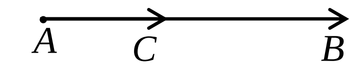
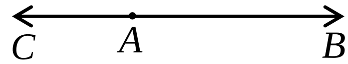
الجداء السلمي

1) الجداء السلمي لمتجهتين :

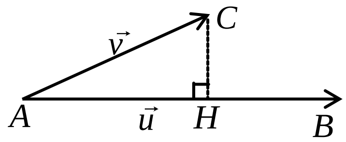
تعريف 1 :

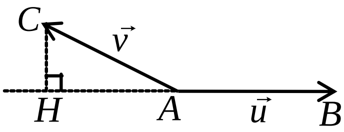




لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيميتين و A نقطة من المستوى .
توجد نقطتان وحيدتان B و C بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$ المعرف كما يلي :
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المنحى فإن $\vec{u}.\vec{v}=AB.AC$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما منحيين متعاكسين فإن $\vec{u}.\vec{v}=-AB.AC$

تعريف 2 :





لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و A نقطة من المستوى .
توجد نقطتان وحيدتان B و C بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)
الجداء السلمي لـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للمتجهتين المستقيميتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$

مثال :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في B بحيث $AB=3$ ، أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

ملاحظة :

لتكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة من المستوى ، لدينا $\vec{u}.\vec{u}=AB.AB=AB^2$
إذن لكل متجهة $\vec{u}$ لدينا $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$.

تعريف :

- العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$ ويُرمز له بالرمز $\vec{u}^2$
- العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويُرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ ونكتب : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

2) الصيغة المثلثية للجداء السلمي :

نشاط :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ، و α قياس الزاوية $(B\hat{A}C)$ و H المسقط العمودي لـ C على المستقيم (AB)

1) نفترض أن $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ (إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى)

بين أن $AH=AC.\cos\alpha$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\alpha$

2) نفترض أن $\frac{\pi}{2}<\alpha\leq\pi$ (إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان)

بين أن $AH=AC.\cos(\pi-\alpha)$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\alpha$

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و α قياس الزاوية $(B\hat{A}C)$ ، لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

ملاحظة :

يمكن استنتاج $\cos\alpha$ من الصيغة السابقة إذا كانت الأعداد $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و $\vec{u}.\vec{v}$ معلومة : $\cos\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

مثال :

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$ ،
أحسب قياس الزاوية $(B\hat{A}C)$.

3) خاصيات الجداء السلمي :

نشاط :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و α قياس الزاوية (BAC) ،
قارن $\vec{u}\vec{v}$ مع $\vec{v}\vec{u}$

خاصية 1 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى و k عدد حقيقي ، لدينا :
$\vec{v}\vec{u}=\vec{u}\vec{v}$ و $(\vec{u}+\vec{v})\vec{w}=\vec{u}\vec{w}+\vec{v}\vec{w}$ و $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$ و $(k\vec{u})\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k.(\vec{u}\vec{v})$
$(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

تمرين تطبيقي :

نعتبر متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بحيث : $\|\vec{u}\|=2$ و $\|\vec{v}\|=3$ و $\vec{u}\vec{v}=5$
أ) أحسب الجداءات السلمية التالية : $3\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u})$ ، $(2\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$
ب) أحسب : $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$ و $\|3\vec{u}+2\vec{v}\|$

نشاط :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين متعامدتين ، أحسب $\vec{u}\vec{v}$.

خاصية 2 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى ،
تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\vec{v}=0$ ونكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

مثال :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $AB=3$ ، أحسب $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ (لاحظ أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$)

4) علاقات مترية في مثلث :

نشاط :

ليكن ABC مثلثا ، و α قياس الزاوية (BAC) ،
1) بملاحظة أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ بين أن $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) استنتج أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ وأن $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\alpha$

خاصية 1 :

ليكن ABC مثلثا ، لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

خاصية 2 (مبرهنة الكاشي) :

ليكن ABC مثلثا ، و α قياس الزاوية (BAC)، لدينا : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\alpha$

مثال 1 :

ليكن ABC مثلثا بحيث : $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$ ،
أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

مثال 2 :

ليكن ABC مثلثا، أحسب BC إذا علمت أن $AB=2$ و $AC=4$ و $BAC=\frac{\pi}{3}$.

نشاط :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ،
1) تحقق من أن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.
2) بين أن : $2AB^2+2AC^2=4AI^2+BC^2$

خاصية 3 (مبرهنة المتوسطة) :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، لدينا : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

مثال:

33/

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، إذا علمت أن $AB = BC = 3$ و $AC = 4$ ، أحسب AI
.

خاصية 4 :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) ،
يكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ و $BC = 2AI$ و $AH^2 = HB.HC$ و $BA^2 = BH.BC$ و $AB.AC = AH.BC$

نشاط :

ليكن ABC مثلثا و A' و B' و C' المساقط العمودية للنقط A و B و C على المستقيمات (BC) و (AC) و (AB) على التوالي .

1) بين أن $CC' = AC \sin A$ و $BB' = BC \sin C$ و $AA' = AB \sin B$.

2) لتكن S مساحة المثلث ABC ،

أ) بين أن $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.BC.\sin B = \frac{1}{2}BC.AC.\sin C$

ب) استنتج أن : $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{2S}{AB.AC.BC}$

خاصية 5 :

ليكن ABC مثلثا ، و S مساحته ، لدينا : $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{2S}{AB.AC.BC}$

تمرين تطبيقي :

ليكن ABC مثلثا بحيث $BAC = \frac{\pi}{6}$ و $ABC = \frac{\pi}{3}$ و $BC = \sqrt{3}$ ،

1) أحسب BCA و AB .

2) أحسب مساحة المثلث ABC ثم أحسب AC .