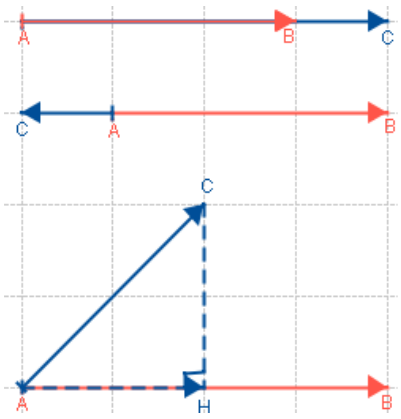
ملخص الجداء السلمي

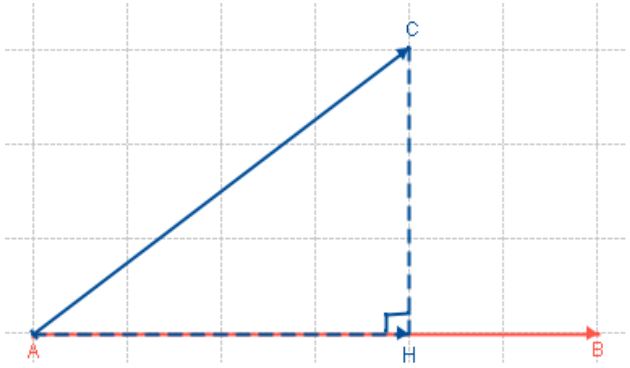
1) الجداء السلمي لمتجهتين :

تعريف :



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين و A نقطة من المستوى .
توجد نقطتان وحيدتان B و C بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
هناك حالتان :
الحالة ① : إذا كانت المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ **مستقيميتين** :
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$ المعرف كما يلي :
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المنحى فإن $\vec{u}.\vec{v}=AB.AC$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما منحيين متعاكسين فإن $\vec{u}.\vec{v}=-AB.AC$
الحالة ② : إذا كانت المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ **غير مستقيميتين** :
لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)
الجداء السلمي لـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للمتجهتين **المستقيميتين** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$.

مثال 1 :

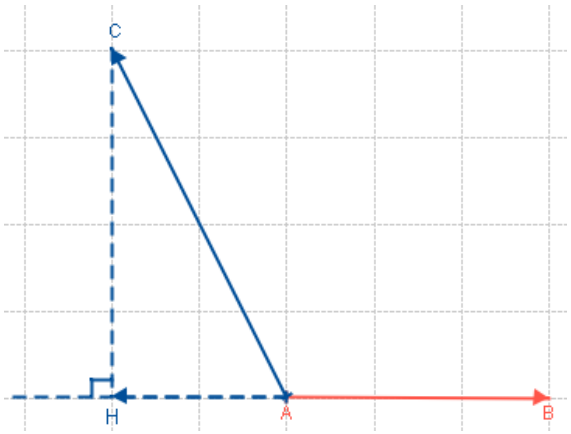


نعتبر الشكل جانبه ، أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ،
علما أن $AB=6$ و $AC=5$ و $CH=3$.

جواب :

لدينا H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) ،
إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
ولدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى ،
إذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB.AH$
المثلث ACH قائم الزاوية في H ، بتطبيق مبرهنة فيثاغورس نجد
$AH=4$ ومنه : $AB.AH=6\times4=24$
وبالتالي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$

مثال 2 :



نعتبر الشكل جانبه ، أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ،
علما أن $AB=3$ و $AH=2$.

جواب :

لدينا H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)
إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
ولدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ مستقيميتين ولهما منحيين متعاكسان ، إذن :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-AB.AH=-3\times2=-6$
وبالتالي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6$

2) الصيغة المثلثية للجداء السلمي :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و α قياس الزاوية $\left(BAC\right)$ ، لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=AB.AC.\cos\alpha$

ملاحظات :

يمكن استنتاج $\cos\alpha$ من الصيغة السابقة إذا كانت الأعداد AB و AC و $\vec{u}.\vec{v}$ معلومة وغير منعدمة : $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{AB.AC}$

مثال : ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$ ، أحسب قياس الزاوية $\left(BAC\right)$.

جواب :

ليكن α قياس الزاوية $\left(BAC\right)$ ، لدينا $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{6}{3\times4}=\dfrac{1}{2}$

وبما أن ABC مثلث فإن $0<\alpha<\pi$ ، ولدينا $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ إذن $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A و B نقطتين من المستوى بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

لدينا $\vec{u}.\vec{u}=AB.AB.\cos(0)=AB.AB\times 1=AB^2\geq 0$

إذن لكل متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ لدينا $\vec{u}.\vec{u}>0$.

العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$ ويُرمز له بالرمز : $\vec{u}^2$

العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويُرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ ونكتب : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

3) خاصيات الجداء السلمي :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى و k عدد حقيقي ، لدينا :

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ و $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ و $(k.\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k.\vec{v})=k.(\vec{u}.\vec{v})$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ، $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

مثال :

نعتبر متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بحيث : $\|\vec{u}\|=2$ و $\|\vec{v}\|=3$ و $\vec{u}.\vec{v}=5$

أ) أحسب الجداءات السلمية التالية : $3\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u})$ ، $(2\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

ب) أحسب : $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$ و $\|3\vec{u}+2\vec{v}\|$

جواب :

أ) $3\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u})=3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{u}^2=3\vec{u}.\vec{v}-6\|\vec{u}\|^2=3\times 5-6\times 4=-9$

$(2\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}^2=2\|\vec{u}\|^2+3\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=2\times 4+3\times 5+9=32$

ب) $\|\vec{u}-2\vec{v}\|=\sqrt{(\vec{u}-2\vec{v})^2}=\sqrt{\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.(2\vec{v})+\|2\vec{v}\|^2}=\sqrt{\|\vec{u}\|^2-4\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2}=\sqrt{4-4\times 5+4\times 9}=2\sqrt{5}$

$\|3\vec{u}-2\vec{v}\|=\sqrt{(3\vec{u}-2\vec{v})^2}=\sqrt{\|3\vec{u}\|^2-2\times 3\vec{u}.(2\vec{v})+\|2\vec{v}\|^2}=\sqrt{9\|\vec{u}\|^2-12\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2}=\sqrt{9\times 4-12\times 5+4\times 9}=2\sqrt{3}$

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى ، تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$ ونكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

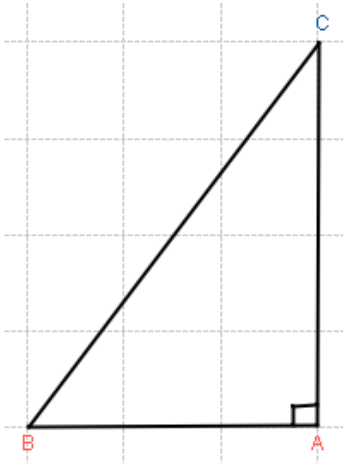
لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و α قياس الزاوية $\left(BAC\right)$ ،

نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين ، هذا يعني $\cos\alpha=0$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=AB.AC.\cos\alpha=AB.AC\times 0=0$

ملاحظة :

المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة $\vec{u}$ ، لأن $\vec{0}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين ولدينا $\|\vec{u}\|.\|\vec{0}\|=0$. ($\vec{0}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين لأن $\vec{0}=0.\vec{u}$)

مثال :



ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $AB=3$ و $AC=4$ أحسب $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ بطريقتين مختلفتين .

جواب :

طريقة 1 :

A هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB) ،

إذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=BA^2=9$

طريقة 2 :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

وبما أن ABC قائم الزاوية في A فإن $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=0$

ولدينا $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=BA^2=9$ إذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=9+0=9$

تمرين 1 : ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع بحيث : $AB=4$ ، أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

تمرين 2 : ليكن ABC مثلثا بحيث : $AB=3\sqrt{2}$ و $AC=2\sqrt{2}$ و $BAC=\frac{2\pi}{3}$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6$.

تمرين 3 : ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A بحيث $BC=4$ ،

ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) ، و K المسقط العمودي للنقطة H على (AC) .

1) علما أن $AH=\sqrt{5}$ ، أحسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

2) استنتج المسافة AK .

4) علاقات مترية في مثلث :

خاصية 1 :

ليكن ABC مثلثا ، لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

مثال :

ليكن ABC مثلثا $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$ بين بدون استعمال مبرهنة فيتاغورس أن ABC مثلثا قائم الزاوية في A .

خاصية 2 (مبرهنة الكاشي) :

ليكن ABC مثلثا ، و α قياس الزاوية $\left(BAC\right)$ ، لدينا : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\alpha$

مثال :

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=2$ و $AC=4$ و $BAC=\frac{\pi}{3}$ ، أحسب BC .

ملاحظة :

في الخاصية السابقة ، إذا كان $\alpha=\frac{\pi}{2}$ فإننا نحصل على مبرهنة فيتاغورس .

خاصية 3 :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) ،

يكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$AB^2+AC^2=BC^2$ ، $BC=2AI$ ، $AH^2=HB.HC$ ، $AB.AC=AH.BC$ ، $BA^2=BH.BC$

خاصية 4 (مبرهنة المتوسط) :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، لدينا : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

مثال :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$ ، إذا علمت أن $AB=BC=3$ و $AC=4$ ، أحسب AI .

خاصية 5 :

ليكن ABC مثلثا ، و S مساحته ، نضع $a=BC$ و $b=AC$ و $c=AB$ ، لدينا : $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

مثال :

ليكن ABC مثلثا بحيث $BAC=\frac{\pi}{6}$ و $ABC=\frac{\pi}{3}$ ، أحسب $BC=\sqrt{3}$ ،

1) أحسب BCA .

2) أحسب AB و AC .