons que: $\vec{MN} = -\frac{12}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$

$$\begin{aligned} 2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0} & \text{ équivaut à } 2(\vec{MN} + \vec{NA}) - 3(\vec{MN} + \vec{NB}) = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } -\vec{MN} - 2\vec{AN} + 3\vec{BN} = \vec{0} \\ & \text{équivaut à } \vec{MN} = -2\vec{AN} + 3(\vec{BA} + \vec{AN}) \\ & \text{équivaut à } \vec{MN} = \vec{AN} - 3\vec{AB} \\ & \text{équivaut à } \vec{MN} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC} - 3\vec{AB} \text{ (car } \vec{AN} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}) \\ & \text{équivaut à } \vec{MN} = -\frac{12}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC} \end{aligned}$$

3 Montrons que: $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 équivaut à $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$
 équivaut à $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$
 $= -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (Car $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ d'après 1)

Donc: $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

4 Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

On a: $\overrightarrow{MN} = -\frac{12}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a: $\frac{-\frac{12}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{12}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$ et $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$

Autrement: $\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{5} \times 3\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
 $= \frac{4}{5}(-3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$
 $= \frac{4}{5}\overrightarrow{MP}$

Donc: $\overrightarrow{MN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{MP}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires, et par conséquent les points M , N et P sont alignés.

5 a. Exprimons $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$3\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 équivaut à $3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AC}$
 équivaut à $3\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ d'après 1)
 équivaut à $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b. Montrons que les points A , N et K sont alignés.

On a: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AN} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\
 &= \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\
 &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AK}
 \end{aligned}$$

(d'après 1)

Donc $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AK}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et par suite, les points A , N et K sont alignés.

6 Montrons que $(AC) \parallel (BK)$:

On a: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

donc: $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

d'où: $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par conséquent, les droites (BK) et (AC) sont parallèles.

4 Milieu d'un segment

Soit A et B deux points distincts .

Soit I un point du plan.

- ▶ On dit que le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- ▶ I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$
- ▶ I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- ▶ Propriété caractéristique:

Soit $[AB]$ un segment et soit I un point du plan.

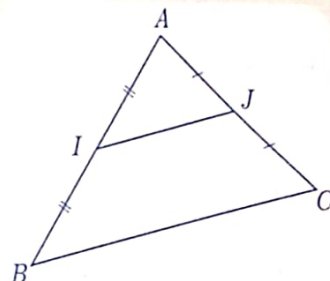
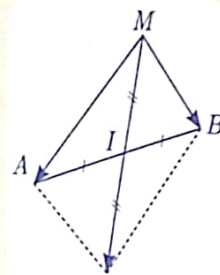
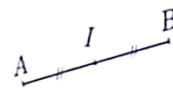
I est le milieu de $[AB]$ si et seulement pour tout point M

du plan, on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

- ▶ Propriété des milieux de deux côtés d'un triangle:

Soit ABC un triangle.

Si I est le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$, alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



Exercices

Exercice 14

Soit ABC un triangle

I le point défini par : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Montrer que I est le milieu de $[BC]$

Exercice 15

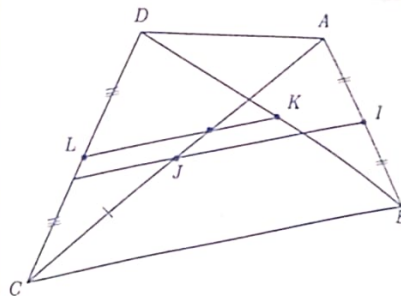
Soit A, B et C trois points et I le milieu du segment $[AB]$.

Démontrer que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$

Exercice 16

ABCD est un quadrilatère. Les points I , J , K et L sont respectivement les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$; $[DB]$ et $[DC]$.

Montrer que IJLK est un parallélogramme.



Exercice 17

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

1 Montrer que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2 En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice 18

ABC est un triangle. M, N et P sont les points définis par :

$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}, \quad 3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}$$

1 Montrer que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}$

2 En déduire que M est le milieu du segment $[NP]$

Solutions

Exercice 14

1 Montrons que I est le milieu de $[BC]$

Pour cela, il suffit de montrer que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ équivaut à } 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} \\ &\text{équivaut à } 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc le point I est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 15

2 Montrons que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$

Méthode 1:

I milieu de $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} &\text{ équivaut à } \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \\ &\text{équivaut à } 2\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \\ &\text{équivaut à } 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$$

Méthode 2:

On a : I milieu de $[AB]$, donc D'après la propriété caractéristique du milieu d'un segment, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

En particulier pour $M = C$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ d'où le résultat.

Exercice 16

Montrons que le quadrilatère IJLK est un parallélogramme

Il suffit pour cela de montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$

► Dans le triangle ABC, on a: I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$,

$$\text{Donc } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

► Dans le triangle DBC, on a: K milieu de $[DB]$ et L milieu de $[DC]$

$$\text{Donc } \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

On a : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ et $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{BC}$, donc $\vec{IJ} = \vec{KL}$ et par conséquent le quadrilatère IJLK est un parallélogramme.

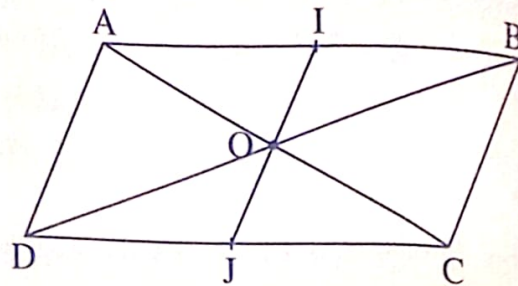
Exercice 17

1 Montrons que $\vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{CB}$

► ABCD est un parallélogramme de centre O, donc ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O.

► Dans le triangle ABC, on a : I milieu de $[AB]$ et O milieu de $[AC]$ donc

$$\vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$



2 Montrons que O est le milieu de $[IJ]$

► Dans le triangle BCD, on a : J milieu de $[DC]$ et O milieu de $[BD]$, donc $\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$.

$$\text{On a : } \vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{CB} \text{ et } \vec{OJ} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$\text{donc : } \vec{OI} = -\vec{OJ}, \text{ d'où } \vec{OI} + \vec{OJ} = \vec{0}$$

Donc : O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice 18

1 Montrons que $\vec{MN} + \vec{MP} = -2\vec{AM} + \vec{AN} + \vec{AP}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{MN} + \vec{MP} &= \vec{MA} + \vec{AN} + \vec{MA} + \vec{AP} \\ &= 2\vec{MA} + \vec{AN} + \vec{AP} \\ &= -2\vec{AM} + \vec{AN} + \vec{AP} \end{aligned}$$

2 Montrons que M est le milieu de $[NP]$

Pour cela, il suffit de montrer que $\vec{MN} + \vec{MP} = \vec{0}$.

$$\text{On a : } 3\vec{AM} - 2\vec{AB} = \vec{0} \text{ donc } \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}.$$

$$\text{On a : } 3\vec{AN} = \vec{AC} \text{ donc } \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

$$\text{On a : } 3\vec{AP} - 3\vec{AB} = -\vec{BC} \text{ donc } 3\vec{AP} = 3\vec{AB} - \vec{BA} - \vec{AC} = 4\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{or } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} \text{ (D'après 1)}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$$

Conclusion : Le point M est le milieu du segment $[NP]$.

Exercices de synthèse

Exercice 19

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O , E est le milieu de $[BC]$ et F le milieu de $[DC]$.

1 Montrer que: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

2 Montrer que: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3 Montrer que le quadrilatère $OEFD$ est un parallélogramme.

Exercice 20

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$.

Soit P et M les points définis par: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1 Faire une figure et placer les points I , J , P et M .

2 a. Montrer que: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b. En déduire la nature du quadrilatère $IBPM$.

Exercice 21

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$.

On considère les points J et K définis par: $2\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AI}$

$$\text{et } 4\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{BA}$$

- 1 Faire une figure et placer les points I , J et K .
- 2 Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- 3 En déduire que les points I , J et K sont alignés.

Exercice 22

Soit ABC un triangle. I et J deux points du plan tels que: $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

- 1 Faire une figure et placer les points I et J .
- 2 a. Montrer que: $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
 b. En déduire que: $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
- 3 Soit K le point défini par: $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 a. Montrer que: $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Placer le point K .
 b. En déduire que les points I , J et K sont alignés.

Exercice 23

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque.

Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

O et G sont les points définis par: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- 1 Faire une figure et placer les points I , J , O et G .
- 2 a. Justifier que: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.
 b. En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$.
- 3 a. Exprimer $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.
 b. En déduire que points D , G et O sont alignés.

Exercice 24

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . E est le milieu de $[AB]$ et F celui de $[CD]$. Les droites (DE) et (BF) coupent (AC) respectivement en L et M .

- 1 Faire une figure.
- 2 a. Que représente le point L pour le triangle ABD ?

b. Montrer que: $\overrightarrow{LO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LA}$; $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$
et $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

3 On admet que: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

Montrer que: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

4 En déduire que O est le milieu des segments $[BD]$, $[EF]$ et $[LM]$.

5 Quelle est la nature du quadrilatère $LEMF$? Justifier.

Exercice 25

ABC est un triangle. On considère les points I , J et K définis par:

► I est le milieu du segment $[AB]$.

► $3\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

► $3\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{CK}$

1 Faire une figure et placer les points I , J et K .

2 Montrer que les droites (AB) et (JK) sont parallèles.

3 Soit L le point défini par: $3\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

a. Montrer que: $3\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$ et $5\overrightarrow{LK} + 3\overrightarrow{LB} = \vec{0}$

b. En déduire que L est le point d'intersection des droites (IC) et (BK) .

4 a. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire le réel α tel que: $\overrightarrow{BL} = \alpha\overrightarrow{BK}$.

Exercice 26

1 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (Faire une figure).

Montrer que: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

2 On suppose maintenant que $ABCD$ est un trapèze tel que: $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AD}$ où x est un réel non nul.

K et L sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$. (Faire une figure).

a. Montrer que: $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b. Montrer que: $\vec{IJ} = \frac{x+1}{2} \vec{AD}$

c. Déterminer x pour que: $\vec{IL} = \vec{LK} = \vec{KJ}$.

Exercice 27

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CB]$.

On considère les points E et F définis par: $\vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AC}$ et

$\vec{AF} - 3\vec{FC} = \vec{0}$ 1 Faire une figure et placer tous les points donnés.

2 Montrer que le quadrilatère $EBFD$ est un parallélogramme.

3 Montrer que E est le milieu du segment $[AO]$, et F que est le milieu de $[OC]$.

4 a. En déduire que le quadrilatère $IEJF$ est un parallélogramme.

b. Montrer que O est le milieu de $[IJ]$.

5 La droite (BE) coupe (DC) en H .

Montrer que: $\vec{BE} = \frac{1}{4} \vec{BH}$.

Exercice 28

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points E et F définis par: $3\vec{AE} - \vec{AC} = \vec{0}$ et $\vec{AF} + 2\vec{CF} = \vec{0}$.

1 Faire une figure à compléter au fur et à mesure.

2 Montrer que $EBFD$ est un parallélogramme.

3 La droite (BF) coupe (CD) en I , et la droite (DE) coupe (AB) en J et (BC) en G .

a. Montrer que I et J sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AB]$.

b. Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AD) .

4 Montrer que le quadrilatère $IEJF$ est un parallélogramme.

5 Montrer que B est le milieu $[CG]$ et que J est le milieu de $[GD]$.

6 Montrer que: $\vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{DG} = \frac{2}{3} \vec{DJ}$

Soit ABC un triangle. On note O le symétrique de B par rapport à A et I le milieu de $[BC]$.

1 a. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

c. En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tels que:

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

d. Déterminer l'ensemble (F) des points M de (AC) tels que:

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

2 Soit G et K les points définis par: $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} = \vec{0}$

$$\text{et } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

a. Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MK}$

$$\text{et } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

b. En déduire l'ensemble (Γ) des points M tels que:

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$$

3 Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solutions

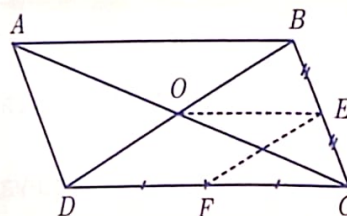
Exercice 19

1 Montrons que: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= -\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= 2\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

(Car: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ parallélogramme)

$$\text{Donc: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$$



2 Montrons que: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} \\ &= 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} && \left(\begin{array}{l} \text{Car } E \text{ milieu de } [BC] \text{ et } F \\ \text{milieu de } [DC] \end{array} \right) \\ &= 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3 Montrons que $OEFD$ est un parallélogramme:

Dans le triangle BCD , on a: E milieu de $[BC]$ et O milieu de $[BD]$

(Car O est le centre du parallélogramme $ABCD$).

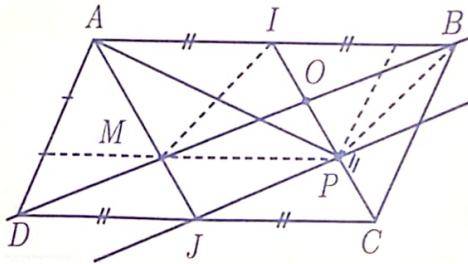
donc: $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

or F est le milieu de $[DC]$, donc: $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF}$

D'où: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DF}$ et par conséquent, le quadrilatère $OEFD$ est un parallélogramme.

Exercice 20

1 Figure:



$$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ équivaut à } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{AP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

2 a. Montrons que: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On a: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
 &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DJ} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \\
 &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \quad (\text{Car: } \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}) \\
 &= \frac{3}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (\text{Car: } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB})
 \end{aligned}$$

b. Nature quadrilatère IBPM

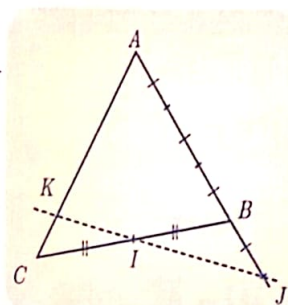
On a: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}$ (Car: I milieu de $[AB]$)

Donc: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{IB}$, d'où IBPM est un parallélogramme.

Exercice 21

1 Figure:

$$\begin{aligned}
 \triangleright 2\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{BJ} &= 3\overrightarrow{AJ} \text{ équivaut à } -\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AJ} = \vec{0} \\
 &\text{équivaut à } 2\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB} \\
 &\text{équivaut à } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \triangleright 4\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KC} &= 4\overrightarrow{BA} \text{ équivaut à } 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BA} \\
 &\text{équivaut à } 4\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AC} \\
 &\text{équivaut à } \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

2 Exprimons $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
 \triangleright \text{On a: } \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\
 &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad (\text{Car } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}) \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}, \text{ car } I \text{ milieu de } [BC]) \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
 \triangleright \text{On a: } \overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} \\
 &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad (\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \text{ d'après 1})
 \end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{JK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

3 Montrons que les points I , J et K sont alignés:

$$\text{On a: } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \overrightarrow{JK} &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{JK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires, et par conséquent les points I , J et K sont alignés.

Exercice 22

1 Figure:

$$3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{BC}$$

2 a. Montrons que: $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

On a:

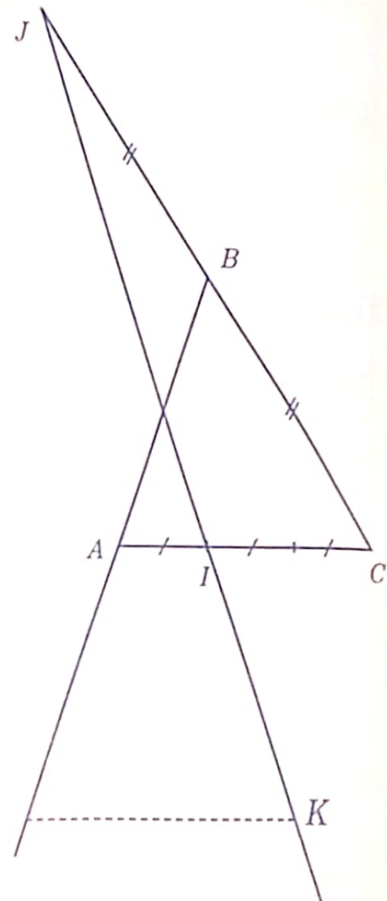
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BJ} &= -\overrightarrow{BC} \text{ équivaut } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} \\ &\text{équivaut } \overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} \\ &\text{équivaut } \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

b. Montrons que: $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$



a. Montrons que: $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad (\text{car } \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b. Montrons que les points I, J et K sont alignés.

On a: $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}&= -2\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -2\overrightarrow{IK}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IK}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, et par conséquent, les points I, J et K sont alignés.

Exercice 23

1 Figure:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

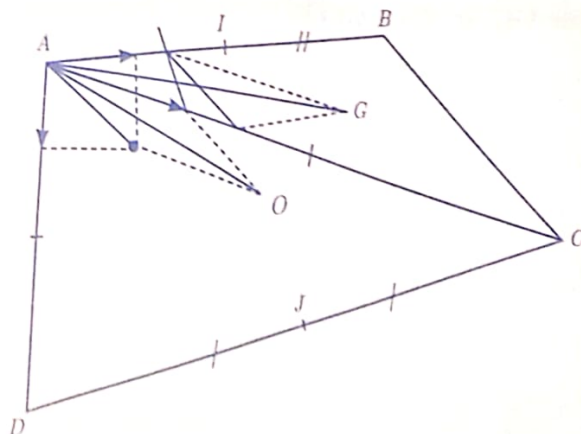
$$\text{équivaut à } 4\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{équivaut à } 3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$



2 a. Justifier que: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Méthode 1:

On a: I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[CD]$.

donc, d'après la propriété caractéristique du milieu d'un segment: pour tout point M du plan, on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$.

en particulier, pour $M = O$:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$ d'où le résultat.

Méthode 2:

$$\begin{aligned} \triangleright \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{OI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} \\ &= 2\overrightarrow{OI} \quad (I \text{ milieu de } [AB], \text{ donc } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\overrightarrow{OJ} + \underbrace{\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}}_{\vec{0}} \\ &= 2\overrightarrow{OJ} \quad (J \text{ milieu de } [CD], \text{ donc } \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}) \end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.

b. Dédution:

On a: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.

donc: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

or, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

D'où: $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$ et par conséquent, O est le milieu de $[IJ]$.

3 a. Exprimons $\overrightarrow{OD}$ en fonction $\overrightarrow{OG}$.

On a: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

donc: $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

d'où: $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

or: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, donc: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO}$

d'où: $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$

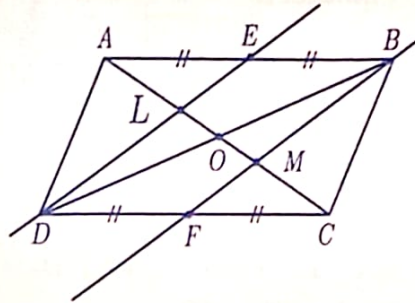
Donc: $\overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{OG}$

b. Montrons que les points D , $(L9RAY)$ sont alignés.

On a: $\overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{OG}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires, donc les points D , G et O sont alignés.

Exercice 24

1 Figure :



2 a. Dans le triangle ABD , on a: E milieu de $[AB]$ et O celui de $[BD]$

(car O est le centre du parallélogramme $ABCD$ est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$).

Donc: (DE) et (AO) sont des médianes du triangle ABD , leur point d'intersection L donc le centre de gravité de ce triangle.

Conclusion: Le point L est le centre de gravité du triangle ABD .

b. Montrons que $\overrightarrow{LO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LA}$:

Les triangles ALE et DLC , forment une configuration de Thalès:

Les droites (AC) et (DE) se coupent en L .

Les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

donc, d'après, le théorème de Thalès, $\frac{LA}{LC} = \frac{LE}{LD} = \frac{AE}{CD}$

or, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

d'où: $\frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}$; donc: $LA = \frac{1}{2}LC$, or les vecteurs $\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{LC}$ sont de sens opposés, donc: $\overrightarrow{LA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$.

$$\overrightarrow{LA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LC} \text{ équivaut à } -2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{équivaut à } -2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{AO}$$

$$\text{équivaut à } -2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LO}$$

$$\text{équivaut à } -\overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LO}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{LO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LA}, \text{ donc: } \overrightarrow{LO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LA}$$

► Montrons que: $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AO}$

On a: $\vec{LO} = -\frac{1}{2}\vec{LA}$ équivaut à $\vec{LA} + \vec{AO} = -\frac{1}{2}\vec{LA}$

équivaut à $\frac{3}{2}\vec{LA} = -\vec{AO}$

équivaut à $\vec{LA} = -\frac{2}{3}\vec{AO}$

équivaut à $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AO}$

► Montrons que $\vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LD} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} \text{On a: } \vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LD} &= \vec{LA} + \vec{LA} + \vec{AB} + \vec{LA} + \vec{AD} \\ &= 3\vec{LA} + \vec{AB} + \vec{AD} \\ &= 3\left(-\frac{2}{3}\vec{AO}\right) + \vec{AC} \quad (\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ car } ABCD \\ &= -2\vec{AO} + \vec{AC} \quad \text{est un parallélogramme}) \\ &= -\vec{AC} + \vec{AC} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc: $\vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LD} = \vec{0}$

► Montrons que $\vec{OL} = \frac{1}{3}\vec{OA}$:

On a: $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AO}$, donc: $\vec{AO} + \vec{OL} = \frac{2}{3}\vec{AO}$

d'où: $\vec{OL} = \frac{2}{3}\vec{AO} - \vec{AO} = -\frac{1}{3}\vec{AO}$

Donc: $\vec{OL} = \frac{1}{3}\vec{OA}$

3 Montrons que $\vec{MO} = \frac{1}{2}\vec{MC}$:

On a: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OC}$ (C'est une donnée de l'exercice)

donc: $3\vec{OM} = \vec{OM} + \vec{MC}$

d'où: $2\vec{OM} = \vec{MC}$

Donc: $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{MC}$

4 Montrons que O est le milieu $[BD]$, $[EF]$ et $[LM]$:

► O est le centre du parallélogramme $ABCD$, donc O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, d'où O est le milieu de $[BD]$.

On a: $\vec{OL} = \frac{1}{3}\vec{OA}$ et $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OC}$

or: $\vec{OA} = -\vec{OC}$

donc: $\vec{OL} = -\vec{OM}$

d'où: $\vec{OL} + \vec{OM} = \vec{0}$

Donc: O est le milieu du segment $[LM]$.

Dans le triangle ABD , on a: E milieu de $[AB]$ et O milieu de $[BD]$, donc:

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{DA}.$$

Dans le triangle ACD , on a: F milieu de $[DC]$ et O milieu de $[AC]$, donc:

$$\vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

d'où: $\vec{OE} = -\vec{OF}$

Donc: $\vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$, le point O est donc le milieu de $[EF]$.

5 Nature du quadrilatère $LEMF$:

Les diagonales $[LM]$ et $[EF]$ du quadrilatère $LEMF$ ont le même milieu O , donc $LEMF$ est un parallélogramme.

Exercice 25

1 Figure:

$$3\vec{JB} + 2\vec{JC} = \vec{0} \text{ équivaut à } 3\vec{JB} + 2\vec{JB} + 2\vec{BC} = \vec{0}$$

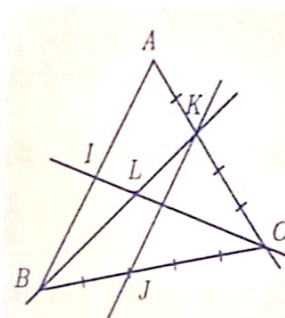
$$\text{équivaut à } 5\vec{JB} = -2\vec{BC}$$

$$\text{équivaut à } \vec{BJ} = \frac{2}{5}\vec{BC}$$

$$3\vec{KA} = 2\vec{CK} \text{ équivaut à } 3\vec{KA} - 2\vec{CA} - 2\vec{AK} = \vec{0}$$

$$\text{équivaut à } 5\vec{KA} = 2\vec{CA}$$

$$\text{équivaut à } \vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AC}$$



2 Montrons que $(AB) \parallel (JK)$:

Pour cela, il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{JK}$ sont colinéaires.

Méthode 1:

$$\text{On a: } \vec{BJ} = \frac{2}{5}\vec{BC} \text{ et } \vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AC}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } \overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\
 &= -\frac{2}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\
 &= -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (JK) et (AB) sont parallèles.

Méthode 2:

Dans le triangle ABC , on a: $K \in (AC)$ et $J \in (BC)$.

Les points: C , K et A sont alignés dans le même ordre que les points C , J et B .

Comparons les rapports: $\frac{CK}{CA} = \frac{CJ}{CB}$

$$\triangleright \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \text{ équivaut à } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{CJ} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{Donc: } CJ = \frac{3}{5}BC, \text{ d'où: } \frac{CJ}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\triangleright \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{CK} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{donc: } CK = \frac{3}{5}AC, \text{ d'où: } \frac{CK}{CA} = \frac{3}{5}$$

$$\text{D'où: } \frac{CK}{CA} = \frac{CJ}{CB} = \frac{3}{5}$$

donc, d'après le réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (JK) sont parallèles.

3 a. ▶ Montrons que: $3\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$

$$\text{On a: } 3\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}, \text{ donc: } 3(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB}) + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

or, I est le milieu de $[AB]$, donc: $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = 2\overrightarrow{LI}$ (d'après la propriété caractéristique du milieu).

$$\text{donc: } 3(2\overrightarrow{LI}) + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

$$\text{D'où: } 3\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

► Montrons que: $5\overrightarrow{LK} + 3\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$

On a: $3\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$

donc: $3\overrightarrow{LK} + 3\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LK} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

or, $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

Donc: $5\overrightarrow{LK} + 3\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$

b.► Montrons que L est le point d'intersection des droites (IC) et (BK) .

► On a: $3\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$ donc: $\overrightarrow{LC} = 3\overrightarrow{LI}$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{LI}$ sont colinéaires, et par conséquent, les points L , C et I sont alignés.

Donc: $L \in (IC)$

► On a: $5\overrightarrow{LK} + 3\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$, donc: $\overrightarrow{LK} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{LB}$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont colinéaires, et par conséquent, les points L , K et B sont alignés.

donc: $L \in (BK)$, or $(IC) \neq (BK)$ car $B \in (BK)$ et $B \notin (CI)$.

Donc les droites (IC) et (BK) sont sécantes en L .

4 a. Exprimons $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

► $3\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{CK}$ équivaut à $3\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{0}$

équivaut à $5\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

équivaut à $5\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

équivaut à $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

► $3\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$

équivaut à $8\overrightarrow{LB} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

équivaut à $8\overrightarrow{LB} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC}$

équivaut à $\overrightarrow{BL} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{BL} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b. Déterminons le réel α tel que: $\overrightarrow{BL} = \alpha\overrightarrow{BK}$

On a: $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BL} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\text{donc: } \overrightarrow{BL} &= \frac{5}{8} \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{5}{8} \overrightarrow{BK}\end{aligned}$$

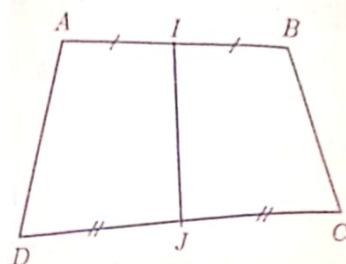
$$\text{D'où: } \overrightarrow{BL} = \frac{5}{8} \overrightarrow{BK}, \text{ donc: } \alpha = \frac{5}{8}$$

Exercice 26

1 Montrons que: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

Figure 1



$$\text{Donc: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

2 a. Montrons que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$:

► Dans le triangle ABD, on a: I milieu de [AB] et L milieu de [BD], donc: $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

► Dans le triangle ACD, on a: K milieu de [AC] et J milieu de [DC], donc: $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

$$\text{D'où: } \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

b. Montrons que: $\overrightarrow{IJ} = \frac{x+1}{2} \overrightarrow{AD}$

On a d'après la question 1): $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

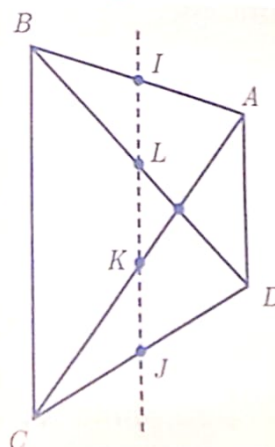
or: $\overrightarrow{BC} = x \overrightarrow{AD}$, donc: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + x \overrightarrow{AD})$

$$\text{D'où: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1+x}{2} \overrightarrow{AD}$$

c. Déterminons x pour que: $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KJ}$.

On a: $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ (d'après 2)a))

Figure 2



déterminons x pour que: $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{x+1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{x-1}{2} \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \text{ équivaut à } \frac{x-1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

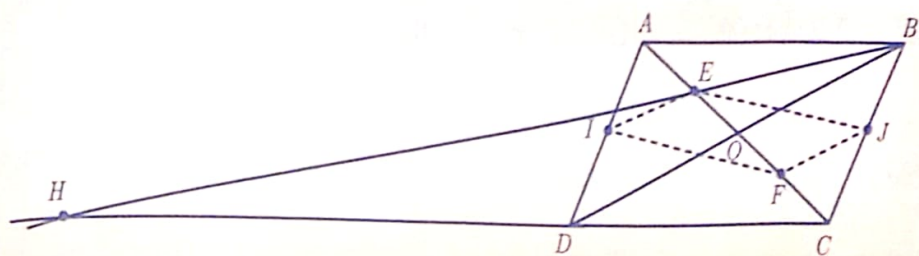
$$\text{équivaut à } x-1=1$$

$$\text{équivaut à } x=2$$

Donc: $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KJ}$ si et seulement si $x=2$.

Exercice 27

1 Figure:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{FC} &= \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{FA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\text{équivaut à } 4\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} \\ &\text{équivaut à } \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2 Montrons que $EBFD$ est un parallélogramme

$$\begin{aligned}\text{On a : } \overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{CB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$, d'où: $EBFD$ est un parallélogramme.

3 ▶ Montrons que E est le milieu de $[AO]$:

▶ On a: O milieu de $[AC]$ car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux:

Donc: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$

▶ On a: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Donc: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AO}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

D'où: E est le milieu du segment $[AO]$.

▶ Montrons que F est le milieu de $[OC]$:

$$\overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{FC} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} - 3\overrightarrow{FC} = \vec{0}$$

$$\text{équivaut à } 4\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{FC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

or, O est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$

D'où: $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Donc: F est le milieu de $[OC]$.

4 a. Montrons que $IEJF$ est un parallélogramme.

▶ Dans le triangle AOD , I milieu de $[AD]$ et E milieu de $[AO]$. Donc: $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DO}$

▶ Dans le triangle BCO , J milieu de $[BC]$ et F milieu de $[CO]$. Donc: $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

or, $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ car O est le milieu de $[DB]$. Donc: $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{FJ}$

D'où: $IEJF$ est un parallélogramme.

b. Montrons que O est le milieu de $[IJ]$:

On a: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

donc: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

d'où: $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CO}$

pr, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ car O est le milieu de la diagonale $[AC]$.

donc: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO}$ d'où O est le milieu de $[EF]$.

Le quadrilatère $IEJF$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[EF]$ et $[IJ]$ ont le même milieu.

Or O est le milieu de $[EF]$, donc O est aussi le milieu de $[IJ]$.

5 Montrons que: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$



On a: $E \in (AC)$ et $E \in (BH)$, de plus $(AB) \parallel (HC)$ (car $H \in (DC)$ et $(DC) \parallel (AB)$)

donc les triangles AEB et HEC forment une configuration de Thalès.

d'après le théorème de Thalès, on a: $\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{EH} = \frac{AB}{HC}$

$$\text{or, } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ donc: } \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EC} \left(\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ équivaut à } 4\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} \\ \text{équivaut à } 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} \\ \text{équivaut à } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} \end{array} \right)$$

$$\text{d'où: } \frac{EA}{EC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc: } \frac{EB}{EH} = \frac{1}{3} \text{ d'où: } EB = \frac{1}{3}EH$$

or les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont de sens contraire, donc: $\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

$$\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ équivaut à } 3\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{BH}$$

$$\text{équivaut à } 4\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BH}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$$

Exercice 28

1 Figure:

$$3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

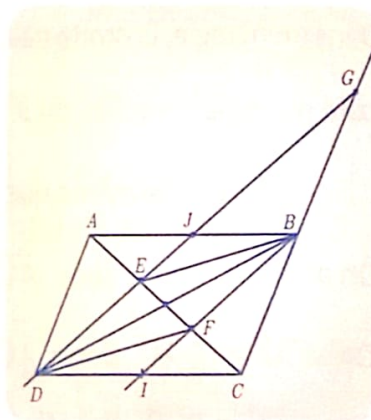
$$\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CF} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{0}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

2 Montrons que $EBFD$ est un parallélogramme:

$$\begin{aligned} \text{On a: } \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{ED}$, d'où: $EBFD$ est un parallélogramme.

3 a. ▶ Montrons que J est le milieu de $[AB]$:

On a: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, donc: $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE}$

d'où: E est le milieu de $[AF]$.

Dans le triangle ABF , on a: $J \in (AB)$, $E \in (AF)$ et $(EJ) \parallel (BF)$

(($EJ \parallel BF$), car $(EJ) = (DE)$ et $(DE) \parallel (BF)$ car $EBFD$ est un parallélogramme).

donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AE}{AF} = \frac{AJ}{AB} = \frac{1}{2}$

(car: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ donc: $AE = \frac{1}{2}AF$)

donc: $AJ = \frac{1}{2}AB$ d'où: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (voir la figure pour le sens des vecteurs).

($\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens)

Donc: J est le milieu de $[AB]$.

Remarque: On peut aussi utiliser la propriété suivante:

Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté passe par le milieu du 3^{ème} côté.

▶ Montrons de même que I est le milieu de $[DC]$:

On a: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, donc: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, d'où: $\overrightarrow{CE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

On a: $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, donc: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, d'où: $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc: $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CF}$, d'où F est le milieu de $[CE]$.

On considère le triangle CED , F milieu de $[EC]$ et $(FI) \parallel (DE)$.

$I \in [DC]$, donc I est le milieu de $[DC]$ (en procédant de la même façon que pour montrer que J est le milieu de $[AB]$).

b. Montrons que $(IJ) \parallel (AD)$:

Méthode 1: $\vec{IJ} = \vec{ID} + \vec{DA} + \vec{AJ}$

$$= \frac{1}{2}\vec{CD} + \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= \vec{DA}$$

$\vec{IJ} = \vec{DA}$, donc les droites (IJ) et (DA) sont parallèles (on peut même dire que le quadrilatère $AJID$ est un parallélogramme).

Méthode 2:

On a: I est le milieu de $[DC]$, donc: $\vec{DI} = \frac{1}{2}\vec{DC}$.

On a: J est le milieu de $[AB]$, d'où: $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

or, $\vec{DC} = \vec{AB}$, donc: $\vec{DI} = \vec{AJ}$, d'où: $AJID$ est un parallélogramme,
D'où $(IJ) \parallel (AD)$.

4 Montrons que $IEJF$ est un parallélogramme:

► On a: J est le milieu de $[AB]$, donc d'après la propriété caractéristique $\vec{DA} + \vec{DB} = 2\vec{DJ}$ (en remplaçant M par D).

► De même, I est le milieu de $[DC]$, donc: $\vec{BD} + \vec{BC} = 2\vec{BI}$

or, $\vec{DA} = -\vec{BC}$, donc l'égalité $\vec{DA} + \vec{DB} = 2\vec{DJ}$ devient: $-\vec{BC} - \vec{BD} = 2\vec{DJ}$
soit $\vec{BD} + \vec{BC} = -2\vec{DJ}$.

Donc: $-2\vec{DJ} = 2\vec{BI}$, d'où: $\vec{JD} = \vec{BI}$

$\vec{JD} = \vec{BI}$ équivaut à $\vec{JE} + \vec{ED} = \vec{BF} + \vec{FI}$
équivaut à $\vec{JE} = \vec{FI}$ (car: $\vec{ED} = \vec{BF}$ d'après 2).

Donc $IEJF$ est un parallélogramme.

5 Montrons que B est le milieu de $[CG]$ et J milieu de $[GD]$:

Dans le triangle GDC , on a: $B \in [CG]$; $J \in [DG]$ et $(JB) \parallel (DC)$.

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{GB}{GC} = \frac{GJ}{GD} = \frac{JB}{DC}$

or, J est le milieu de $[AB]$, donc: $\vec{JB} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC}$.

D'où: $JB = \frac{1}{2}DC$ donc: $\frac{JB}{DC} = \frac{1}{2}$, d'où: $\frac{GB}{GC} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{GB}{GC} = \frac{1}{2} \quad \text{équivalent à:} \quad GB = \frac{1}{2} GC$$

En tenant compte des sens des vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ (voir figure : même sens).

On obtient: $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GC}$ ce qui prouve que B est le milieu de $[GC]$.

On a: $\frac{GI}{GD} = \frac{1}{2}$ donc: $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GD}$ (pour le sens de vecteurs, voir figure).
($\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont de même sens)

D'où: I est le milieu de $[GD]$.

6 Montrons que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DJ}$:

On a: $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GD}$ donc: $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GD}$, d'où: $\overrightarrow{DI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{DI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GD}$ équivaut à $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DI}$

équivalent à $\frac{1}{3} \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$

Donc: $\frac{1}{3} \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$, il suffit alors de montrer que: $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$.

Montrons que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$:

On considère les triangles AEJ et DEC :

On a les droites (AC) et (DJ) se coupent en E et les droites (AJ) et (DC) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{EJ}{ED} = \frac{EA}{EC} = \frac{AJ}{CD}$

or, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ car J est le milieu de $[AB]$

et, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; Donc, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$, d'où: $\frac{AJ}{CD} = \frac{1}{2}$

d'où: $\frac{EJ}{ED} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire: $EJ = \frac{1}{2} ED$.

Compte tenu des sens des vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{ED}$ (voir figure: ils sont de sens contraire).

On a: $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DE}$ équivaut à $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DE}$

équivalent à $-\frac{3}{2} \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{DJ}$

équivalent à $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DJ}$

Conclusion: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DJ}$

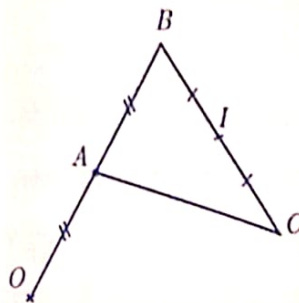
1 a. Montrons que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OM} \quad (\text{car } \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Donc, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$$

b. Exprimons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$:



Méthode 1:

On a, I milieu de $[BC]$, donc, d'après la propriété caractéristique, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$, en particulier, pour $M = A$ et on obtient:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}.$$

Méthode 2:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} \\ &= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \\ &= 2\overrightarrow{AI} \quad (\text{Car: } I \text{ milieu de } [BC], \text{ donc: } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0})\end{aligned}$$

c. Déterminons l'ensemble (E) où $(E) = \{M \in \mathcal{J} \mid \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|\}$

Soit M un point du plan,

On a: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

$M \in (E)$ équivaut à $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$

équivaut à $\|\overrightarrow{OM}\| = \|2\overrightarrow{AI}\|$

équivaut à $OM = 2AI$

équivaut à $M \in \mathcal{C}(O; 2AI)$

Donc, (E) est le cercle de centre O et de rayon $2AI$.

d. Déterminons l'ensemble (F) des points M de (AC) tels que:

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

$$\text{et } \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

$M \in (F)$ équivaut à $M \in (AC)$

équivaut à $M \in (AC)$ et $M \in (E)$

équivaut à $M \in (AC)$ et $M \in \mathcal{C}(O; 2AI)$

Donc l'ensemble (F) est l'intersection de la droite (AC) avec le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $2AI$.

La droite (AC) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points car le segment $[AC]$ est intérieur au cercle $\mathcal{C}$.

Donc l'ensemble (F) est réduit à ces deux points.

2 a. Montrons que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$:

$$\begin{aligned}\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{MG} + \vec{GC} \\ &= 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} \quad (\text{car: } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}) \\ &= 3\vec{MG}\end{aligned}$$

Montrons que $\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MK}$:

$$\begin{aligned}\vec{MA} + 2\vec{MB} &= \vec{MK} + \vec{KA} + 2\vec{MK} + 2\vec{KB} \\ &= 3\vec{MK} + \vec{KA} + 2\vec{KB} \quad (\text{car: } \vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}) \\ &= 3\vec{MK}\end{aligned}$$

b. Déterminons l'ensemble

$$(\Gamma) = \{M \in \mathcal{A} \mid \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{MB}\} :$$

Soit M un point du plan, on a: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ et $\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MK}$

$$M \in (\Gamma) \text{ équivaut à } \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$$

$$\text{équivaut à } \|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MK}\|$$

$$\text{équivaut à } 3MG = 3MK$$

$$\text{équivaut à } MG = MK$$

Donc, (Γ) est la médiatrice du segment $[KG]$.

3 Déterminons l'ensemble $(D) = \{M \in \mathcal{A} \mid \vec{MB} + \vec{MC} \text{ est colinéaire à } \vec{AB}\}$.

Soit M un point du plan, on a: $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MI}$ (car I milieu de $[BC]$).

$$M \in (D) \text{ équivaut à } \vec{MB} + \vec{MC} \text{ est colinéaire à } \vec{AB}.$$

$$\text{équivaut à (Il existe un réel } \alpha \text{ tel que, } \vec{MB} + \vec{MC} = \alpha \vec{AB})$$

$$\text{équivaut à (Il existe un réel } \beta \text{ tel que, } \vec{MI} = \beta \vec{AB}; (\beta = -\frac{\alpha}{2})$$

$$\text{équivaut à } (IM) \parallel (AB)$$

Donc l'ensemble (D) est la droite passant par I et parallèle à la droite (AB) .

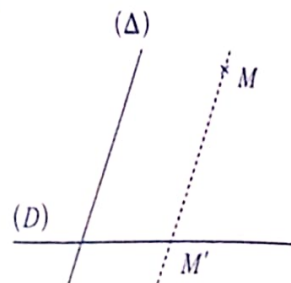
1 Droite parallèlement à une autre droite

1. Définition et vocabulaires

Définitions:

► Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes et M un point du plan.

Le projeté du point M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) est le point M' intersection de la droite (D) avec la droite parallèle à (Δ) passant par M .



► La relation, qui à chaque point M du plan, lui associe son projeté M' sur (D) parallèlement à (Δ) est appelée la **projection sur (D) parallèlement à (Δ)** .

Remarque :

On considère la projection sur (D) parallèlement à (Δ) .

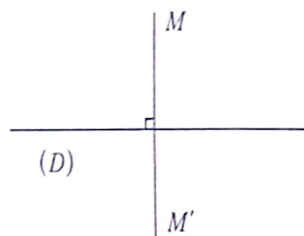
- M' est le projeté de M sur (D) signifie que : $M' \in (D)$ et $(MM') \parallel (\Delta)$
- Le projeté M' de M ne change pas si l'on remplace la droite (Δ) par n'importe quelle droite qui lui est parallèle.
- Le projeté de tout M de (D) parallèlement à (Δ) est lui-même (on dit que M est un point invariant).

2. Projection orthogonale

Définitions:

Soit (D) une droite et M un point du plan

► Le projeté orthogonal du point M sur (D) est le point M' intersection de (D) avec la droite passant par M et perpendiculaire à (D) .



► La relation qui, à chaque point M du plan, lui associe son projeté orthogonal sur (D) est appelée la **projection orthogonale sur (D)** .

Remarque :

La projection orthogonale sur (D) est un cas particulier de la projection sur (D) parallèlement à la droite (Δ) perpendiculaire à (D) .

3. Projection sur un axe

Définitions:

On considère deux droites (D) et (Δ) rapportées respectivement aux repères $(A;B)$ et $(A;C)$

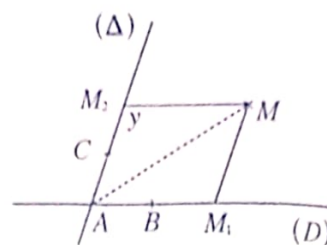
Soit M un point du plan

Si M_1 est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) et M_2 est le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (D) alors :

$\overrightarrow{AM_1} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2} = y\overrightarrow{AC}$ où x est l'abscisse

de M_1 dans le repère $(A;B)$ et y est l'abscisse de M_2 dans le repère $(A;C)$

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$ d'où : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$



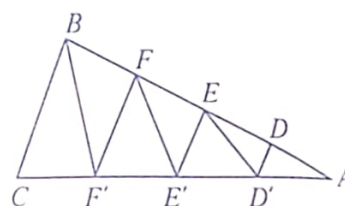
Exercices

Exercice 1 Projection sur une droite parallèlement à une droite

Dans la figure ci-contre, on a : D' , E' et F' sont respectivement les projetés des points D , E et F sur (AC) parallèlement à (BC)

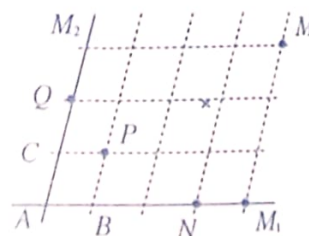
1 Montrer que $(FF') \parallel (EE')$

2 Montrer que $FDD'F'$ est un trapèze.



Exercice 2 Projection sur un axe

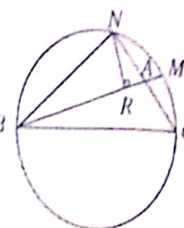
A partir de la figure ci-contre, écrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$



Exercice 3 Projection orthogonale.

Dans la figure ci-contre, on a $(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[BC]$

M et N sont deux points de $(\mathcal{C})$ (sur le même demi-cercle défini par le diamètre $[BC]$) et A le point d'intersection de (BM) et (NC) et R est le projeté orthogonal de N sur $[BM]$



- 1 Montrer que N est le projeté orthogonal de B sur (AC)
- 2 Déterminer les projetés orthogonaux des points B , R et C sur (AB)

Solutions

Exercice 1

1 Puisque E' est le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC) alors $(EE') \parallel (BC)$ (1)

Puisque F' est le projeté de F sur (AC) parallèlement à (BC) alors $(FF') \parallel (BC)$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $(EE') \parallel (FF')$

2 Puisque D' est le projeté de D sur (AC) parallèlement à (BC) alors $(DD') \parallel (BC)$ (3)

De (2) et (3) on déduit que : $(FF') \parallel (DD')$ et par conséquent le quadrilatère $FDD'F'$ est un trapèze

Exercice 2

on a : $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AQ} = 0\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \text{ car } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} \text{ et } \overrightarrow{AM_1} = 4\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM_2} = 3\overrightarrow{AC}$$

Exercice 3

1 Puisque le triangle BNC est circonscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[BC]$ alors BNC est un triangle rectangle en N d'où N est le projeté orthogonal de B sur (AC)

2 On a : $B \in (AB)$ et $R \in (AB)$ donc les projetés orthogonaux de B et R sur (AB) sont respectivement B et R . (des points invariants)

Puisque BMC est un triangle rectangle en M alors M est le projeté orthogonal de C sur (AB)

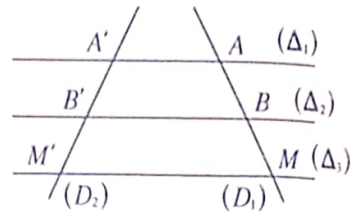
2 Théorème de Thalès et sa réciproque

1. Théorème de Thalès

Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites parallèles et non confondues et (D_1) et (D_2) deux droites telles que:

(Δ_1) coupe respectivement (D_1) et (D_2) en A et A'

(Δ_2) coupe respectivement (D_1) et (D_2) en B et B'



Si une droite (Δ_3) parallèle à (Δ_1) et à (Δ_2) et coupe respectivement

(D_1) et (D_2) en M et M' alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'}$

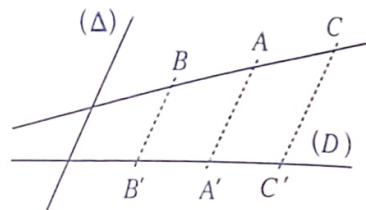
D'une autre façon : Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes.

A, B et C trois points alignés tels que (AB) n'est pas parallèle à (Δ)

Si A', B' et C' sont respectivement les projetés des points A, B et C sur (D)

parallèlement à (Δ) alors on a :

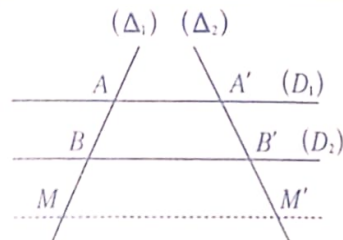
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



2. Réciproque du théorème de Thalès

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles non confondues.

(Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites telles que (Δ_1) coupe respectivement (D_1) et (D_2) en A



et B et (Δ_2) coupe respectivement (D_1) et (D_2) en A' et B'

Si $M \in (\Delta_1)$ et $M' \in (\Delta_2)$ tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'}$

et A, M et B sont ordonnés sur (Δ_1) de la même façon que les points A', M' et B' sur (Δ_2)

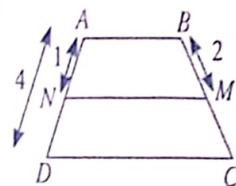
alors : $(MM') \parallel (D_1)$ et $(MM') \parallel (D_2)$

Exercices

Exercice 4

$ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$

Calculons BC sachant que : $(AB) \parallel (MN)$



Exercice 5 Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque

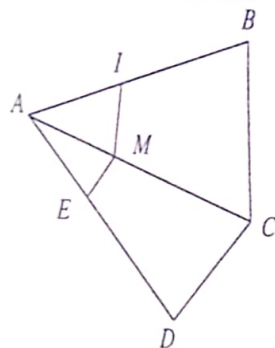
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et M un point de $[AC]$

($M \neq A$ et $M \neq C$)

La droite passant par M et parallèle à (CD) coupe (AD) en E

La droite passant par M et parallèle à (BC) coupe (AB) en I Montrer que : $\frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AD}$

et déduire que : $(EI) \parallel (BD)$



Exercice 6 Construction d'un segment de longueur $\frac{1}{x}$; $x > 0$

Soit (Δ) une droite graduée rapportée au repère $(O; I)$ et M un point de (Δ) d'abscisse x ($x > 0$)

Construire le point M' d'abscisse $\frac{1}{x}$



Exercice 7



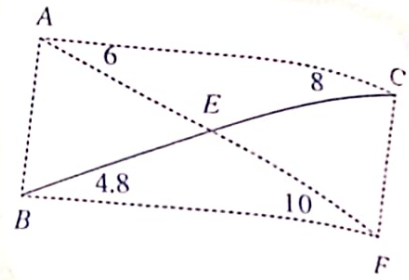
Dans la figure ci-contre on a: les segments

$[AF]$ et $[BC]$ se coupent en E tels que:

$AE = 6; EC = 8; EF = 10$ et $EB = 4,8$

1 Les droites (AB) et (FC) sont-elles parallèles ?

2 Les droites (AC) et (BF) sont-elles parallèles ?



Exercice 8

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$

soit M un point de (AA') tels que $M \neq A$ et $M \neq A'$

La droite passant par M et parallèle à la droite (AB) coupe (BC) en N

La droite passant par M et parallèle à la droite (AC) coupe (BC) en P

1 faire une figure

2 Comparer $\frac{A'N}{A'B}$ et $\frac{A'M}{A'A}$

3 Comparer $\frac{A'P}{A'C}$ et $\frac{A'M}{A'A}$

4 Dédurre que A' est le milieu de $[NP]$

Exercice 9

Sur la figure ci-contre, on a:

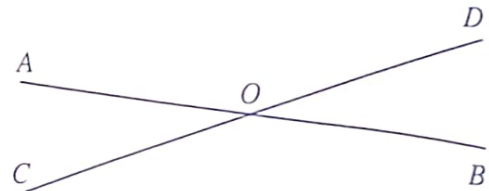
Les deux segments $[AB]$ et $[CD]$ sont sécants en O

tels que $OA = 8$; $OB = 12$

$OD = 15$ et $OC = 10$

1 Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

2 Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?

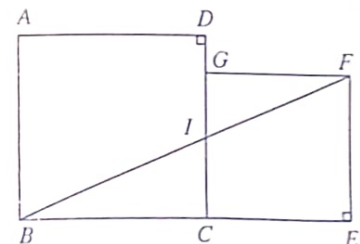


Exercice 10

$ABCD$ et $CEFG$ sont des carrés, tels

que $AB = 5$ et $CE = 4$

Calculer CI



On considère les points $A, B, C, D, L9RAY$ et O tels que les droites $(EC) \parallel (FD)$ et $(AC) \parallel (BD)$ et les droites $(EF); (CD); (AB)$ se coupent en O

1 faire une figure

2 Montrer que les droites (BF) et (AE) sont parallèles

Solutions

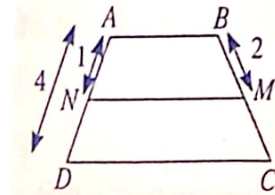
Exercice 4

Puisque : $(AB) \parallel (CD)$ et $(AB) \parallel (MN)$

alors : $\frac{BC}{BM} = \frac{AD}{AN}$ (Théorème de Thalès)

d'où : $\frac{BC}{2} = \frac{4}{1}$

d'où : $BC = 8$



Exercice 5

Dans le triangle ABC on a : $I \in [AB]$; $M \in [AC]$ et $(IM) \parallel (BC)$ et d'après le théorème de Thalès.

On a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AI}{AB}$ (1);

Dans le triangle ACD on a : $E \in [AD]$ et $M \in [AC]$ et $(EM) \parallel (CD)$ $(EM) \parallel (CD)$ et d'après le théorème de Thalès.

On a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AD}$ (2);

De (1) et (2) on en déduit : $\frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AD}$,

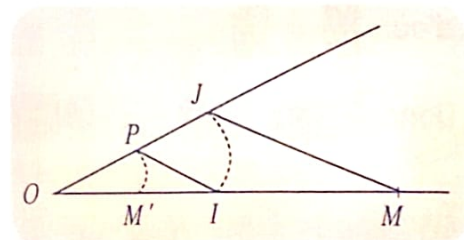
Conclusion : Puisque l'ordre des points A, E et D sur (AD) est le même que celui de A, I et B sur (AB) ; et puisque $\frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AD}$ alors d'après la réciproque du théorème de Thalès on a : $(EI) \parallel (BD)$

Exercice 6

Construction le point M' d'abscisse $\frac{1}{x}$,

On a : $\frac{OI}{OM} = \frac{1}{x}$,

On suppose que : $x \geq 1$ donc $I \in [OM]$,



Soit (Δ') une droite rapportée au repère $(O;J)$ telle que $OI = OJ$ et P le point d'intersection de la droite passant par I et parallèle à (MJ) ,

puisque $(MJ) \parallel (IP)$

alors : $\frac{OI}{OM} = \frac{OP}{OJ}$ donc : $OP = \frac{1}{x}$ car : $(OI = 1 ; OM = x ; OJ = 1)$

d'où $\frac{1}{x}$ est l'abscisse du point P dans le repère $(O;J)$

en utilisant le compas, on construit le point M' sur la droite (OI) tel que :

$OM' = OP$ (l'abscisse de M' est $\frac{1}{x}$)

On suit les mêmes étapes si $0 < x < 1$ (on a : $M \in [OI]$)

Exercice 7

1 Les droites (AB) et (FC) sont-elles parallèles ?

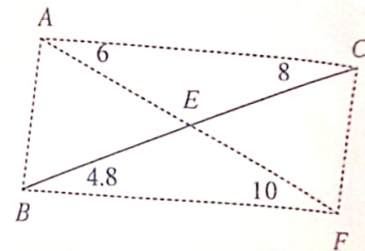
Les points $A;E;F$ et $B;E;C$ sont alignés dans le même ordre sur les droites (AF) et (BC) .

$$\text{de plus } \frac{EA}{EF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{et } \frac{EB}{EC} = \frac{4,8}{8} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

Les deux rapports sont égaux :

$\frac{EA}{EF} = \frac{EB}{EC}$; d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AB) et (CF) sont parallèles



2 Les droites (AC) et (BF) sont-elles parallèles ?

Les points $A;E$ et F sont alignés dans le même ordre que les points $B;E$ et C

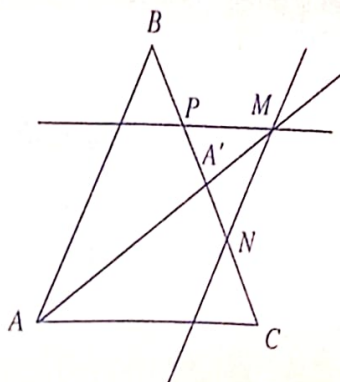
$$\text{et on a : } \frac{EA}{EF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{de plus : } \frac{EC}{EB} = \frac{8}{4,8} = \frac{5}{3}$$

$$\text{d'où : } \frac{EA}{EF} \neq \frac{EC}{EB}$$

Donc, les droites (AC) et (BF) ne sont pas parallèles.

1 La figure:

2 Comparons $\frac{A'N}{A'B}$ et $\frac{A'M}{A'A}$

On considère le triangle $A'BA$; on a : $N \in (A'B)$ et $M \in (AA')$
et $(MN) \parallel (AB)$

D'après la propriété de Thalès on a : $\frac{A'N}{A'B} = \frac{A'M}{A'A}$ (1)

3 Comparons $\frac{A'P}{A'C}$ et $\frac{A'M}{A'A}$

On considère le triangle $A'AC$ on a : $P \in (A'C)$ et $M \in (A'A)$
et $(MP) \parallel (AC)$

D'après la propriété de Thalès on a : $\frac{A'P}{A'C} = \frac{A'M}{A'A}$ (2)

4 Dédution

D'après (1) $\frac{A'N}{A'B} = \frac{A'M}{A'A}$ et (2) $\frac{A'P}{A'C} = \frac{A'M}{A'A}$; d'où : $\frac{A'N}{A'B} = \frac{A'P}{A'C}$

or $A'B = A'C$ car A' est le milieu de $[BC]$ donc : $A'N = A'P$

et puisque les points A' , N et P sont alignés et distincts deux à deux

et $A' \in [NP]$ et $A'N = A'P$

Alors A' est le milieu de $[NP]$

Exercice 9

1 Les deux droites sont-elles parallèles ?

Les points A, O et B sont alignés dans le même ordre que les points $C ; O$ et D

et de plus on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$$\frac{OC}{OD} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

On a : $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ et les points $O ; A$ et B et les points $O ; C$ et D

sont alignés dans le même ordre que les points $O ; C$ et D .

donc d'après le réciproque de la propriété de Thalès les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

2 A-t-on $(AD) \parallel (BC)$?

Les points A ; O et D sont alignés dans le même ordre que les points C ; O et D

de plus $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$

et on a: $\frac{OD}{OC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

On a: $\frac{OA}{OB} \neq \frac{OD}{OC}$ donc les deux droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exercice 10

Dans le triangle BIC

On a $F \in (BI)$ et $G \in (IC)$ et $(FG) \parallel (BC)$

et d'après la propriété de Thalès

$$\frac{IB}{IF} = \frac{IC}{IG} = \frac{BC}{GF} = \frac{5}{4} \text{ car } (BC = 5 \text{ et } GF = 4; ABCD \text{ et } CEFG \text{ sont des carrés})$$

Posons $IC = x$ alors $IG = 4 - x$ avec $0 \leq x \leq 4$

et puisque: $\frac{IC}{IG} = \frac{5}{4}$

alors $\frac{x}{4 - x} = \frac{5}{4}$

équivalent à: $4x = 5(4 - x)$

équivalent à: $4x = 20 - 5x$

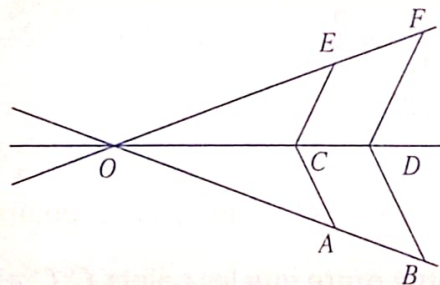
équivalent à: $9x = 20$

équivalent à: $x = \frac{20}{9}$

équivalent à: $IC = \frac{20}{9} (\simeq 2,22)$

Exercice 11

1 Une figure



2 Montrons que les droites (AE) et (BF) sont parallèles

On considère le triangle ODF ; on a $E \in (OF)$ et $C \in (OD)$: $(EC) \parallel (FD)$

D'après la propriété de Thalès $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$ (1)

On considère le triangle ODB ; on a : $C \in (OD)$ et $A \in (OB)$ d'après la

propriété de Thalès $\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}$ (2)

D'après (1) et (2) $\frac{OE}{OF} = \frac{OA}{OB}$

et les points $O; E$ et F sont rangés dans le même ordre que les points O, A et B d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (EA) et (BF) sont parallèles.

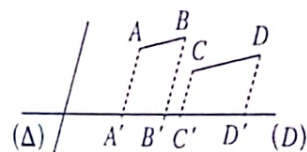
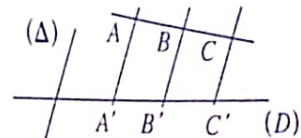
3 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Propriété 1 :

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes et A, B, C et D des points du plan et A', B', C' et D' sont respectivement leurs projetés respectifs sur (D) parallèlement à (Δ) .

► Si on a : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

► Si on a : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$



Propriété 2 :

Si I est le milieu de $[AB]$ et $A'; B'$ et I' sont respectivement les projetés de A, B , et I sur (D) parallèlement à (Δ) .

Alors I' est le milieu de $[A'B']$

Autrement dis:

► La projection conserve les milieux

Exercices

Exercice 12

Soit ABC un triangle et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1 Construire le point M' le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC)

2 Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; puis déduire que $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Exercice 13 Utiliser la conservation du coefficient de colinéarité

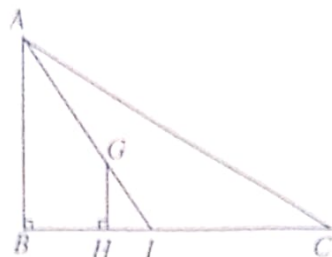
Soit ABC un triangle rectangle en B et I milieu de $[BC]$

On considère le point G de $[AI]$ tel que : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$

Soit H le projeté orthogonal du point G sur (BC)

Montrer que : $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HI}$ et déduire que :

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$



Exercice 14

ABC un triangle et D un point de (BC) n'appartenant pas à $[BC]$

Soit M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

► P est le projeté de D sur (AC) parallèlement à (MC) .

► Q est le projeté de D sur (AB) parallèlement à (MB) .

1 Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$

2 En déduire que : $(PQ) \parallel (BC)$

Exercice 15

Soit ABC est un triangle, I et I' deux points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1 Faire une figure

2 Montrer que I' est le projeté de I sur (AB) parallèlement à (BC)

3 Soit M le milieu de $[BC]$, la droite (AM) coupe la droite (II') en G

a. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

b. Que représente G par rapport au triangle ABC ?

Exercice 16

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

Soit D un point de $[AI]$ différent de A et de I , la droite (BD) coupe (AC) en N , soit P le projeté de I sur (AC) parallèlement à (BN)

1 faire une figure

2 Montrer que P est le milieu de $[NC]$

3 Montrer que $\frac{AD}{DI} = 2 \frac{AN}{NC}$

Solutions

Exercice 12

1 Construction:

On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$

2 Montrons que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$

M' est le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC)

On considère la projection p sur (AC) parallèlement à (BC) ,

On a : $p: A \rightarrow A$

$B \rightarrow C$

$M \rightarrow M'$

Puisque : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité alors:

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{or } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$



Exercice 13

Puisque ABC est rectangle en B alors B est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

On a : H le projeté orthogonal de G sur (BC) et I le projeté orthogonal de I sur (BC) (car $I \in (BC)$),

Puisque : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ et la projection orthogonale conserve le coefficient de

colinéarité de deux vecteurs alors : $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HI}$.

Conclusion : On a : $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HI}$ donc : $\overrightarrow{HB} = -2(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BI})$,

D'où : $3\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{BI}$.

Puisque I est le milieu de $[BC]$ alors $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}$

et par conséquent : $3\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$.

D'où : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Exercice 14

1) On considère la projection sur (AC) parallèlement à (MC)

On a : A est le projeté de A , C est le projeté de M , C est le projeté de C et P est le projeté de D .

Puisque : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité alors : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.

On considère la projection sur (AB) parallèlement à (MB)

On a : A est le projeté de A , B est le projeté de M , B est le projeté de B et Q est le projeté de D

Puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs, alors : $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$

D'après la question 1) on a : $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$

Donc : $AB = \frac{2}{3}AQ$ et $AC = \frac{2}{3}AP$

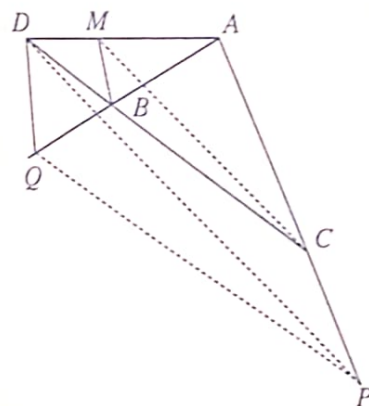
d'où : $\frac{AB}{AQ} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AC}{AP} = \frac{2}{3}$;

c'est-à-dire : $\frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP}$

Et puisque l'ordre des points A, B et Q sur

(AB) est le même que celui des points A, C et P sur (AC) alors d'après la réciproque du théorème

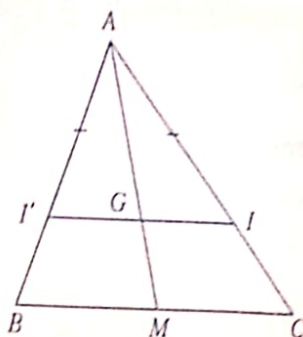
du Thalès : $(BC) \parallel (PQ)$.



Exercice 15

1 Figure:

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



2 Montrons que I' est le projeté de I sur (AB) parallèlement à (BC)

Il suffit de montrer que $\begin{cases} (I'I) \parallel (BC) \\ I' \in (AB) \end{cases}$.

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, donc : $AI = \frac{2}{3}AC$ d'où : $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$

et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, donc : $AI' = \frac{2}{3}AB$, d'où : $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$.

On a alors : $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$.

Et puisque l'ordre des points A, I et C sur la droite (AC) est le même que celui des points A, I' et B sur (AB) alors d'après la réciproque du théorème de Thalès $(I'I) \parallel (BC)$.

On a donc : $\begin{cases} (I'I) \parallel (BC) \\ I' \in (AB) \end{cases}$

Donc : I' est le projeté de I sur (AB) et parallèlement à (BC)

3 a. Montrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

On considère la projection sur (AM) parallèlement à (BC) .

On a : le projeté de I est G .

Le projeté de A est A .

Le projeté de C est M .

Or $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

b. Représentation de G

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ et M est le milieu de $[BC]$.

Donc : G est le centre de gravité du triangle ABC

Exercice 16

1 Construction d'une figure

2 Montrons que P est le milieu de $[NC]$

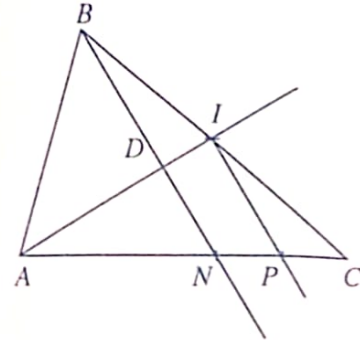
On considère la projection sur (AC) parallèlement à (BN) .

On a : le projeté de B est N .

Le projeté de I est P .

Le projeté de C est C .

Puisque I est le milieu de $[BC]$ et la projection conserve le milieu alors P est le milieu de $[NC]$



3 Montrons que $\frac{AD}{DI} = 2 \frac{AN}{NC}$

Dans le triangle AIP on a : $(DN) \parallel (IP)$

On a : $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{DI}$ donc : $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{NP}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

d'où : $\frac{AD}{DI} = \frac{AN}{NP}$ or P est le milieu de $[NC]$ donc : $NP = \frac{1}{2}NC$

Donc : $\frac{AD}{DI} = \frac{AN}{\frac{1}{2}NC} = 2 \cdot \frac{AN}{NC}$

Exercices de synthèse

Exercice 17

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et E l'intersection de (AB) et (CD) .

Le point F est le projeté du point A sur (CD) parallèlement à (BC) .

Le point K est le projeté du point B sur (CD) parallèlement à (AD) .

1 Faire une figure

2 Montrer que $\frac{ED}{EK} = \frac{EF}{EC}$

Exercice 18

Soit ABC un triangle tel que $AC = 6$; et soient I milieu de $[BC]$ et N un point de $[AC]$ tel que $AN = 4$

Soit G le projeté du point N sur (AI) parallèlement à (BC)

1 Faire une figure

2 Montrer que $\frac{GN}{IC} = \frac{2}{3}$

3 La droite (BG) coupe la droite (AC) en E

a. Montrer que $\frac{EN}{EC} = \frac{EG}{EB} = \frac{GN}{2IC}$ puis déduire la valeur de $\frac{EN}{EC}$

b. Montrer que E est le milieu de $[AC]$

Exercice 19

Soit $ABCD$ un rectangle. On considère E un point à l'extérieur du rectangle $ABCD$, tel que BEC est un triangle isocèle et rectangle en B .

La droite (DE) coupe les deux droites (AC) et (BC) respectivement en M et N

1 Faire une figure

2 Comparer $\frac{MC}{MA}$ et $\frac{MD}{ME}$ puis $\frac{MC}{MA}$ et $\frac{MN}{MD}$

3 Déduire que : $MN \times ME = MD^2$

4 Montrer que : $NB \times EA = BC^2$

Exercice 20

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

Soit (Δ) une droite parallèle à (AI) et coupe les droites (BC) , (AC) et (AB) respectivement en A' , B' et C' .

1 Faire une figure

2 Montrer que $\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB'}{AC}$

Exercice 21

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, ses deux diagonales se coupent en O .

E est le projeté de O sur (AB) parallèlement à (BC)

F est le projeté de O sur (AD) parallèlement à (CD)

1 Faire une figure

2 Montrer que $\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$

3 Déduire que $(EF) \parallel (BD)$

4 Supposons que O est le milieu de $[AC]$; montrer que $BD = 2EF$

Exercice 22

Dans la figure ci-dessous

On considère un triangle ABC et (Δ) Une droite qui coupe (BC) , (AC) et (AB) respectivement en P ; Q et R

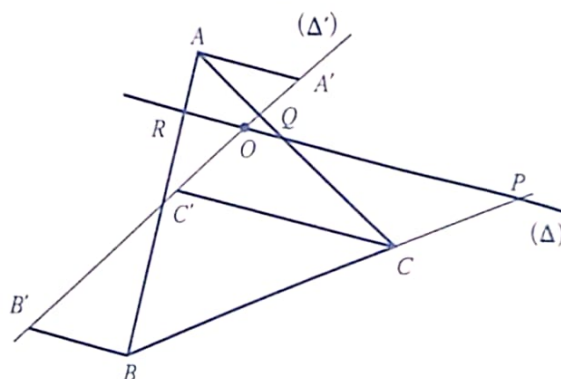
(Δ') une droite qui coupe

(Δ) en O

A' , B' , et C' sont les projetés respectifs de A , B et C sur (Δ') parallèlement à (Δ) .

Montrer que :

$$\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$$



Exercice 23

Soit ABC un triangle. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe (AC) en F . Soit M le projeté de C sur (AB) parallèlement à (BF) .

1 Faire une figure et montrer que $\widehat{ABF} = \widehat{BMC}$

2 Déterminer la nature du triangle BMC , puis montrer que $\frac{FA}{FC} = \frac{BA}{BC}$

3 On suppose que le triangle ABC est isocèle en A

Et soit N un point de $[AC]$ tels que $N \neq A$, $N \neq F$, $N \neq C$ et soit E son projeté sur (BC) parallèlement à (AB)

Montrer que $\frac{CN}{CE} = \frac{CA}{CB}$

Exercice 24

Soit ABC un triangle et M un point de $[AB]$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$

On pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ avec $(0 < x < 1)$

Soit M_1 le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC)

Et M_2 le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AB)

Et M_3 le projeté de M_2 sur (AB) parallèlement à (AC)

1 Faire une figure

2 Montrer que $\overrightarrow{AM_1} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM_2} = x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{M_3B} = x\overrightarrow{AB}$

3 a. Montrer que $\overrightarrow{AM_3} = (1-x)\overrightarrow{AB}$

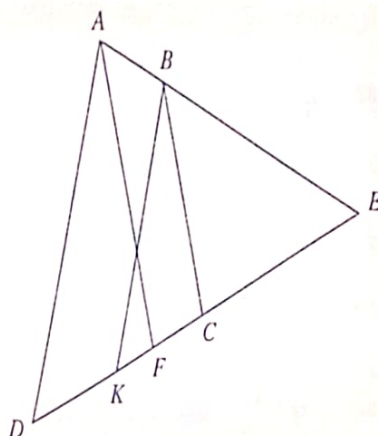
b. Soit I le milieu de $[AB]$

Montrons que I est le milieu de $[MM_3]$

Solutions

Exercice 17

1 La figure



2 Montrons que $\frac{ED}{EK} = \frac{EF}{EC}$:

Dans le triangle EAD on a : $(BK) \parallel (AD)$; $B \in (AE)$ et $K \in (ED)$

d'après la propriété de Thalès on a : $\frac{EB}{EA} = \frac{EK}{ED} = \frac{KB}{AD}$ (1)

dans le triangle EAF on a : $(BC) \parallel (AF)$ et $B \in (AE)$ et $C \in (EF)$

d'après la propriété de Thalès : $\frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EF} = \frac{BC}{AF}$ (2)

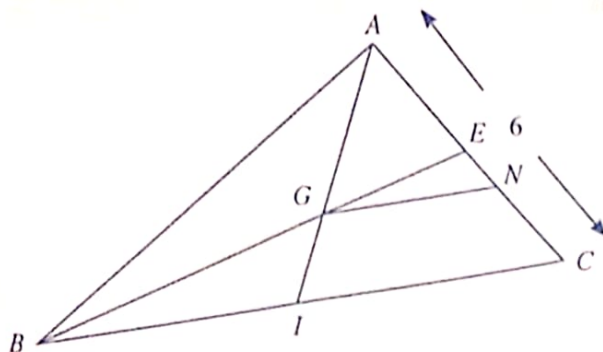
d'après (1) et (2) on a : $\frac{EB}{EA} = \frac{EK}{ED} = \frac{EC}{EF}$

d'où : $\frac{EK}{ED} = \frac{EC}{EF}$

Donc : $\frac{ED}{EK} = \frac{EF}{EC}$

Exercice 18

1 La figure:



2 Montrons que : $\frac{GN}{IC} = \frac{2}{3}$

Dans le triangle AIC , on a : $G \in (AI)$ et $N \in (AC)$

G est le projeté de N sur (AI) parallèlement à (BC)

d'après la propriété de Thalès: $\frac{AG}{AI} = \frac{AN}{AC} = \frac{GN}{IC}$

Donc: $\frac{GN}{IC} = \frac{AN}{AC} = \frac{4}{6}$, d'où: $\frac{GN}{IC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3 a. Montrons que : $\frac{EN}{EC} = \frac{EG}{EB} = \frac{GN}{2IC}$

On considère le triangle BEC ; on a $(GN) \parallel (BC)$

d'après la propriété de Thalès: $\frac{EN}{EC} = \frac{EG}{EB} = \frac{GN}{BC}$; or $BC = 2IC$

(Car I est le milieu de $[BC]$)

Donc: $\frac{EN}{EC} = \frac{EG}{EB} = \frac{GN}{2IC}$

• Dédution

$\frac{EN}{EC} = \frac{GN}{2IC} = \frac{1}{2} \times \frac{GN}{IC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ (car $\frac{GN}{IC} = \frac{2}{3}$) (d'après la question 2))

Donc: $\frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$

b. Montrons que E est le milieu de $[AC]$:

On a : $AC = 6$ et $AN = 4$ et $E \in [AC]$

donc : $NC = AC - AN = 6 - 4 = 2$

d'où : $NC = 2$

Or $N \in [EC]$ donc: $EN + NC = EC$

D'où: $EC = EN + 2$ (1);
 or $\frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ d'où: $EC = 3EN$

on remplace dans (1); on aura $3EN = EN + 2$

D'où: $EN = 1$

d'après (1) $EC = EN + 2 = 1 + 2 = 3$

or $AC = 6$ et $EC = 3$ et $E \in [AC]$

Donc: E est le milieu de $[AC]$

2ème méthode:

$G \in [AI]$ et $AG = \frac{2}{3}AI$ d'après 1)

donc: G est le centre de gravité du triangle ABC

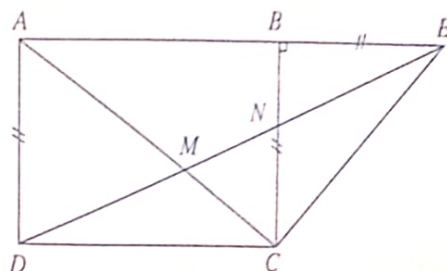
d'où $[BG]$ est une médiane.

d'où: (BG) coupe $[AC]$ en son milieu

Ainsi: E est le milieu de $[AC]$

Exercice 19

1 Une figure



2 Comparons $\frac{MC}{MA}$ et $\frac{MD}{ME}$

On considère le triangle MCD et les parallèles (DC) et (AE)

$E \in (MD)$ et $A \in (MC)$ et les points E, M et D sont dans le même ordre que les points C, M et A .

D'après la propriété de Thalès: $\frac{MC}{MA} = \frac{MD}{ME} = \frac{DC}{AE}$.

D'où: $\frac{MC}{MA} = \frac{MD}{ME}$ (1);

Dans le triangle MAD et les parallèles (AD) et (NC) .

On a: $D \in (MN)$ et $A \in (MC)$.

D'après la propriété de Thalès $\frac{MN}{MD} = \frac{MC}{MA} = \frac{NC}{AD}$

D'où: $\frac{MN}{MD} = \frac{MC}{MA}$ (2)

3 Montrons l'égalité $MD^2 = MN \times ME$

d'après (1) et (2) on a: $\frac{MN}{MD} = \frac{MC}{MA}$ et $\frac{MD}{ME} = \frac{MC}{MA}$

D'où: $\frac{MN}{MD} = \frac{MD}{ME}$ d'où : $MN \times ME = MD^2$

4 Montrons que: $NB \times EA = BC^2$

On considère le triangle ENB et les parallèles (NB) et (AD) .

On a: $A \in (EB)$ et $D \in (NE)$ D'après la propriété de Thalès: $\frac{EB}{EA} = \frac{EN}{ED} = \frac{NB}{AD}$.

$$\text{d'où: } \frac{EB}{EA} = \frac{NB}{AD}; \text{ D'où : } EB \times AD = EA \times NB \quad (3)$$

or le triangle EBC est rectangle et isocèle en B ;

D'où: $EB = BC$;

On remplace dans (3):

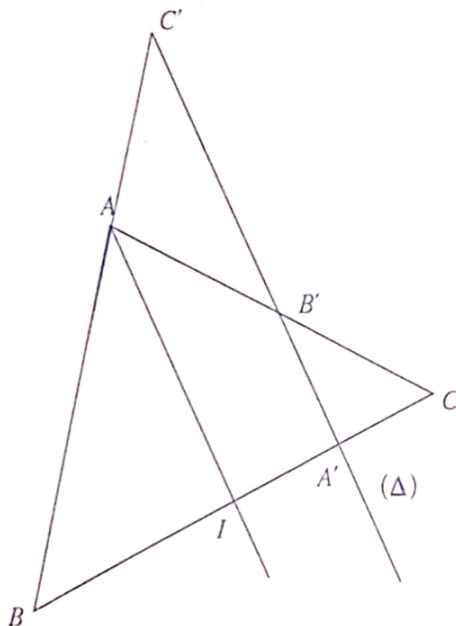
$$BC \times AD = NB \times EA$$

de plus $AD = BC$

Donc: $BC^2 = NB \times EA$

Exercice 20

1 Une figure



2 Montrons que $\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB'}{AC}$

On considère le triangle $BA'C'$ et les deux parallèles (AI) et $(A'C')$.

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AI) .

On a $\overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{AB}$ Le projeté de A est I ;

Le projeté de B est B ;

Le projeté de C' est A' ;

Puisque $\overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{IA'} = k \overrightarrow{IB}$ (car la projection conserve
par suite $AC' = |k| AB$ et $IA' = |k| IB$ le coefficient de colinéarité)

d'où: $\frac{AC'}{AB} = \frac{IA'}{IB}$ (1);

de même, on considère le triangle AIC et la projection sur (BC) parallèlement à (AI) .

On a: le projeté de A est I .

le projeté de C est C

le projeté de B' est A'

or $\overrightarrow{AB'} = \alpha \overrightarrow{AC}$ donc: $\overrightarrow{IA'} = \alpha \overrightarrow{IC}$ par suite $AB' = |\alpha| AC$ et $IA' = |\alpha| IC$.

D'où: $\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{IC}$ (2);

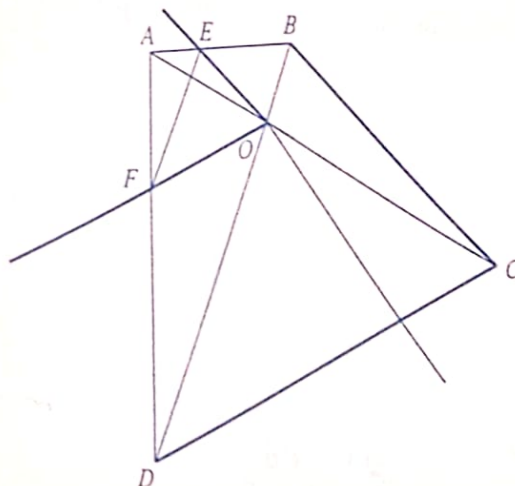
Or I est le milieu de $[BC]$; alors: $IC = IB$

$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{IB}$ (3); (d'après (2))

D'après (1) et (3) on a: $\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}$

Exercice 21

1 Une figure:



2 Montrons que: $\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$

On considère le triangle ACD et les deux parallèles (OF) et (DC) ,

On a: $O \in (AC)$ et $F \in (AD)$ d'après la propriété de Thalès: $\frac{AO}{AC} = \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{DC}$

Donc: $\frac{AO}{AC} = \frac{AF}{AD}$ (1)

► Dans le triangle ACB on a les deux parallèles (OE) et (BC) , on a: $O \in [AC]$

et $F \in [AB]$ d'après la propriété de Thalès: $\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{OE}{BC}$ (2)

D'après (1) et (2) $\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$

3 Déduisons que: $(EF) \parallel (BD)$

Dans le triangle ABD ;

L'ordre des points A, E , et B sur la droite (AB) est le même que celui de A, F et D sur (AD) et $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ d'après la propriété réciproque de Thalès $(EF) \parallel (BD)$

4 Montrons que $BD = 2EF$

On considère la projection sur (AD) parallèlement à (DC)

On a: le projeté de A est A .

le projeté de O est F

le projeté de C est D

Puisque O est le milieu de $[AC]$ alors F est le milieu de $[AD]$ (car la projection conserve le milieu);

On a: O est le milieu de $[AC]$ donc $\frac{AE}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$.

Puisque $(BD) \parallel (EF)$ et $E \in [AB]$ et $F \in [AD]$

alors: $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BD}$

D'où: $\frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ d'où: $\frac{EF}{BD} = \frac{1}{2}$ donc $2EF = BD$

Exercice 22

Montrons que: $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$

On considère la projection
sur (Δ') parallèlement à (Δ)

Le projeté de A est A'

Le projeté de B est B'

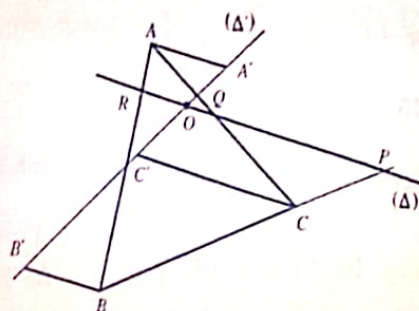
Le projeté de C est C'

Le projeté de P est O

Le projeté de Q est O

Le projeté de R est O

} car P, Q et R sont sur (Δ)



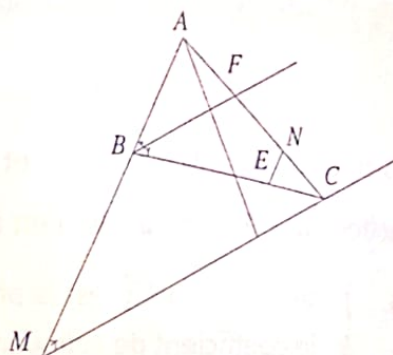
alors d'après Thalès $\frac{PB}{PC} = \frac{OB'}{OC'}$ et $\frac{QC}{QA} = \frac{OC'}{OA'}$ et $\frac{RA}{RB} = \frac{OA'}{OB'}$

d'où: $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = \frac{OB'}{OC'} \times \frac{OC'}{OA'} \times \frac{OA'}{OB'} = \frac{OB' \times OC' \times OA'}{OC' \times OA' \times OB'} = 1$

Donc: $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$

Exercice 23

1 Une figure



Montrons que $\widehat{ABF} = \widehat{BMC}$

Considérons les deux droites parallèles (BF) et (MC) et la sécante (AM)

Les deux angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{BMC}$ sont correspondants (donc $\widehat{ABF} = \widehat{BMC}$)

2 Nature du triangle BMC

Les deux angles $\widehat{FBC}$ et $\widehat{BCM}$ sont alternes internes déterminés par les droites parallèles (BF) et (MC) et la droite (BC) est une sécante.

d'où: $\widehat{FBC} = \widehat{BCM}$

or $\widehat{FBC} = \widehat{ABF}$ car $[BF)$ est une atrice interne de l'angle $\widehat{ABC}$
donc: $\widehat{FBC} = \widehat{BMC}$ (car $\widehat{BMC} = \widehat{ABF}$)

donc le triangle BCM est isocèle en B

3 a. Montrons que $\frac{CN}{CE} = \frac{CA}{CB}$

On considère le triangle ABC et les deux parallèles (EN) et (AB)

d'après la propriété de Thalès $\frac{CN}{CA} = \frac{CE}{CB}$

D'où: $\frac{CN}{CE} = \frac{CA}{CB}$

Infos:

x, y, z et t des réels non nuls

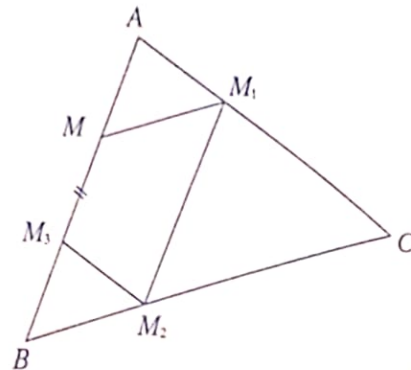
$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ équivaut à $\frac{x}{z} = \frac{y}{t}$

Exercice 24

1 Une figure

On a: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ et $0 < x < 1$

donc M se trouve dans le segment $[AB] \setminus \{A; B\}$



2 Montrons que $\overrightarrow{AM}_1 = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}_2 = x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{M}_3\overrightarrow{B} = x\overrightarrow{AB}$

► On considère la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Le projeté de A est A	} or $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ est la projection conserve le coefficient de colinéarité; Alors: $\overrightarrow{AM}_1 = x\overrightarrow{AC}$
Le projeté de B est C	
Le projeté de M est M_1	

► On considère la projection sur (BC) parallèlement (AB)

Le projeté de A est B	} puisque: $\overrightarrow{AM}_1 = x\overrightarrow{AC}$ Alors: $\overrightarrow{BM}_2 = x\overrightarrow{BC}$
Le projeté de C est C	
Le projeté de M_1 est M_2	

► On considère la projection sur (AB) parallèlement (AC)

Le projeté de B est B	} puisque $\overrightarrow{BM}_2 = x\overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{BM}_3 = x\overrightarrow{BA}$
Le projeté de C est A	
Le projeté de M_2 est M_3	

On a donc : $\overrightarrow{AM_1} = x\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BM_2} = x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{M_3B} = x\overrightarrow{AB}$

a. Montrons que $\overrightarrow{AM_3} = (1-x)\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{M_3B} = x\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{M_3A} + \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB}$ (d'après la relation de Chasles)

d'où : $\overrightarrow{M_3A} = x\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{M_3A} = (x-1)\overrightarrow{AB}$$

Donc : $\overrightarrow{AM_3} = (1-x)\overrightarrow{AB}$

b. Montrons que I est le milieu de $[MM_3]$

Montrons que $\overrightarrow{IM_3} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{IM_3} + \overrightarrow{IM} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM_3} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM_3} + \overrightarrow{AM} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{BB} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc : I est le milieu de $[MM_3]$

1 Coordonnées d'un vecteur - Coordonnées d'un point

► Base d'un plan - repère d'un plan :

Définition:

On dit que le couple $(\vec{i}; \vec{j})$ est une **base** du plan, si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.

Propriétés:

Soit O , I et J trois points.

Si O , I et J sont non alignés alors le couple $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est une base du plan, et le triplet $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est un **repère** du plan.

► Coordonnées d'un vecteur :

Propriété - Définition:

► Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan et $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple unique de réels $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

► Le couple $(x; y)$ est appelé **couple de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$.

On note: $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

► Égalité de deux vecteurs :

► $\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y')$ si et seulement si $(x = x' \text{ et } y = y')$.

► $\vec{u}(x; y) = \vec{0}$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.

► Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\alpha\vec{u} (\alpha \in \mathbb{R})$:

► Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$.

► Si $\vec{u}(x; y)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\vec{u}(\alpha x; \alpha y)$.

► Condition de colinéarité :

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

où $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Exercices

Exercice 1

Le plan étant rapporté à une base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer dans chaque cas les nombres réels x et y sachant que $\vec{u} = \vec{v}$.

1 $\vec{u} = (1 - 2x)\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - (y - 5)\vec{j}$.

2 $\vec{u}(3 - 2x; 4 + x)$ et $\vec{v}(5; 5y)$.

3 $\vec{u} = (3x - 2y)\vec{i} + 12y\vec{j}$ et $\vec{v}(2; 3)$.

Exercice 2

Le plan étant rapporté à une base $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On pose : $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$.

1 Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base du plan.

2 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que : $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Exercice 3

Le plan étant rapporté à une base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ sachant que $\vec{u}(3; 4)$, $\vec{v}(2; -5)$ et $\vec{w} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$.

Exercice 4

Le plan étant rapporté à une base $(\vec{i}; \vec{j})$.

1 Étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas.

a. $\vec{u}(\sqrt{2}; \sqrt{5})$ et $\vec{v}(2; \sqrt{10})$; b. $\vec{u}(2\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ et $\vec{v}(-\sqrt{6}; \frac{1}{2})$.

2 Déterminer m sachant que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires dans chaque cas:

a. $\vec{e}_1(\sqrt{2}; 1)$ et $\vec{e}_2(3 - m; \sqrt{2}m)$

b. $\vec{e}_1(2m - 1; -3m)$ et $\vec{e}_2(-m; 2m + 1)$

Exercice 1

Déterminons x et y sachant que $\vec{u} = \vec{v}$.

1 On a : $\vec{u}(1 - 2x; 3)$ et $\vec{v}(2; -(y - 5))$.

$$\vec{u} = \vec{v} \text{ si et seulement si } \begin{cases} 1 - 2x = 2 \\ 3 = -y + 5 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 2x = -1 \\ y = 5 - 3 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = 2$$

2 On a : $\vec{u}(3 - 2x; 4 + x)$ et $\vec{v}(5; 5y)$.

$$\vec{u} = \vec{v} \text{ si et seulement si } \begin{cases} 3 - 2x = 5 \\ 4 + x = 5y \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = -1 \\ 3 = 5y \end{cases}$$

$$\text{D'où : } x = -1 \text{ et } y = \frac{3}{5}$$

3 $\vec{u}(3x - 2y; 12y)$ et $\vec{v}(2; 3)$.

$$\vec{u} = \vec{v} \text{ si et seulement si } \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 12y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 3x = 2 + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } x = \frac{5}{6} \text{ et } y = \frac{1}{4}$$

Exercice 2

1 Montrons que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base du plan :

Il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont pas colinéaires.

$$\text{On : } \vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} \text{ et } \vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{donc : } \vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

donc $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont pas colinéaires (car $\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2) \neq 0$)

D'où : $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base du plan.

2 Déterminons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$:

Pour cela il suffit d'écrire chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j} \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \end{cases}$$

► Pour le vecteur $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$:

$$\text{On a : } \vec{u} = \frac{4}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \frac{2}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$$

c'est-à-dire : $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;

Donc le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est $(3; 1)$.

► Pour le vecteur $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{v} &= 3\left(\frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\right) + 5\left(\frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\vec{e}_2 \\ &= 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Donc le couple de coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est $(4; -1)$.

► Pour le vecteur $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{w} &= 3\left(\frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\right) - \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{e}_2 \\ &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Donc le couple de coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est $(1; 2)$.

Exercice 3

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$:

► On a : $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(2; -5)$:

$$\text{donc : } \vec{u} + \vec{v}(3 + 2; 4 + (-5))$$

$$\text{D'où : } \vec{u} + \vec{v}(5; -1).$$

► On a : $\vec{v}(2; -5)$ et $\vec{w}(-4; -2)$:

$$\text{donc : } \vec{v} - \vec{w}(2 - (-4); -5 - (-2)), \text{ D'où : } \vec{v} - \vec{w}(6; -3).$$

► On a : $\vec{u}(3;4)$ donc $2\vec{u}(6;8)$

et $\vec{v}(2;-5)$ donc : $-3\vec{v}(-6;15)$; D'où : $2\vec{u} - 3\vec{v}(6-6;8+15)$

Donc : $2\vec{u} - 3\vec{v}(0;23)$.

► On a : $\frac{3}{4}\vec{u}\left(\frac{3}{4} \times 3; \frac{3}{4} \times 4\right)$

c'est-à-dire : $\frac{3}{4}\vec{u}\left(\frac{9}{4};3\right)$ et $\frac{1}{2}\vec{w}\left(\frac{1}{2} \times (-4); \frac{1}{2} \times (-2)\right)$

c'est-à-dire : $\frac{1}{2}\vec{w}(-2;-1)$

D'où : $\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\left(\frac{9}{4} - 2; 3 - 1\right)$ donc : $\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\left(\frac{1}{4};2\right)$

Exercice 4

1 Étudions la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a. On a : $\vec{u}(\sqrt{2};\sqrt{5})$ et $\vec{v}(2;\sqrt{10})$;

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{10} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{20} - 2\sqrt{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (car $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$)

b. On a : $\vec{u}(2\sqrt{2};-\sqrt{3})$ et $\vec{v}(-\sqrt{6};\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} \text{Donc } \det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{18} \end{aligned}$$

Comme $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 Déterminons m sachant que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires :

a. On a : $\vec{e}_1(\sqrt{2};1)$ et $\vec{e}_2(3-m;\sqrt{2}m)$

$$\begin{aligned} \det(\vec{e}_1;\vec{e}_2) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3-m \\ 1 & \sqrt{2}m \end{vmatrix} \\ &= 2m - 3 + m \\ &= 3m - 3 \end{aligned}$$

$\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{e}_1;\vec{e}_2) = 0$.

si et seulement si $3m - 3 = 0$

si et seulement si $m = 1$

Donc : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires si et seulement si $m = 1$.

b. On a : $\vec{e}_1(2m-1; -3m)$ et $\vec{e}_2(-m; 2m+1)$

$$\begin{aligned}\text{donc } \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2) &= \begin{vmatrix} 2m-1 & -m \\ -3m & 2m+1 \end{vmatrix} \\ &= (2m-1)(2m+1) - 3m^2 \\ &= m^2 - 1\end{aligned}$$

donc : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires si et seulement si $m^2 - 1 = 0$.

C'est-à-dire : $m = 1$ ou $m = -1$.

► Coordonnées d'un point:

Propriété - Définition:

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère.

Pour tout point M en plan, il existe un couple unique de réels $(x; y)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le couple $(x; y)$ est appelé:

- de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

► Distance entre deux points - norme d'un vecteur:

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points et $\vec{u}(a; b)$ un vecteur du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

► Distance entre deux points :

$$\text{On a : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

► Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercices

Exercice 5

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$.

- 1 Construire le vecteur $\vec{u}(3; 1)$ d'origine A .
- 2 Construire le vecteur $\vec{v}(-1; 2)$ d'origine B .
- 3 Construire le vecteur $\vec{w}(-2; -3)$ d'origine O .

Exercice 6

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points $A(1; 2)$, $B(3; -4)$ et $C(-2; -1)$.

- 1 Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 2 Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
- 3 Comparer les distances AB et AC .

Exercice 7

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(2; -3)$, $B(1; 2)$ et $C(5; -18)$

- 1 Montrer que les points A , B et C sont alignés.
- 2 Déterminer les coordonnées du point J sachant que le point B est milieu du segment $[AJ]$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point D sachant que le quadrilatère $OABD$ est un parallélogramme.

Exercice 8

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(2; -5)$, $B(3; 1)$ et $D(1; -8)$ et le vecteur $\vec{u}(4; -3)$.

- 1 Calculer AB et $\|\vec{u}\|$.
- 2 Calculer $\|\vec{AB} + \vec{u}\|$ et $\|2\vec{DA} - 3\vec{AB}\|$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point C sachant que $\vec{AC} = 2\vec{u}$.

Exercice 9

On considère dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(-4; 1)$, $B(4; 5)$, $C(11; 8)$ et $D(4; -1)$

- 1 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont-ils colinéaires?
- 2 Déterminer x et y sachant $N(x; 0) \in (AB)$ et $M(0; y) \in (CD)$.

Solutions

Exercice 5

Construction des vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

1 Pour le vecteur $\vec{u}(3;1)$:

L'origine du vecteur $\vec{u}$ est le point $A(1;2)$.

Donc il suffit de construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{u}.$$

2 Pour le vecteur $\vec{v}(-1;2)$:

L'origine du vecteur $\vec{v}$ est le point $B(-3;1)$.

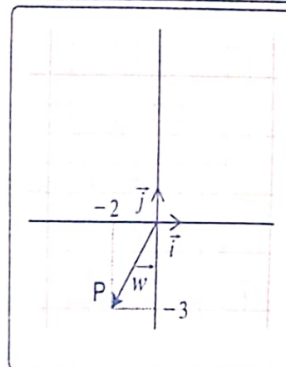
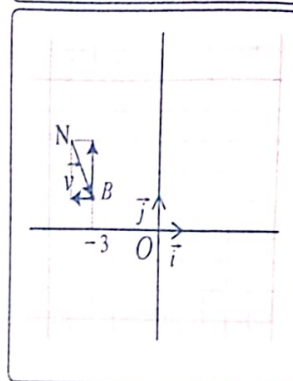
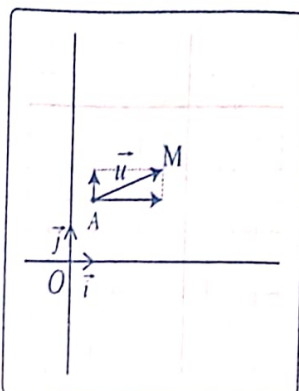
Il suffit de construire le point N tel que :

$$\overrightarrow{BN} = \vec{v}.$$

3 Pour le vecteur $\vec{w}(-2;-3)$:

Il suffit de construire le point P tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{w}.$$



Exercice 6

1 Montrons que les points $A(1;2)$, $B(3;-4)$ et $C(-2;-1)$ ne sont pas alignés :

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -24$

et comme $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \neq 0$

alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

D'où : Les points A , B et C ne sont pas alignés.

2 Déterminons les coordonnées du point I :

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$ alors $x_I = \frac{x_B + x_C}{2}$ et $y_I = \frac{y_B + y_C}{2}$.

c'est-à-dire : $x_I = \frac{3-2}{2}$ et $y_I = \frac{-4-1}{2}$.

Donc : $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

3 Comparons les distances AB et AC :

Puisque $\overrightarrow{AB}(2; -6)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; -3)$

alors : $AB = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$ et $AC = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

D'où : $AB > AC$.

Exercice 7

1 Montrons que les points $A(2; -3)$, $B(1; 2)$ et $C(5; -18)$ sont alignés :

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix}$;

donc : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = 0$

Alors les points A , B et C sont alignés.

2 Déterminons les coordonnées du point J :

Puisque B est le milieu du segment $[AJ]$, alors :

$x_B = \frac{x_A + x_J}{2}$ et $y_B = \frac{y_A + y_J}{2}$; d'où : $x_J = 2x_B - x_A$ et $y_J = 2y_B - y_A$.

c'est-à-dire : $x_J = 0$ et $y_J = 7$

Donc : $J(0; 7)$.

3 Déterminons les coordonnées du point D :

Puisque le quadrilatère $OABD$ est un parallélogramme,

alors : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$ (et on a aussi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DB}$)

et comme $\overrightarrow{AB}(-1; 5)$ et $\overrightarrow{OD}(x_D; y_D)$; alors : $x_D = -1$ et $y_D = 5$

Donc : $D(-1; 5)$.

Exercice 8

1 Calculons AB et $\|\vec{u}\|$

On a : $A(2; -5)$ et $B(3; 1)$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Donc : $AB = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$

On a : $\vec{u}(4; -3)$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

Donc : $\|\vec{u}\| = \sqrt{25} = 5$

On a : $\vec{AB} = (5; 3)$, donc $\vec{AB} = \vec{u}(1+4; 6+(-3))$
 d'où : $\vec{AB} = \vec{u}(5; 3)$

D'où : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

On a : $\vec{DA}(1; 3)$ et $\vec{AB}(5; 3)$ (car $D(1; -8)$ et $A(2; -5)$)

donc : $2\vec{DA}(2; 6)$ et $-3\vec{AB}(-15; -9)$; D'où : $2\vec{DA} - 3\vec{AB}(-13; -3)$

donc : $\|2\vec{DA} - 3\vec{AB}\| = \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2}$

C'est-à-dire $\|2\vec{DA} - 3\vec{AB}\| = \sqrt{170}$

3 Déterminons les coordonnées du point C .

On a : $\vec{AC} = 2\vec{u}$ et $2\vec{u}(8; -6)$, donc : $\begin{cases} x_C - x_A = 8 \\ y_C - y_A = -6 \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} x_C = x_A + 8 = 10 \\ y_C = y_A - 6 = -11 \end{cases}$

Donc : $C(10; -11)$

Exercice 9

1 Étudions la colinéarité des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$

On a : $A(-4; 1)$; $B(4; 5)$; $C(11; 8)$ et $D(4; -1)$

donc : $\vec{AB}(8; 4)$ et $\vec{CD}(-7; -9)$

d'où : $\det(\vec{AB}; \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = -44$

Et comme $\det(\vec{AB}; \vec{CD}) \neq 0$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires.

2 Déterminer x sachant que $N(x; 0) \in (AB)$

on a : $\vec{AN}(x+4; -1)$ et $\vec{AB}(8; 4)$

$N \in (AB)$ signifie que les points A , B et N sont alignés.

c'est-à-dire $\det(\vec{AN}; \vec{AB}) = 0$; d'où : $\begin{vmatrix} x+4 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Et on a : $\det(\vec{AN}; \vec{AB}) = 0$ équivaut à $4x + 16 - 8 = 0$

équivaut à $x = -2$

3 Déterminons y sachant que $M(0; y) \in (CD)$

On a : $M \in (CD)$ signifie que les points M , C et D sont alignés.

Calculons $\det(\vec{CM}; \vec{CD})$

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{DC}) &= \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ y+1 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -36 - 7y - 7 \\ &= -7y - 43\end{aligned}$$

donc : $M \in (CD)$ équivant à $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}) = 0$
 équivant à $-7y - 43 = 0$
 équivant à $y = -\frac{43}{7}$

2 Droite définie par un point et un vecteur

► Vecteur directeur d'une droite:

Définition:

Soit (D) une droite passant par deux points distincts A et B , tout vecteur $\vec{u}$ non nul et colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (D) .

On dit aussi que (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; et on note $D(A; \vec{u})$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) .

Propriété:

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ tel que $t \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On écrit $D(A; \vec{u})$.

► $D(A; \vec{u}) = \{M \in (P) / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \text{ avec } t \in \mathbb{R}\}$

► Représentation paramétrique d'une droite:

Définition:

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan (P) , $A(x_0; y_0)$ un point du plan et $\vec{u}(a; b)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$ est appelé **représentation paramétrique** de la droite (D) passant par $A(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b)$.

Remarque:

Toute droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Exercices

Exercice 10

Soit $A(-2; 3)$ et $B(7; -3)$ deux points du plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Déterminer x sachant le vecteur $\vec{u}(x; 5)$ est un vecteurs directeur de la droite (AB) .

2 Déterminer m sachant que le vecteur $\vec{v}(m+1; m-3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chaque cas :

1 $A(-1; 5)$ et $\vec{u}(3; 2)$

2 $A(-2; -3)$ et $\vec{u}(4; -1)$

3 $A(0; 5)$ et $\vec{u}(-2; 0)$

4 $A(7; 0)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

Exercice 12

Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

1 Donner quatre points de (D) .

2 Est-ce que (D) passe par les points $A(-7; 1)$, $B(7; 0)$ et $C(1; \frac{6}{5})$?

Exercice 13

Le plan étant rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas :

1 $A(1; 0)$ et $B(3; -7)$

2 $A(7; 1)$ et $B(7; 3)$

3 $A(3; 2)$ et $B(-2; 2)$

4 $A(-5; -8)$ et $B(-2; -3)$

Exercice 14

Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (D) et les coordonnées de deux points de cette droite (dans chacun des cas suivants).

1 $(D): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

2 $(D): \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - k \end{cases} / (k \in \mathbb{R})$

3 $(D): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \end{cases} / (\lambda \in \mathbb{R})$

Solutions

Exercice 10

1 Déterminons x .

$\vec{u}(x; 5)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Calculons $\det(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ avec $A(-2; 3)$ et $B(7; -3)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \det(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) &= \begin{vmatrix} x & 9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -6x - 45 \end{aligned}$$

$$\det(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = 0 \text{ si et seulement si } -6x - 45 = 0$$

$$\text{si et seulement si } x = \frac{-45}{-6} = \frac{15}{2}$$

$$\text{D'où : } x = \frac{15}{2}$$

2 Déterminons m .

$\vec{v}(m+1; m-3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Calculons $\det(\vec{v}; \overrightarrow{AB})$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \det(\vec{v}; \overrightarrow{AB}) &= \begin{vmatrix} m+1 & 9 \\ m-3 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -6m - 6 - 9m + 27 \\ &= -15m + 21 \end{aligned}$$

$$\det(\vec{v}; \overrightarrow{AB}) = 0 \text{ si et seulement si } -15m + 21 = 0.$$

$$\text{D'où : } m = \frac{7}{5}$$

Exercice 11

Donnons une représentation paramétrique de la droite dans chaque cas :

1 $A(-1; 5)$ et $\vec{u}(3; 2)$

et une représentation paramétrique

$$\text{de } (D) \text{ est } \begin{cases} x = x_A + t_a \\ y = y_A + t_b \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}); \text{ avec } \vec{u}(a; b)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

2 $A(-2; -3)$ et $\vec{u}(4; -1)$

$$\text{Alors } (D): \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

3 $A(0;5)$ et $\vec{u}(-2;0)$

Alors $(D): \begin{cases} x = -2t \\ y = 5 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

4 $A(7;0)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ ($\vec{u}(3;5)$)

Alors $(D): \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Info:

Si (D) passe par $A(x_A; y_A)$
et de vecteur $\vec{u}(a;b)$ alors
une représentation paramétrique
de la droite $D(A;\vec{u})$

est $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Solution 12

1 Donnons quatre points de (D)

On a : $(D): \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$.

Pour déterminer des points de la droite (D) , il suffit de donner à t des valeurs (Chaque valeur de t détermine un point unique de (D)).

Pour $t = 0$ on obtient le point $F(2;1)$.

Pour $t = 1$ on obtient le point $G(-3;2)$

Pour $t = -1$ on obtient le point $H(7;0)$

Pour $t = 2$ on obtient le point $I(-8;3)$

2 Vérifions si (D) passe par les points A , B et C

► Pour le point $A(-7;1)$.

On a : $A \in (D)$ si et seulement s'il existe un réel t_0 qui vérifie le système

$(S): \begin{cases} -7 = 2 - 5t_0 \\ 1 = 1 + t_0 \end{cases} ; (S) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} t_0 = \frac{9}{5} \\ t_0 = 0 \end{cases}$

Ce qui est impossible. d'où : $A \notin (D)$

► Pour le point $B(7;0)$

On a : $B \in (D)$ si et seulement s'il existe un k qui vérifie le système

$(S): \begin{cases} 7 = 2 - 5k \\ 0 = 1 + k \end{cases}$
 $(S) \text{ est équivalent à } \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases} ; \text{ donc } B \in (D)$

► Pour le point $C(1; \frac{6}{5})$

$C \in (D) \text{ équivaut à } \begin{cases} 1 = 2 - 5t_0 \\ \frac{6}{5} = 1 + t_0 \end{cases} ; t_0 \in \mathbb{R} \text{ équivaut à } \begin{cases} t_0 = \frac{1}{5} \\ t_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$

Puisque t_0 existe, Donc: $C \in (D)$

Exercice 13

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chaque cas :

1 $A(1;0)$ et $B(3;7)$

(D) est la droite passant par $A(1;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2;7)$

d'où une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

2 $A(7;1)$ et $B(7;3)$

(D) est la droite passant par $B(7;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(0;2)$

d'où une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 + 2m \end{cases} ; (m \in \mathbb{R})$$

3 $A(3;2)$ et $B(-2;2)$

(D) est la droite passant par $A(3;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-5;0)$

d'où une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = 2 \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$$

Remarque : Les vecteurs $\vec{u}(-1;0)$ et $\vec{v}(1;0)$ sont aussi des vecteurs directeur de (D) .

4 Si $A(-5;-8)$ et $B(-2;-3)$

alors (D) est la droite passant par $A(-5;-8)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(3;5)$

Infos:

La droite (D) admet une infinité de représentations paramétriques.

d'où une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = -5 + 3\alpha \\ y = -8 + 5\alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 14

Donnons un vecteur directeur et deux points de (D) dans chaque cas :

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) et A et B ces deux points.

1 $(D): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

On prend $\vec{u}(-2;1)$ et $A(3;0)$

(A est obtenu pour $t=0$.)

On détermine le point B en

remplaçant le paramètre t par un réel différent de zéro

Si $t = 1$ alors $x = 1$ et $y = 1$

D'où : $B(1;1)$

Infos:

Tout vecteur non nul et colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de la droite $D(A, \vec{u})$

2 $(D): \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$

On a : $\vec{u}(0;-1)$ et $A(5;-1)$

Si $k = -1$ alors $x = 5$ et $y = 0$, donc $B(5;0)$

$$(D): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \end{cases} ; (\lambda \in \mathbb{R})$$

(D) passe par $A(0;0)$

(c'est-à-dire par O) et de vecteur $\vec{u}(2; \frac{1}{2})$ (ou $\vec{v}(4;1)$)

Si $\lambda = 2$ alors $x = 4$ et $y = 1$;

d'où : $B(4;1)$

Infos:

Si $\begin{cases} x = at \\ y = yt \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (D) est : alors (D) passe par le point $O(0;0)$ origine du repère.

Équation cartésienne d'une droite dans le plan:

Propriété et définition:

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

Toute droite (D) du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ appelée **équation cartésienne** de la droite (D).

Propriété:

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère. a, b et c trois nombres réels tels que : $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

► L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ une la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Cas particulier : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts.

► Si $x_A = x_B$, alors une équation de la droite (AB) tel que $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est: $x = x_A$.

► Si $y = y_A$, alors une équation de la droite (AB) est: $y_A = y_B$.

Positions relatives de deux droites:

Propriété:

a. On considère les droites (D): $ax + by + c = 0$ et (Δ): $a'x + b'y + c' = 0$

(D) et (Δ) sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$

(c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$)

Remarque : dans le cas où $a'b' \neq 0$, on compare $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$

► (D) // (Δ) Si et seulement Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

► (D) et (Δ) sont confondues, si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} (c' \neq 0)$.

b. Soit $D = D(A; \vec{u})$ et $\Delta = D(B; \vec{v})$ deux droites du plan.

(D) // (Δ) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 15

Donner un vecteur directeur de la droite (D) définie par son équation cartésienne dans chacun des cas suivants:

1 $(D): 3x - 5y + 1 = 0$

2 $(D): 3y - 5 = 0$

3 $(D): 2x + 1 = 0$

4 $(D): \frac{1}{2}x + 3y - 7 = 0$

Exercice 16

Le plan étant rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants:

1 $A(-2; 4)$ et $B(3; -5)$

2 $A(2; 3)$ et $B(2; 1)$

3 $A(-4; 5)$ et $B(1; 5)$

Exercice 17

Donner une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ dans chacun des cas suivants:

1 $A(2; 7)$ et $\vec{u}(1; 2)$

2 $A(0; 1)$ et $\vec{u}(-3; 4)$

3 $A(1; 1)$ et $\vec{u}(0; 2)$

4 $A\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$ et $\vec{u}(1; 0)$

Exercice 18

Donner un vecteur directeur de la droite (D) dans chacun des cas suivants:

1 $(D): 3x - 2y + 7 = 0$

2 $(D): x = 1$

3 $(D): 2y = 1$

4 $(D): y = 2x + 5$

Exercice 19

On considère les droites (D) et (Δ) tels que :

$$(D): 3x - 2y + 5 = 0 \text{ et } (\Delta): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

Donner une représentation paramétrique de (D) et une équation cartésienne de (Δ) .

Exercice 20

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) dans chacun des cas suivants:

1 (D) passe par le point $E(-4; 3)$ et parallèle à la droite $(\Delta): x + 3y + 5 = 0$.

2 (D) passe par (l'origine du repère) et parallèle à la droite (AB) où $A(3;5)$ et $B(-2;7)$.

3 (D) passe par le point $A(-1;4)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 21

Soit (D) la droite d'équation cartésienne $2x - 5y + 1 = 0$.

Étudier la position relative de (D) et (Δ) dans chacun des cas suivants :

1 (Δ): $-4x + 10y + 30 = 0$

2 (Δ): $3x + 2y + 1 = 0$

3 (Δ): $\begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t \\ y = 2 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Exercice 22

Étudier la position relative de la droite (D) définie par la représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ et la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

1 (Δ): $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 8 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

2 (Δ): $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

3 (Δ) = (AB) tels que $A(1;2)$ et $B(3;-1)$

Solutions

Exercice 15

Donnons un vecteur directeur de la droite (D) dans chaque cas.

1 Si (D) a pour équation cartésienne :

$3x - 5y + 1 = 0$ alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(5;3)$

infos:

Si (D) : $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

2 Si : (D) a pour équation $3y - 5 = 0$

alors le vecteur $\vec{u}(-3,0)$ est un vecteur

directeur de (D); (car l'équation de (D) s'écrit $0x + 3y - 5 = 0$)

3 Si (D) a pour équation cartésienne : $2x + 1 = 0$ (qui s'écrit: $2x + 0y + 1 = 0$)

alors le vecteur $\vec{u}(0;2)$ est un vecteur directeur de (D).

4 Si (D) a pour équation cartésienne : $\frac{1}{2}x + 3y - 7 = 0$

alors le vecteur $\vec{u}(-3; \frac{1}{2})$ est un vecteur directeur de (D).

Exercice 16

Équation cartésienne de la droite (AB).

1 Si $A(-2; 4)$ et $B(3; -5)$

alors $\overrightarrow{AB}(5; -9)$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

or $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

on peut donc prendre $-b = 5$ et $a = -9$ ($a = -9$ et $b = -5$) d'où une équation cartésienne de la droite (AB) s'écrit $-9x - 5y + c = 0$

et comme (D) passe par A, alors $-9x_A - 5y_A + c = 0$

c'est-à-dire $18 - 20 + c = 0$ d'où $c = 2$

Donc: $-9x - 5y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

2^{ème} méthode :

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Donc $M \in (AB)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$ (1)

Calculons $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) &= \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-4 & -9 \end{vmatrix} \\ &= -9(x+2) - 5(y-4) \\ &= -9x - 5y + 2 \end{aligned} \quad (2)$$

de (1) et (2) en déduit que $-9x - 5y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

2 Si $A(2; 3)$ et $B(2; 1)$, alors $\overrightarrow{AB}(0; -2)$ est un vecteur de la droite (AB).

Soit $M(x; y)$ un point du plan

$M \in (AB)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d'où } -2(x-2) = 0$$

Conclusion: $x - 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

3 Si $A(-4; 5)$ et $B(-1; 5)$ alors A



soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in (AB)$ équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\text{équivaut à } \begin{vmatrix} x+4 & 5 \\ y-5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{équivaut à } -5(y-5) = 0$$

Donc: $y-5=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB) .

2^{ème} méthode : Le vecteur $\overrightarrow{AB}(5, 0)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc l'équation de (AB) s'écrit $0x + 5y + c = 0$ et comme (AB) passe par $A(-4; 5)$

$$\text{alors : } 5 \times 5 + c = 0 \text{ d'où } c = -25$$

Donc: une équation cartésienne de la droite (AB) est $5y - 25 = 0$ ou $y - 5 = 0$.

Exercice 17

Donnons une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ dans chaque cas.

1 Si $A(2; 7)$ et $\vec{u}(1; 2)$.

alors une équation cartésienne de $D(A; \vec{u})$ peut s'écrire sous la forme:

$$2x - y + c = 0 \text{ et puisque } D(A; \vec{u}) \text{ passe par } A(2; 7), \text{ alors } 2x_A - y_A + c = 0$$

c'est-à-dire $c = 3$.

Donc $2x - y + 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$.

2 Si $A(0; 1)$ et $\vec{u}(-3; 4)$

alors une équation cartésienne de $D(A; \vec{u})$ peut s'écrire sous la forme:

$$4x + 3y + c = 0 \text{ et comme } D(A; \vec{u}) \text{ passe par } A(0; 1)$$

$$\text{alors } 4 \times 0 + 3 \times 1 + c = 0 \text{ d'où } c = -3.$$

Donc: une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ est $4x + 3y - 3 = 0$.

3 Si $A(1; 1)$ et $\vec{u}(0; 2)$

alors une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ peut s'écrire sous la forme: $2x - 0y + c = 0$

$$\text{et comme } D(A; \vec{u}) \text{ passe par } A(1; 1); \text{ alors } 2 \times 1 + c = 0 \text{ d'où } c = -2$$

Donc: une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ est $2x - 2 = 0$ que l'on peut écrire $x - 1 = 0$.

4 Si $A\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$ et $\vec{u}(1;0)$

alors une équation cartésienne de $D(A; \vec{u})$ est $0x - y + c = 0$

et comme $D(A; \vec{u})$ passe par $A\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$ alors $-\frac{5}{3} + c = 0$

c'est-à-dire $c = \frac{5}{3}$.

Donc : une équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ est $y - \frac{5}{3} = 0$

Exercice 18

Donnons un vecteur directeur de la droite (D) dans chaque cas

1 Si (D) a pour équation cartésienne : $3x - 2y + 7 = 0$.

Alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-(-2); 3)$ c'est-à-dire $\vec{u}(2; 3)$

2 Si (D) : a pour équation $x = 1$ alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(0; 1)$

(l'équation de (D) s'écrit : $1x + 0y - 1 = 0$).

3 Si (D) a pour équation $2y = 1$ qui s'écrit : $0x + 2y - 1 = 0$

alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2; 0)$

4 Si (D) a pour équation réduite $y = 2x + 5$, alors $2x - y + 5 = 0$

est une équation cartésienne de (D)

d'où $\vec{u}(1; 2)$ est un vecteur directeur de (D).

Exercice 19

► **Donnons une représentation paramétrique de (D).**

On a : (D) a pour équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$ donc le vecteur $\vec{u}(2; 3)$

est un vecteur directeur de (D) le point $A(-1; 1)$ appartient à (D)

d'où une représentation paramétrique de (D) est $\begin{cases} x = -1 + 2t; \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

2ème méthode :

Remplaçons x par un paramètre t dans l'équation cartésienne, puis déterminons y en fonction de t

On a : $3x - 2y + 5 = 0$

Si $x = t$ alors $y = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$

d'où une représentation paramétrique de (D) est $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Donnons une équation cartésienne de (Δ) .

Une représentation paramétrique de (Δ) est
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Le système $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} t = y - 1 \\ x = 3 - 2(y - 1) \end{cases}$

d'où une équation de (D) est $x = 3 - 2y + 2$

Une équation cartésienne de (D) est $x + 2y - 5 = 0$

Exercice 20

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) dans chaque cas.

1 (D) passe par le point $E(-4; 3)$ et parallèle à la droite (Δ) d'équation cartésienne $x + 3y + 5 = 0$

Le vecteur $\vec{u}(-3; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ) est aussi un vecteur directeur de (D) .

D'où une équation cartésienne de (D) s'écrit : $x + 3y - c = 0$ et comme (D) passe par $E(-4; 3)$ alors $-4 + 3 \times 3 - c = 0$ d'où $c = -5$

Finalement une équation réduite de (D) est $x + 3y - 5 = 0$

2 (D) passe par $O(0; 0)$ et parallèle à (AB) tels que $A(3; 5)$ et $B(-2; 7)$, un vecteur directeur de (D) est $\vec{AB}(-5; 2)$ (car $(D) \parallel (AB)$)

d'où une équation cartésienne de (D) s'écrit $-2x - 5y + c = 0$ et comme (D) passe par le point $O(0; 0)$ alors $c = 0$

Finalement $2x + 5y = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (D)

3 (D) passe par le point $A(-1; 4)$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

Le vecteur $\vec{j}(0; 1)$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées est aussi vecteur directeur de (D) .

d'où une équation de (D) s'écrit $-x + c = 0$ et comme (D) passe par $E(-1; 4)$ alors $-(-1) + c = 0$

c'est-à-dire $c = -1$

Finalement $x + 1 = 0$ est une équation cartésienne de (D) .

infos

La droite qui passe par $A(x_A; y_A)$ et parallèle à l'axe des abscisses a pour équation $y = y_A$

La droite qui passe par $A(x_A; y_A)$ et parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = x_A$

Exercice 21

Étudions la position relative de (D) et (Δ) dans chaque cas.

1 Si $(D): 2x - 5y + 1 = 0$ et $(\Delta): -4x + 10y + 30 = 0$

$$\text{On a : } \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

donc $(D) \parallel (\Delta)$

$$\text{de plus } \frac{2}{-4} \neq \frac{1}{30}$$

Donc la droite (D) est strictement parallèle à (Δ) .

2 Si $(D): 2x - 5y + 1 = 0$ et $(\Delta): 3x + 2y + 1 = 0$

$$\text{On a : } \frac{2}{3} \neq -\frac{5}{2}$$

Donc (D) et (Δ) sont deux droites sécantes.

3 Si $(D): 2x - 5y + 1 = 0$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t \\ y = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

On a : $\vec{u}(5; 2)$ est un vecteur direction de (D) et $\vec{v}\left(\frac{5}{2}; 1\right)$ est un vecteur directeur de (Δ) .

Calculons $\det(\vec{u}; \vec{v})$:

$$\text{On a : } \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ d'où } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

finalement $(D) \parallel (\Delta)$

Le point $G(3; 2)$ appartient à (Δ) , et $2 \times 3 - 5 \times 2 + 1 \neq 0$

Donc $G \notin (D)$ d'où (D) et (Δ) sont strictement parallèles.

exercice 23

Le plan est rapporté à un repère $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les droites (D) , (D') et (Δ) qui sont définies par :

$$(D): 3x - 2y + 25 = 0, \quad (D'): \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 8 + 3k \end{cases}; (k \in \mathbb{R}) \text{ et}$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

1 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Δ) avec les axes du repère.

2 Montrer que (D') et (Δ) sont sécantes et déterminer leur point d'intersection

3 Montrer que (D) et (D') sont confondues.

Exercice 24

Le plan étant rapporté à un repère $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points $A(-2; 3)$; $B(2; 1)$; C et D tels que $\vec{OC} = -5\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$.

Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1 a. Montrer que $ABDC$ est un trapèze.

b. Déterminer les coordonnées des points D, I et J

2 La droite (AC) coupe la droite (BD) au point E .

a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC) et une représentation paramétrique de la droite (BD) .

b. En déduire les coordonnées du point E .

c. Vérifier que les points E, I et J sont alignés.

3 La droite (AD) coupe la droite (BC) au point F

a. Déterminer les coordonnées du point F .

b. Montrer que les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires

c. En déduire que les points E, F, I et J sont alignés.

Exercice 25

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

On considère un point E du segment $[BD]$ tels que $E \neq O, E \neq B$ et $E \neq D$

On pose $\overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DB}$

- 1 Montrer que $\overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DA} + \alpha \overrightarrow{DC}$
- 2 On munit le plan au repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$
 - a. Déterminer le couple de coordonnées du point E dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ en fonction de α .
 - b. Déterminer les coordonnées du point F symétrique de C par rapport au point E (en fonction de α)
 - c. Montrer que le quadrilatère $OEFA$ est un trapèze de bases $[OE]$ et $[AF]$.

Exercice 26

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les points $A(2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-1; 2)$ et les vecteurs $\vec{u}(m+3; 2)$ et $\vec{v}(1; m+2)$ où $m \in \mathbb{R}$

- 1 Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 2 Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par B et parallèle à la droite (AC) .
- 3 Déterminer les coordonnées du point D sachant le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- 4 Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
- 5 Déterminer m sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- 6 Déterminer m sachant que $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

Exercice 27

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Les droites (D_m) définies par : $(D_m): (m-2)x + (1-3m)y + 6-2m = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

- 1 Existe-t-il un nombre m tel que (D_m) passe par le point $A(-1; -1)$?
- 2 Donner une représentation paramétrique de la droite (D_0) .
- 3 Déterminer m sachant que la droite (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées.
- 4 Déterminer m sachant que (D_m) est parallèle aux droites de vecteur directeur $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
- 5 Montrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe B dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 28

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; -1)$.

- 1 a. Représenter les points A, B et C .
- b. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$.
- 2 On considère les droites (L) , (L') et (L'') telles que :
- $$(L): 3x - 2y + 11 = 0, (L'): \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 + 4,5t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (L'') : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
- a. Montrer que (L) et (L') sont confondues.
- b. Déterminer les coordonnées du point P intersection des droites (L) et (L'') .
- 3 Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis déterminer la nature du triangle ABC .
- 4 Déterminer une équation cartésienne de la hauteur au triangle ABC issue de B .

Solutions

Exercice 23

1 Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) avec les axes du repère.

▶ Avec l'axe des abscisses:

On sait que $(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Soit A le point d'intersection de (Δ) avec l'axe (Ox) .

alors le couple de coordonnées de A est de la forme $(x_A, 0)$ (1) (car $A \in (Ox)$)

et puisque A appartient à (Δ) ,

alors les coordonnées de (Δ) vérifient le système $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que $\begin{cases} x_A = 2t \\ y_A = 1 - 2t \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_A = 2t \\ y_A = 0 = 1 - 2t \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x_A = 2t = 1 \\ 2t = 1 \end{cases}$

Finalement le point d'intersection de (Δ) et (Ox) est $A(1;0)$.

2 Montrons que (D') et (Δ) sont sécantes et déterminons leur point d'intersection.

On a : $(D'): \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 8 + 3k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

▶ Le vecteur $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (D')

▶ Le vecteur $\vec{v}(2;-2)$ est un vecteur directeur de (Δ)

et comme $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, alors (D') et (Δ) sont sécantes.

Soit $B(x_B; y_B)$ le point d'intersection de (D') et (Δ)

donc il existe deux réels t et k tels que : $\begin{cases} x_B = -3 + 2k \\ y_B = 8 + 3k \\ x_B = 2t \\ y_B = 1 - 2t \end{cases} \quad (1)$

d'où : $\begin{cases} 2t = -3 + 2k \\ 1 - 2t = 8 + 3k \end{cases} \quad (2)$

Réolvons le système (2) : $\begin{cases} 2t = -3 + 2k \\ 1 - 2t = 8 + 3k \end{cases} ;$

En faisons la somme membre à membre on obtient : $1 = 5 + 5k$

d'où $k = -\frac{4}{5}$ donc $t = -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{23}{10}$ car $t = -\frac{3}{2} + k$.

On remplaçant k ou t dans le système (1) on obtient : $\begin{cases} x_B = -\frac{23}{5} \\ y_B = \frac{28}{5} \end{cases} ;$

Finalement, le point d'intersection de (D') et (Δ) est le point $B\left(-\frac{23}{5}, \frac{28}{5}\right)$

3 Montrons que (D) et (D') sont confondues.

On a : $(D): 3x - 2y + 25 = 0$ et $(D'): \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 8 + 3k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R}) ;$

On a le vecteur $\vec{w}(2;3)$ est un vecteur directeur de (D) ,

et le vecteur $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (D') .

On a : $\vec{u} = \vec{w}$ donc $(D') \parallel (D)$,

et le point $C(-3;8)$ appartient à (D') .

or (D) et (D') sont confondues si et seulement si $C \in (D)$ (Car $(D) \parallel (D')$).

On a : $3 \times (-3) - 2 \times (8) + 25 = 0$, d'où $C \in (D)$;

Conclusion on a : $(D) \parallel (D')$ et $A \in (D) \cap (D')$, donc $(D) = (D')$

Exercice 24

1 a. Montrons que $ABDC$ est un trapèze

On a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

d'où: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et ont même sens.

Donc: $ABDC$ est un trapèze de base $[AB]$ et $[CD]$.

b. Déterminons les coordonnées des points $D; I$ et J .

On a $A(-2;3)$, $B(2;1)$, et $C(-5;1)$ (Car $\overrightarrow{OC}(-5;1)$) et puisque $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

alors $\begin{cases} x_D - x_C = 2(x_B - x_A) \\ y_D - y_C = 2(y_B - y_A) \end{cases}$

d'où $x_D = x_C + 2x_B - 2x_A$ et $y_D = y_C + 2y_B - 2y_A$

c'est-à-dire $x_D = -5 + 4 + 4$ et $y_D = 1 + 2 - 6$

Donc: $D(3; -3)$

► **Déterminons les coordonnées des points I et J**

Puisque I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

$$\text{alors } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_J = \frac{x_C + x_D}{2} \\ y_J = \frac{y_C + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_J = -1 \\ y_J = -1 \end{cases};$$

Donc: $I(0; 2)$ et $J(-1; -1)$.

2 a. Déterminons une équation cartésienne de la droite (AC)

$\overrightarrow{AC}(-3; -2)$ est un vecteur directeur de la droite (AC)

d'où une équation cartésienne de la droite (AC) s'écrit : $-2x + 3y + c = 0$

et comme (AC) passe par le point $A(-2; 3)$

alors $-2 \times (-2) + 3 \times 3 + c = 0$ d'où $c = -13$

Conclusion: $-2x + 3y - 13 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AC) .

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (BD)

$\overrightarrow{BD}(1; -4)$ est un vecteur directeur de la droite (BD) ,

et puisque (BD) passe par le point $B(2; 1)$;

Alors $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (BD) .

b. Déterminons les coordonnées du point E .

Soit $(x_E; y_E)$ le couple de coordonnées du point E intersection des droites (AC) et (BD) ;

Donc $-2x_E + 3y_E - 13 = 0$ car $(E \in (AC))$; (1)

et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_E = 2 + t \\ y_E = 1 - 4t \end{cases}$ (car $E \in (BD)$) (2)

de (1) et (2) on déduit que : $\begin{cases} -2(2 + t) + 3(1 - 4t) - 13 = 0 \\ x_E = 2 + t \\ y_E = 1 - 4t \end{cases}$

$$\text{d'où } \begin{cases} t = -1 \\ x_E = 1 \\ y_E = 5 \end{cases} ; \text{ Donc: } E(1, 5)$$

c. Vérifions que les points E , I et J sont alignés.

On a $E(1; 5)$; $I(0; 2)$ et $J(-1; -1)$

d'où $\overrightarrow{IE}(1; 3)$ et $\overrightarrow{IJ}(-1; -3)$; Donc: $\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{IJ}$

Donc les points I , E et J sont alignés.

3 a. Déterminons les coordonnées du point F

F est le point d'intersection des droites (BC) et (AD)

Déterminons les équations cartésiennes des droites (BC) et (AD)

(BC) est la droite passant par $B(2, 1)$ et par $C(-5; 1)$

Remarque :

► On peut utiliser un point de la droite (BC) et un vecteur directeur de (BC) .

► Puisque $y_B = y_C = 1$, alors une équation de la droite (BC) est $y = 1$.

Conclusion: une équation cartésienne de (BC) est $y - 1 = 0$

► La droite (AD) passe par $A(-2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}(5; -6)$

Donc une équation cartésienne de (AD) s'écrit : $-6x - 5y + c = 0$

Et puisque (AD) passe par le point $A(-2; 3)$,

alors $-6 \times (-2) - 5 \times (3) + c = 0$ D'où $c = 3$

Conclusion: une équation cartésienne de (AD) est : $-6x - 5y + 3 = 0$

On a : $F(x_F; y_F)$ appartient à (AD) et (BC)

Donc le couple $(x_F; y_F)$ est solution du système : $\begin{cases} y = 1 \\ -6x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} y_F = 1 \\ -6x_F - 5y_F + 3 = 0 \end{cases}$ Ainsi: $\begin{cases} y_F = 1 \\ x_F = -\frac{1}{3} \end{cases}$; Donc $F(-\frac{1}{3}; 1)$

b. Montrons que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires

On a $I(0; 2)$, $J(-1; -1)$; $E(1; 5)$ et $F(-\frac{1}{3}; 1)$

donc $\overrightarrow{IJ}(-1; -3)$ et $\overrightarrow{EF}(-\frac{4}{3}; -4)$;

Et puisque $\det(\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{EF}) = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Alors $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

c. Dédisons que les points I, E, F et J sont alignés.

► D'après la question 2) c) on a : I, E et J sont alignés. (1)

► D'après la question 3) b) on a : les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, donc les droites (EF) et (IJ) sont parallèles (2)

de (1) et (2) on déduit que les droites (EF) et (IJ) sont confondues. (deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues).

Conclusion: les points E, F, I et J sont alignés.

Exercice 25

1 Montrons que $\overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DA} + \alpha \overrightarrow{DC}$

On a : $\overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DB}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \overrightarrow{DE} &= \alpha (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \alpha \overrightarrow{DA} + \alpha \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{D'où } \overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DA} + \alpha \overrightarrow{DC}$$

2 Déterminons les coordonnées du point E dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$

d'après la question 1) on a : $\overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DC} + \alpha \overrightarrow{DA}$

Donc les coordonnées du point E dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ sont $x_E = \alpha$ et $y_E = \alpha$; D'où $E(\alpha, \alpha)$

b. Déterminons les coordonnées du point F

F est le symétrique de C par rapport au point E

donc E est le milieu du segment $[F; C]$

$$\text{d'où } \begin{cases} x_E = \frac{x_F + x_C}{2} \\ y_E = \frac{y_F + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} x_F = 2x_E - x_C \\ y_F = 2y_E - y_C \end{cases} \text{ avec } x_C = 1 \text{ et } y_C = 0 \text{ (car } \overrightarrow{DC} = 1\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA} \text{)}$$

Donc $x_F = 2\alpha - 1$ et $y_F = 2\alpha$; Donc $F(2\alpha - 1, 2\alpha)$

c. Montrons le quadrilatère $OEFA$ est un trapèze.

O est le centre du parallélogramme $ABCD$, donc O est le milieu de segment $[AC]$

On a: $A(0,1)$ et $C(1,0)$ donc $O\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$ c'est-à-dire $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

On a: $E(\alpha, \alpha)$; $F(2\alpha - 1, 2\alpha)$; $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $A(0,1)$, donc $\overrightarrow{OE}\left(\alpha, -\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right)$
et $\overrightarrow{AF}(2\alpha - 1, 2\alpha - 1)$

on remarque que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{OE}$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires de même sens.

donc $(AF) \parallel (OE)$ et $(AF > OE)$

Conclusion: le quadrilatère $OEFA$ est un trapèze de bases $[AF]$ et $[OE]$.

Exercice 26

1 Donnons une équation cartésienne de la droite (AB)

On a la droite (AB) passe par le point $A(2;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-1;2)$ (car $B(1;3)$).

Donc une équation cartésienne de la droite (AB) s'écrit: $2x + y + c = 0$

et comme (AB) passe par le point A , alors $2x_A + y_A + c = 0$

d'où $c = -5$

Finalement: $2x + y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB) .

2 Donnons une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a: (Δ) passe par le point $B(1;3)$ et parallèle à la droite (AC)

donc $\overrightarrow{AC}(-3;1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

d'où une représentation paramétrique de (Δ) est: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

3 Déterminons les coordonnées du point D

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

c'est-à-dire: $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

d'où $x_D = x_C + x_A - x_B$ et $y_D = y_C + y_A - y_B$

et puisque $A(2;1)$, $B(1;3)$ et $C(-1;2)$

alors $x_D = 0$ et $y_D = 0$

D'où $D(0,0)$; c'est-à-dire $D = O$

4 Montrons que le triangle ABC est rectangle isocèle.

On a: $\overrightarrow{AB}(-1;2)$, $\overrightarrow{AC}(-3;1)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;-1)$

donc $AB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

et $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; d'où $AB^2 + BC^2 = AC^2$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B

et comme $AB = BC$, alors le triangle ABC est isocèle.

Donc ABC est rectangle isocèle en B .

5 Déterminons m en sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On a : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

et puisque $\vec{u}(m+3; 2)$ et $\vec{v}(1, m+2)$

$$\begin{aligned} \text{alors } \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} m+3 & 1 \\ 2 & m+2 \end{vmatrix} \\ &= (m+2)(m+3) - 2 \\ &= m^2 + 5m + 4 \\ &= (m+1)(m+4) \end{aligned}$$

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $m = -1$ ou $m = -4$

6 Déterminons m sachant que $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

On a : $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (m+2)^2}$

d'où : $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ si et seulement si $1 + (m+2)^2 = 5$

c'est-à-dire $(m+2)^2 = 4$; D'où $m+2 = 2$ ou $m+2 = -2$

Donc $m = 0$ ou $m = -4$

Exercice 27

1 Existe-t-il un réel m tel que (D_m) passe par $A(-1; -1)$?

On a : $(D_m): (m-2)x + (1-3m)y + 6 - 2m = 0$ et $A(-1; -1)$

(D_m) passe par A si et seulement si

$$(m-2) \times (-1) + (1-3m) \times (-1) + 6 - 2m = 0$$

c'est-à-dire $-m + 3m - 2m + 2 - 1 + 6 = 0$; D'où $7 = 0$ Ce qui est impossible.

Donc il n'existe aucun nombre réel m tel que (D_m) passe par A .

2 Donnons une représentation paramétrique de la droite (D_0)

On a : $(D_0): -2x + y + 6 = 0$.

Le vecteur $\vec{u}(-1; -2)$ est un vecteur directeur de (D_0)

et (D_0) passe par le point $K(3; 0)$

D'où une représentation paramétrique de la droite (D_0) est :

$$\begin{cases} x = 3 - t; (t \in \mathbb{R}) \\ y = -2t \end{cases}$$

3 Déterminons m sachant que  (Oy)

On a : $(D_m): (m-2)x + (1-3m)y + 6 - 2m = 0$

► Le vecteur $\vec{u}(3m-1; m-2)$ est un vecteur directeur de (D_m)

► Le vecteur $\vec{j}(0; 1)$ est un vecteur directeur de (Oy)

On a : $(D_m) \parallel (Oy)$ si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

or $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3m-1 & 0 \\ m-2 & 1 \end{vmatrix} = 3m-1$

Donc $(D_m) \parallel (Oy)$ si et seulement si $m = \frac{1}{3}$

2ème méthode

On a : $(D_m) \parallel (Oy)$ si l'équation de (D_m) s'écrit sous la forme $x = \alpha$ d'où le coefficient de y dans l'équation de (D_m) est nul; C'est-à-dire $1 - 3m = 0$

D'où $m = \frac{1}{3}$

4 Déterminons m sachant que (D_m) est parallèle aux droites de vecteur directeur $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

On a le vecteur $\vec{u}(3m-1; m-2)$ est un vecteur directeur de (D_m) .

► Le vecteur $\vec{w}(1; 2)$ est un vecteur directeur des droites parallèles à (D_m)

donc $\det(\vec{u}; \vec{w}) = 0$; c'est-à-dire $\begin{vmatrix} 3m-1 & 1 \\ m-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; d'où $6m - 2 - m + 2 = 0$

finalement $m = 0$

Donc seule (D_0) est parallèle aux droites de vecteur directeur $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$

5 Montrons que les droites (D_m) passent par un point fixe

Soit $B(x_0; y_0)$ le point commun à toutes les droites (D_m)

donc pour tout réel m on a : $(m-2)x_0 + (1-3m)y_0 + 6 - 2m = 0$

d'où pour tout réel m on a : $(x_0 - 3y_0 - 2)m + y_0 - 2x_0 + 6 = 0$

d'où le polynôme $(x_0 - 3y_0 - 2)m + (y_0 - 2x_0 + 6)$ (en m) est nul.

Donc ses coefficients $x_0 - 3y_0 - 2$ et $y_0 - 2x_0 + 6$ sont nuls

finalement $\begin{cases} x_0 - 3y_0 - 2 = 0 \\ -2x_0 + y_0 + 6 = 0 \end{cases}$; Qu'on peut écrire: $\begin{cases} x_0 = 3y_0 + 2 \\ -2(3y_0 + 2) + y_0 + 6 = 0 \end{cases}$

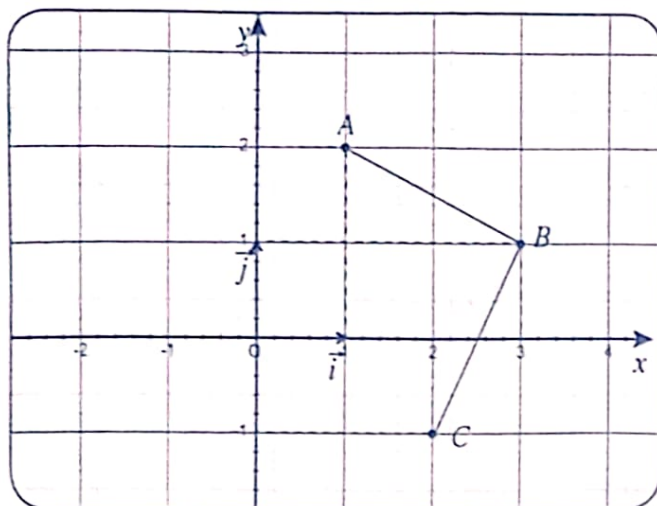
donc : $\begin{cases} x_0 = 3y_0 + 2 \\ y_0 = \frac{2}{5} \end{cases}$

D'où toutes les droites passent par le point $B(\frac{16}{5}; \frac{2}{5})$

Exercice 28

1 Construction des points A, B et C

On a : $A(1; 2)$; $B(3; 1)$ et $C(2; -1)$



b. Donnons une représentation paramétrique de la droite (D)

On a : (D) passe par le point $B(3; 1)$ et de vecteur $\overrightarrow{AC}(1; -3)$

D'où une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 - 3k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$

2 Montrons que les droites (L) et (L') sont confondues.

On a : (L): $3x - 2y + 11 = 0$ et (L'): $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 + 4,5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

donc $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3; 4,5)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites

(L) et (L'); et comme $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4,5 \end{vmatrix} = 0$;

alors $(L) \parallel (L')$ (1);

et pour montrer que $(L) = (L')$ il suffit de montrer qu'un point de l'une des droites est aussi point de l'autre droite.

On a : la droite (L') passe par le point $K(-3; 1)$; Et $3 \times (-3) - 2 \times 1 + 11 = 0$; donc $K \in (L)$ (2);

De (1) et (2) on déduit que (L) et (L') sont confondues.

b. Déterminons les coordonnées du point P

On a P est le point commun des droites (L) et (L'') tels que

(L): $3x - 2y + 11 = 0$ et (L''): $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

On pose $P(x_0; y_0)$

puisque P appartient à (L) et (L^-) alors :



$\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 = 2t \\ y_0 = 1 - t \\ 3x_0 - 2y_0 + 11 = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $\begin{cases} 3 \times (2t) - 2(1 - t) + 11 = 0; \\ x_0 = 2t \\ y_0 = 1 - t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} t = -\frac{9}{8} \\ x_0 = -\frac{9}{4} \\ y_0 = \frac{17}{8} \end{cases}$

Finalement $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{17}{8}\right)$

3 Vérifions que les points A , B et C ne sont alignés

On a : $\overrightarrow{AB}(2, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(1, -3)$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$;

Donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

► Déterminons la nature du triangle ABC

On a $\overrightarrow{AB}(2, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(1, -3)$ et $\overrightarrow{BC}(-1, -2)$

donc $AB = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{5}$

d'où $BA = BC$ et $BA^2 + BC^2 = AC^2$

Finalement le triangle ABC est un triangle rectangle (car $BA^2 + BC^2 = AC^2$) isocèle (car $BA = BC$) en B .

4 Déterminons l'équation de la hauteur issue de B

Puisque le triangle ABC est isocèle de sommet B , alors la hauteur issue de B est aussi médiane au triangle ABC issue de B .

soit I le milieu de $[AC]$;

On a : $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3}{2}, \text{ d'où } I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc la hauteur au triangle ABC issue de B passe par les points $B(3, 1)$ et $I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ d'où une équation

cartésienne de la droite (BI) s'écrit : $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + c = 0$

et puisque (BI) passe par le point $B(3, 1)$; alors $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0$

c'est-à-dire $c = 0$

Finalement une équation cartésienne de la hauteur issue de B est $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 0$; que l'on peut écrire $-x + 3y = 0$

SOMMAIRE



CONTENUS	PAGES
▶ Avant-propos	03
▶ Ensemble $\mathbb{N}$ - Notion d'arithmétiques	04
▶ Ensembles des nombres	27
▶ L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$	69
▶ Les Polynômes	115
▶ Les équations, inéquations et systèmes	150
▶ Calcul vectoriel dans le plan	251
▶ La projection dans le plan	297
▶ La droite dans le plan	324