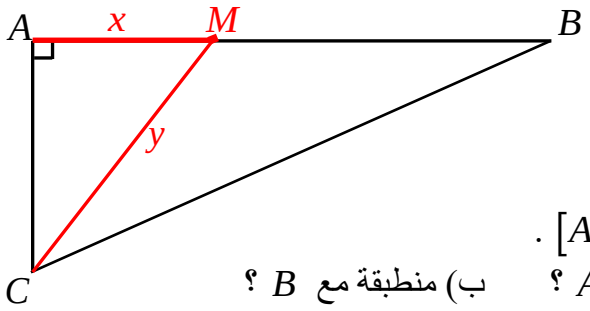
عموميات حول الدوال العددية

1) دالة عددية لمتغير حقيقي ومجموعة تعريفها :

نشاط :



نعتبر مثلثا ABC قائم الزاوية في A بحيث :
$AB=8$ و $AC=3$ و M نقطة من القطعة $[AB]$
نضع $x=AM$ و $y=CM$
1) حدد تعبير y بدلالة x .
2) احسب قيمة y إذا كانت النقطة M منتصف القطعة $[AB]$.
3) ما هي قيمة y عندما تكون النقطة M : أ) منطبقة مع A ؟ ب) منطبقة مع B ؟
4) ماهي مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها العدد x ؟

تعريف :

لتكن D مجموعة ضمن $\mathbb{R}$ ،
كل علاقة f تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد y من $\mathbb{R}$ تسمى دالة عددية للمتغير الحقيقي x .
العدد y يسمى صورة العدد x بالدالة f ونرمز له بالرمز $f(x)$.
المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f ونرمز لها عادة بالرمز D_f .

مثال :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2-3x$ ، أحسب $f(2)$ ، $f(-1)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

ملاحظة :

نعتبر دالة عددية f مجموعة تعريفها D_f .
كل عدد x من D_f له صورة وحيدة بالدالة f.
كل عدد x من $\mathbb{R}$ له صورة على الأكثر بالدالة f.

تمرين تطبيقي :

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f في كل حالة من الحالات التالية ثم أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ و $f(9)$ إذا أمكن :

$f(x)=\frac{1}{x}$ ، $f(x)=\frac{12}{x-3}$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\sqrt{x-5}$

2) التمثيل المبياني لدالة عددية :

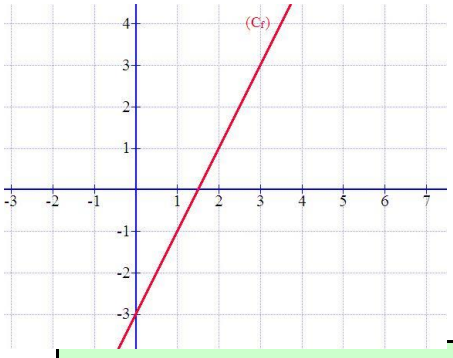
تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها و $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ معلما في المستوى .
مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث $x\in D_f$ و $y=f(x)$ تسمى التمثيل المبياني للدالة f ، أو منحنى الدالة f في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ ، ونرمز له عادة بالرمز : (C_f) ، $(C_f)=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

مثال :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$f(x)=2x-3$ ، جدول بعض القيم وصورها بالدالة f :

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3



3) تساوي دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعتي تعريفيهما.
نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان : $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ لكل x من D_f

مثال :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^4+1}-x^2$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

بين أن : $f=g$.

4) الدالة الزوجية ـ الدالة الفردية – التأويل المبياني :

أ) تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها .

نقول إن الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f لدينا : $\begin{cases}(-x)\in D_f\\ f(-x)=f(x)\end{cases}$ و

نقول إن الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f لدينا : $\begin{cases}(-x)\in D_f\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ و

أمثلة :

1) بين أن الدالة $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ فردية وأن الدالة $g:x\mapsto\dfrac{1}{x^2-9}$ زوجية .

2) أدرس زوجية كل دالة من الدوال المعرفة أسفله :

$f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=-x^2+3$ ، $h(x)=2x^3$ و $k(x)=2x+1$

ملاحظة :

- إذا كانت f دالة عددية غير زوجية فهذا لا يعني بالضرورة أنها فردية .
- إذا كانت f دالة عددية غير فردية فهذا لا يعني بالضرورة أنها زوجية.

ب- التأويل المبياني لزوجية دالة :

خاصية :

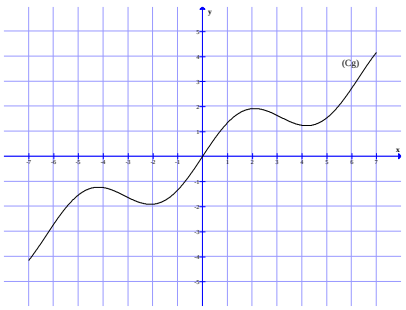
لتكن f دالة عددية و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,I;J)$.

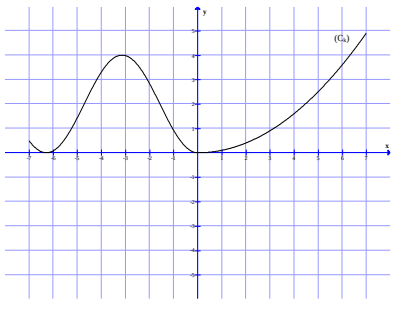
تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

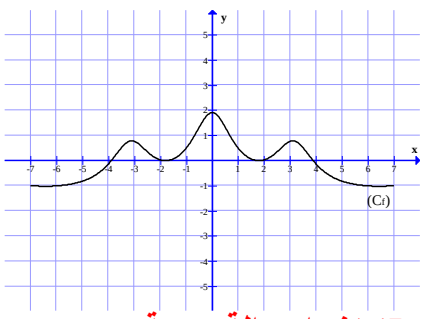
تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

أمثلة :

حدد مبيانيا زوجية الدوال f ، g ، h الممثلة أسفله :







5) تغيرات دالة عددية :

أ) منحى تغيرات دالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .

- تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x\le y$ لدينا : $f(x)\le f(y)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x<y$ لدينا : $f(x)<f(y)$
- تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x\le y$ لدينا : $f(x)\ge f(y)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x<y$ لدينا : $f(x)>f(y)$
- تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I لدينا : $f(x)=f(y)$

مثال :

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x}$ ، بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=-2x+1$ ، بين أن g تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

ب) الدالة الرتيبة :

تعريف :

نقول إن f رتيبة على مجال I إذا كانت إما تزايدية وإما تناقصية على المجال I.

نقول إن f رتيبة قطعا على مجال I إذا كانت إما تزايدية قطعا وإما تناقصية قطعا على المجال I.

ملاحظة :

دراسة رتابة أو تغيرات دالة على D_f يعني تحديد مجالات I ضمن D_f بحيث تكون f رتيبة أو رتيبة قطعا على I.

تمرين تطبيقي :

بين أن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$.

ج) معدل التغير :

تعريف :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجالا ضمن D_f و x و y من I بحيث $x\neq y$.

العدد الحقيقي $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y ونرمز له بالرمز $T(x;y)$.

أمثلة :

أحسب معدل التغير بين x و y حيث x و y من D_f بحيث $x\neq y$ في الحالات التالية :

$f(x)=3x-7$ ، $f(x)=-5x+\dfrac{3}{2}$ و $f(x)=\sqrt{x}$

د) معدل التغير ورتابة دالة عددية :

خاصية :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجالا ضمن D_f .

إذا كان لكل x و y من I بحيث $x\neq y$:

$T(x;y)\geq 0$ فإن f تزايدية على I.

$T(x;y)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I.

$T(x;y)\leq 0$ فإن f تناقصية على I.

$T(x;y)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I.

$T(x;y)=0$ فإن f ثابتة على I.

أمثلة :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x^2+3$ ، باستعمال معدل التغير :

1- بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

2- بين أن g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$.

هـ) الرتابة والزوجية :

خاصية :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة لصفر،

وليكن I مجالا ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و I' مماثل I بالنسبة لصفر.

* إذا كانت f دالة زوجية فإن :

f تزايدية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (قطعا) على I'

f تناقصية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (قطعا) على I'

* إذا كانت f دالة فردية فإن :

f تزايدية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (قطعا) على I'

f تناقصية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (قطعا) على I'

ملاحظة :

المجال I' مماثل المجال I بالنسبة لصفر إذا كان $x \in I$ يعني $-x \in I'$.

تطبيق :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^4 - 2x^2$.

1) بين أن f دالة زوجية .

2) أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0;1]$ و $]1;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f.

6) القيم القصوى – القيم الدنيا لدالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن D_f حيز تعريفها ، وليكن $x_0 \in I$.

- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة القصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان : $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من I .
- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة الدنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان : $f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من I .

تمرين تطبيقي :

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

a) بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى لـ f على $\mathbb{R}$.

b) بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا لـ f .

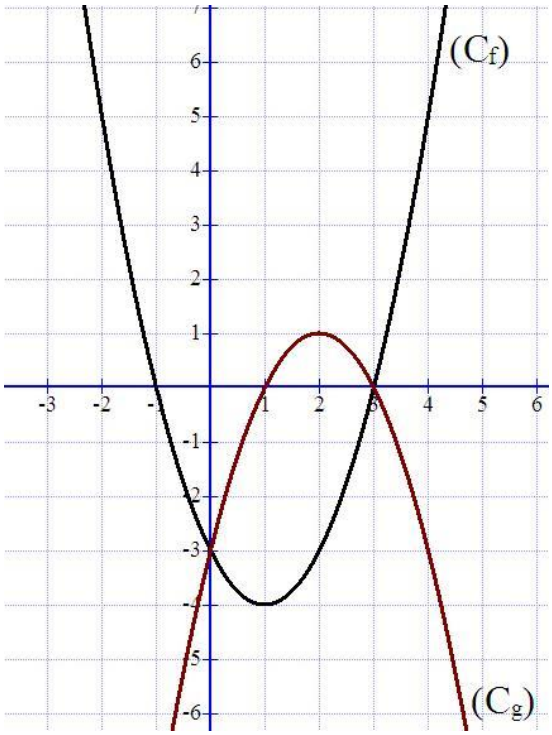
ملاحظة :

- إذا كانت f دالة عددية تزايدية على مجال $[a;b]$ وتناقصية على مجال $[b;c]$ حيث $a<b<c$ فإن $f(b)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[a;c]$.
- إذا كانت f دالة عددية تناقصية على مجال $[a;b]$ وتزايدية على مجال $[b;c]$ حيث $a<b<c$ فإن $f(b)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[a;c]$.

7) حلول بعض المعادلات مبيانيا :

لتكن f و g دالتين عدديتين منحنييهما على التوالي هما (C_f) و (C_g) ، و I مجالا ضمن مجموعتي تعريفهما ، و a عددا حقيقيا .

- حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال I ، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع (C_g) على المجال I.
- حلول المعادلة $f(x) = a$ على المجال I ، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = a$ على المجال I.



تمرين تطبيقي :

لتكن f و g الدالتين الممثلتين أسفله :

1) حدد مبيانيا : $f(-1)$ و $g(4)$.

2) حدد مبيانيا الأعداد التي صورتها بالدالة f هي 5 ثم -6 .

3) حدد مبيانيا مطاريف الدالتين f و g .

4) حل مبيانيا المعادلات التالية :

$f(x) = g(x)$ ، $f(x) = 5$ و $g(x) = -3$.

5) ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$.