دراسة الدوال و تمثيلها باستعمال دوال مرجعية

1- دراسة و تمثل مبيانيا الدالة $f : x \to ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x^2$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0;+\infty[$

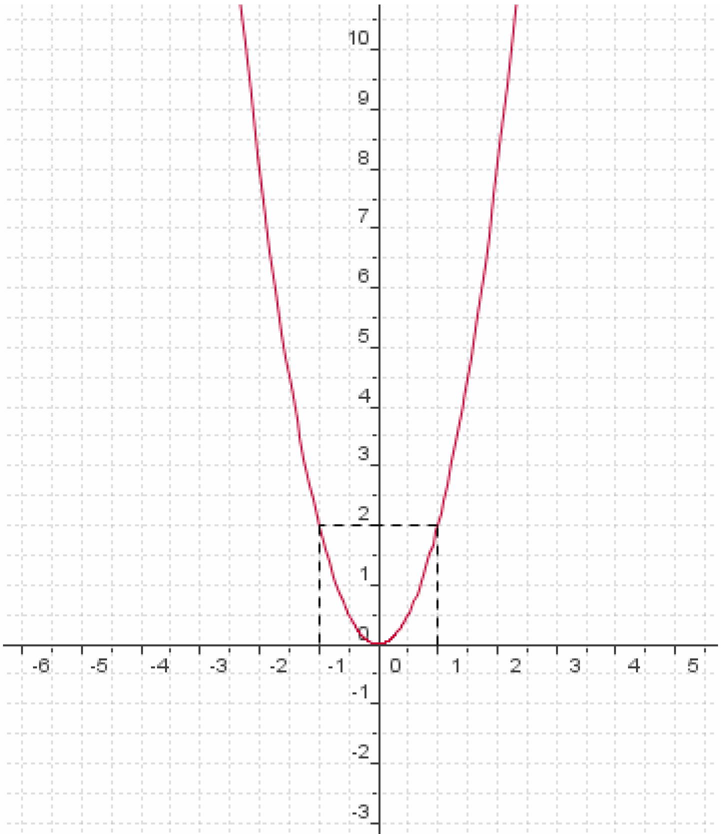
ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 2(x+y)$$

لكل x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$



معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $0 \prec 2x^2 \prec 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

إذا كان $x \succ 1$ فان $2x^2 \succ 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

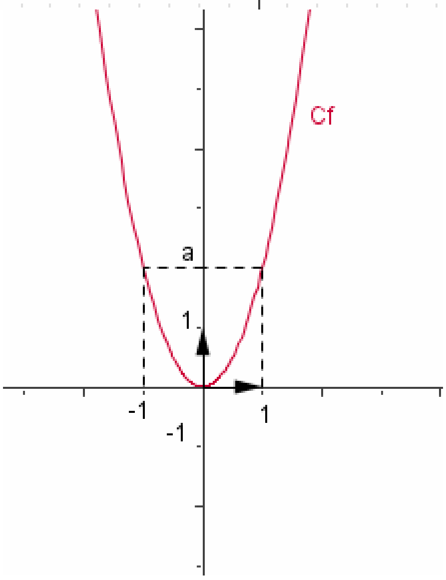
C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

ب- الحالة العامة

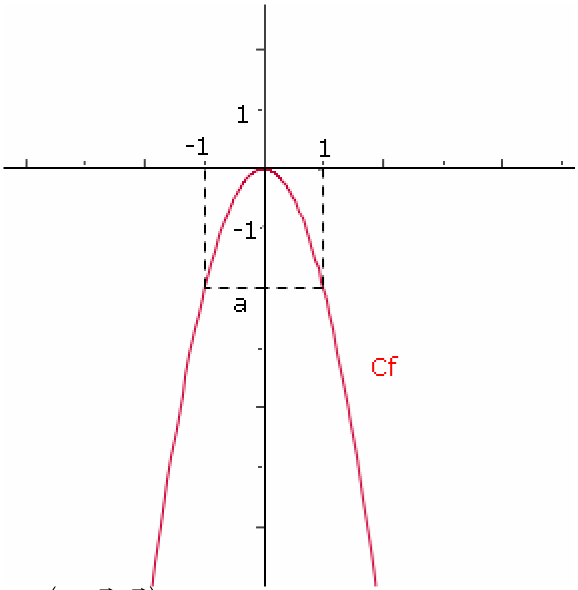
نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = ax^2$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $a \succ 0$ فان



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل



إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	0	↘	

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

تمرين $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$h(x)=3x^2$ $\quad m(x)=-2x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم

أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \to ax^2+bx+c$

لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ تكافئ $\begin{cases} X-\alpha=x \\ Y-\beta=y \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} X=x+\alpha \\ Y=y+\beta \end{cases}$

مثال1 لندرس f حيث $f(x)=2x^2-4x-3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=2(x-1)^2-5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2(x-1)^2-5$ أي $y+5=2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;-5)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to 2x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y+5=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=2x^2$

تكافئ $Y+5=2(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله

محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O)=O'$

أي $O'(1;-5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

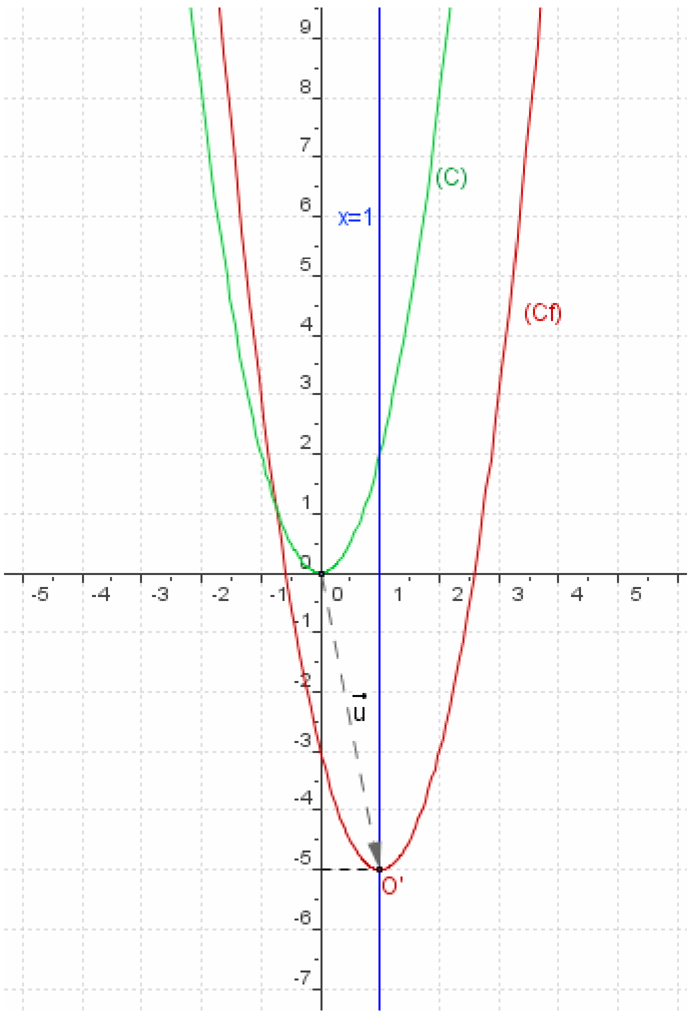
و حيث أن الدالة $x \to 2x^2$ تزايدية على $[0;+\infty[$

و تناقصية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تزايدية على

$[1;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;1]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-5	↗	



إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3

مثال2 لندرس f حيث $f(x)=-x^2+2x+3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=-(x-1)^2+4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=-(x-1)^2+4$ أي $y-4=-(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to -x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y-4=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=-x^2$

تكافئ $Y-4=-(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور

تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه

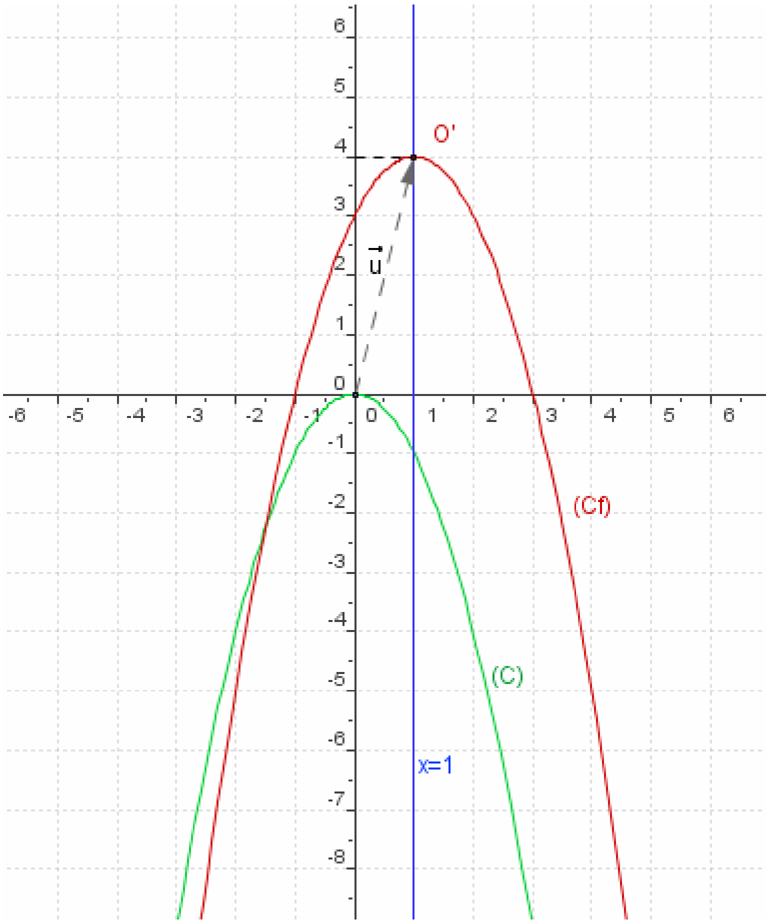
$t(O)=O'$ أي $O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم

ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x\to -x^2$ تناقصية على $[0;+\infty[$

و تزايدية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تناقصية على

$[1;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-1$ أو $x=3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x\to ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ و استنتج طبيعة (C_f)

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

خاصيات

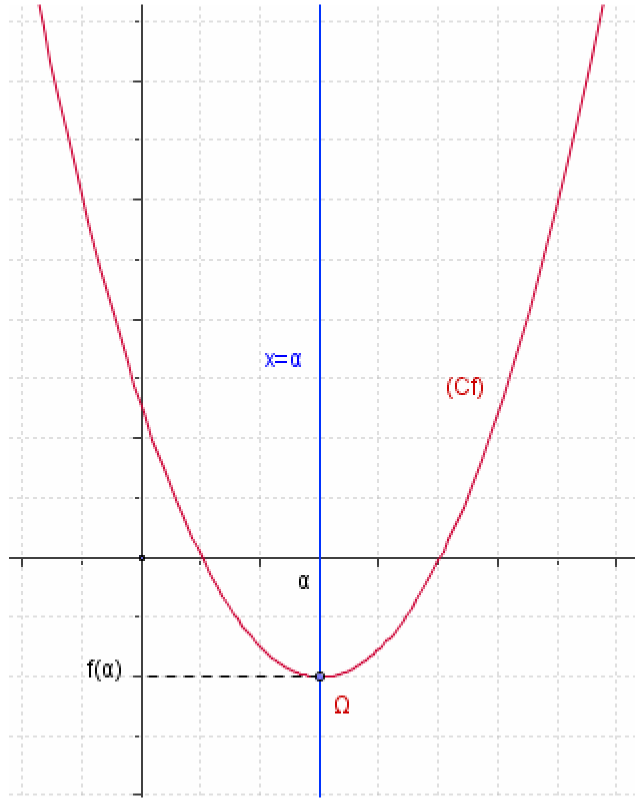
لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

* $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$
* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

نضع $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$

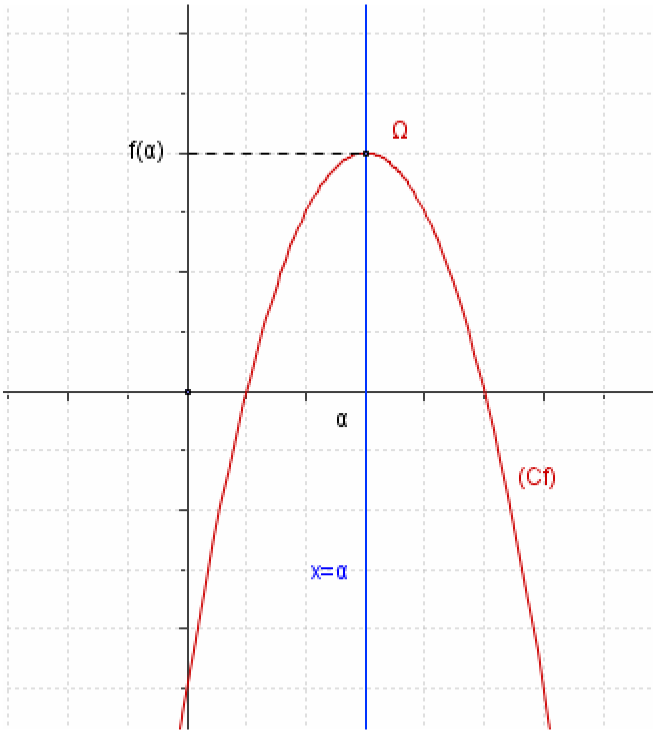
-* إذا كان $a\succ 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$



* إذا كان $a\prec 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$



3- دراسة الدالة $x\to\dfrac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

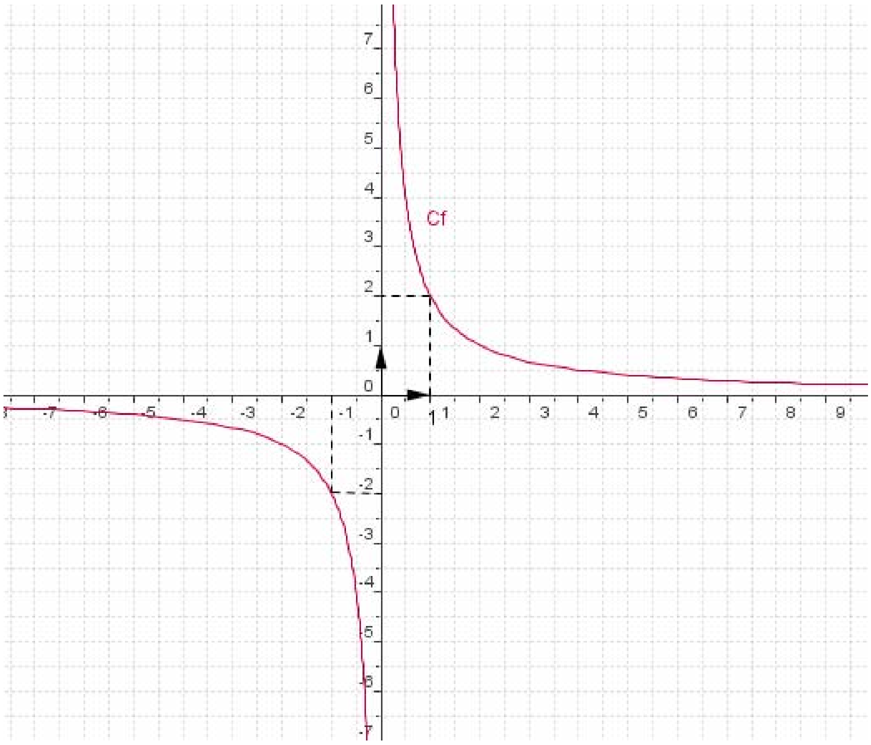
f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\qquad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{-2}{xy}$

لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\qquad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$

إذن f تناقصية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$



ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $\frac{2}{x} \succ 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

فوق المستقيم $(\Delta): y=2$

إذا كان $x \geq 1$ فان $0 \prec \frac{2}{x} \leq 2$

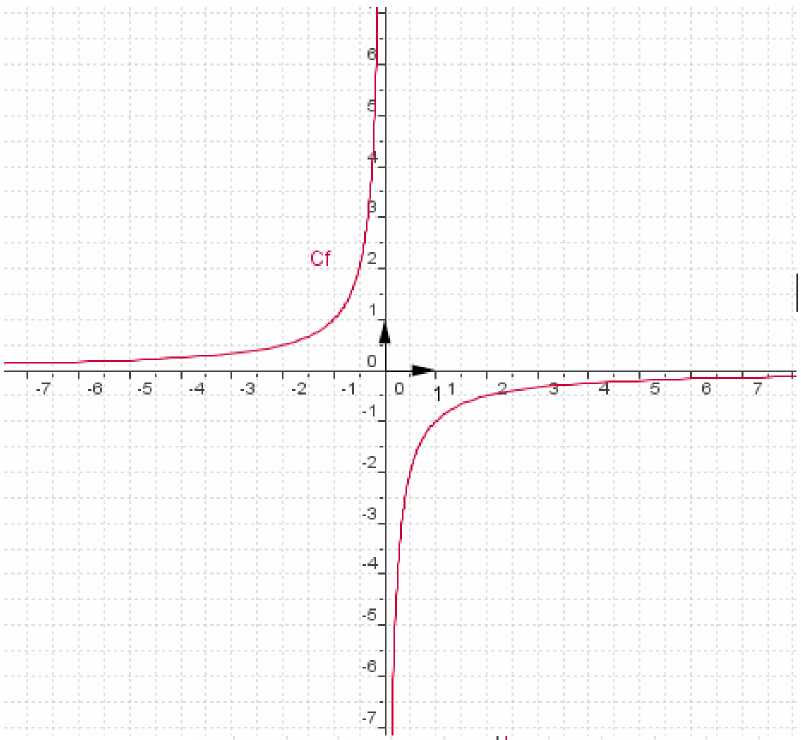
هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta): y=2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	2

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم



* نعتبر الدالة $f(x)=\frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

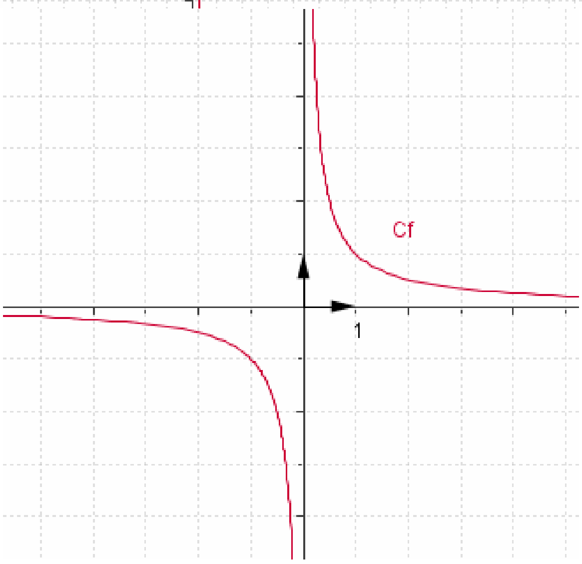
ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{xy}$$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

C_f هدلول مركزه O و مقارباه
محورا المعلم



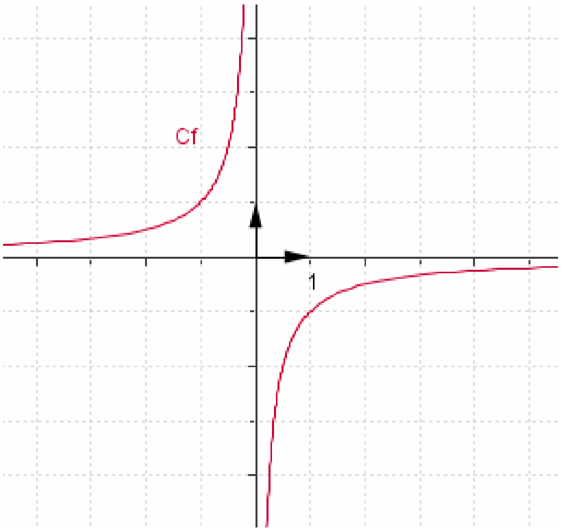
ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x)=\frac{a}{x}$

إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم



إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

C_f هذلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

4 - دراسة الدالة $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

*- $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ أي $y - 2 = \frac{3}{x-1}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to \frac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X - 1 = x \\ Y - 2 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = \frac{3}{x}$ تكافئ $Y - 2 = \frac{3}{X-1}$ تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه $t(O) = O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 1$ و $y = 2$

و حيث أن الدالة $x \to \frac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]-\infty;1]$

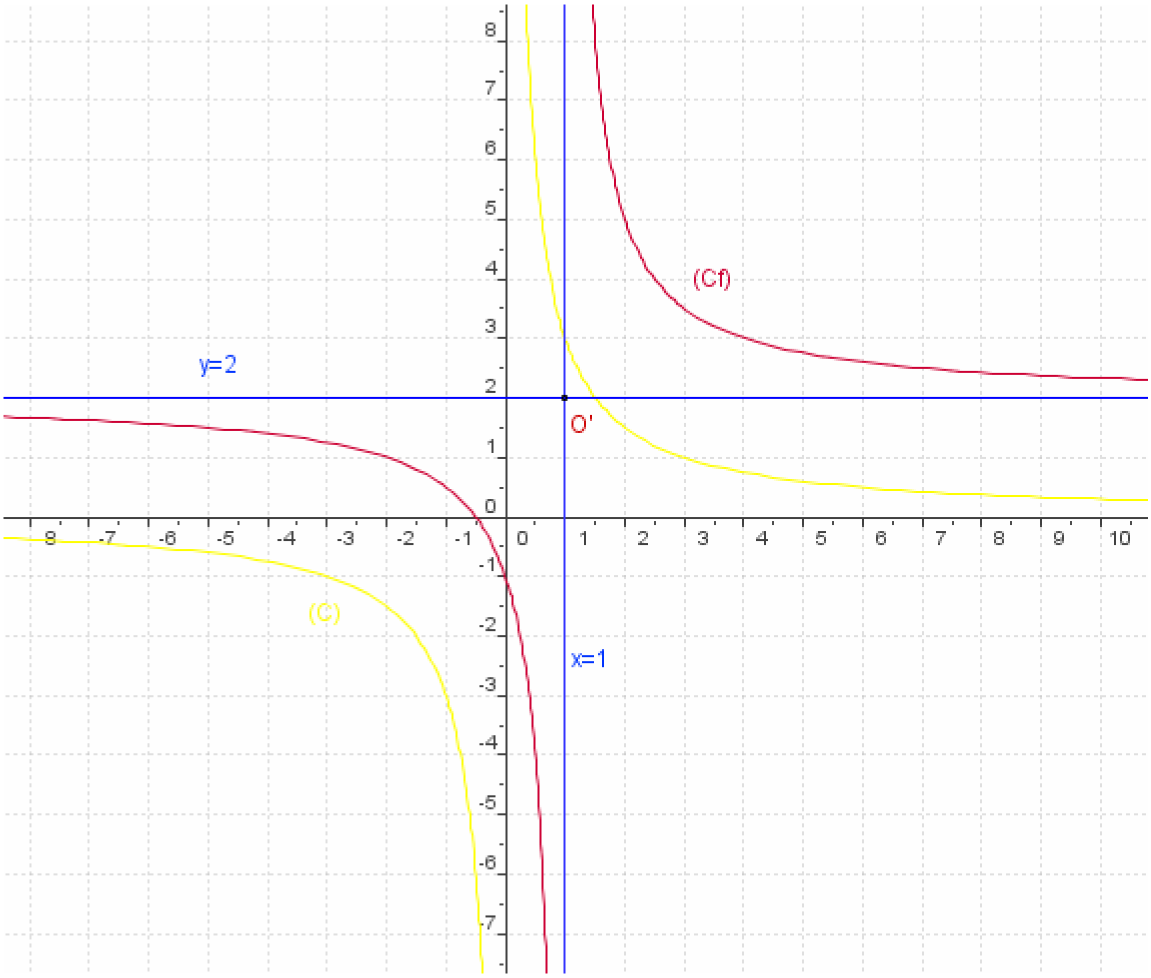
جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -\frac{1}{2}$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\frac{11}{4}$



مثال 2 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

*- $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x)=2+\frac{-1}{x+2}$$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\dfrac{-1}{x+2}$ أي $y-2=\dfrac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\rightarrow\dfrac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X+2=x\\Y-2=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\dfrac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\dfrac{-1}{X+2}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

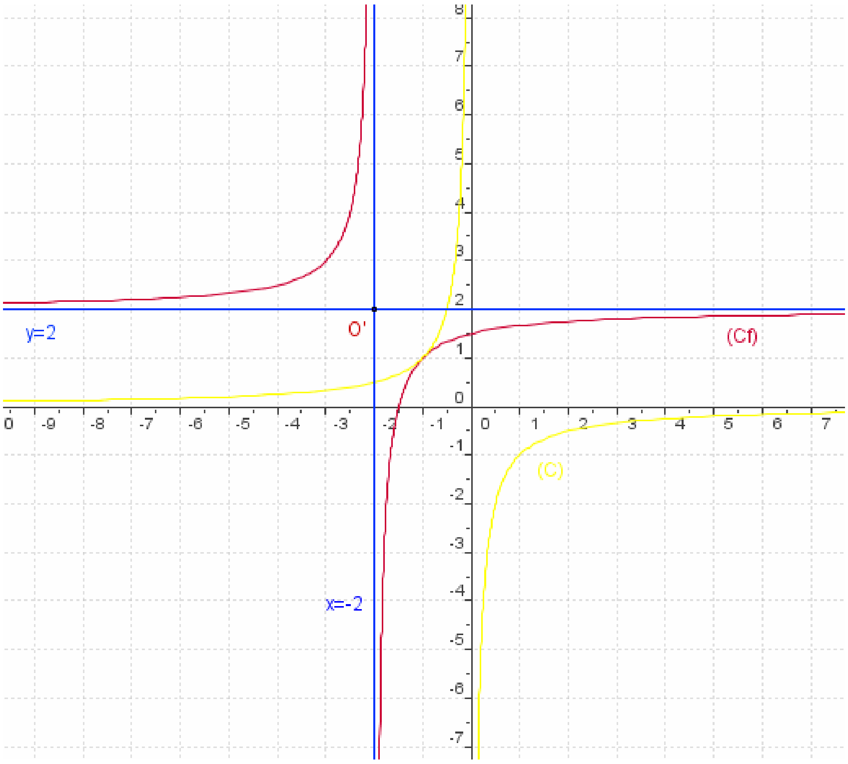
إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O)=O'$ أي $O'(-2;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-2$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x\rightarrow\dfrac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تزايدية على

كل من $]-\infty;-2[$ و $]-\infty;-2]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
f	↗ ‖ ↗

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-\dfrac{3}{2}$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

الحالة العامة $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \dfrac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

و استنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

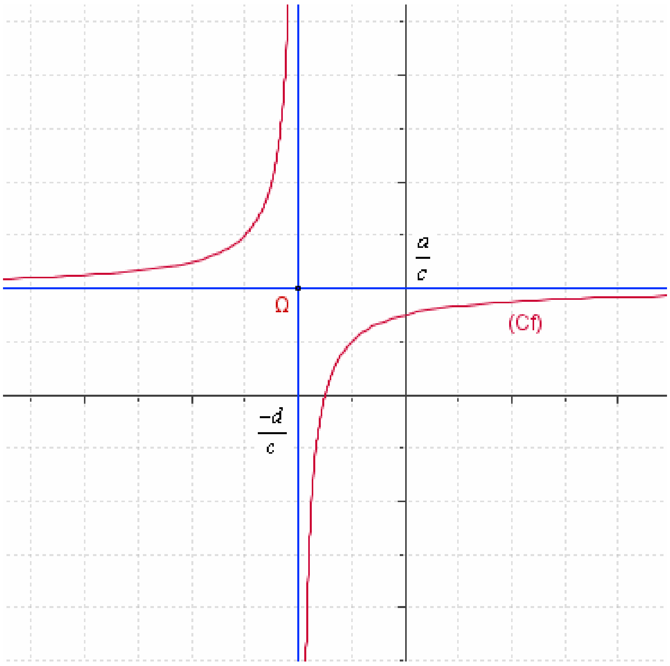
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \dfrac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\dfrac{-d}{c}$ و $\beta=\dfrac{a}{c}$

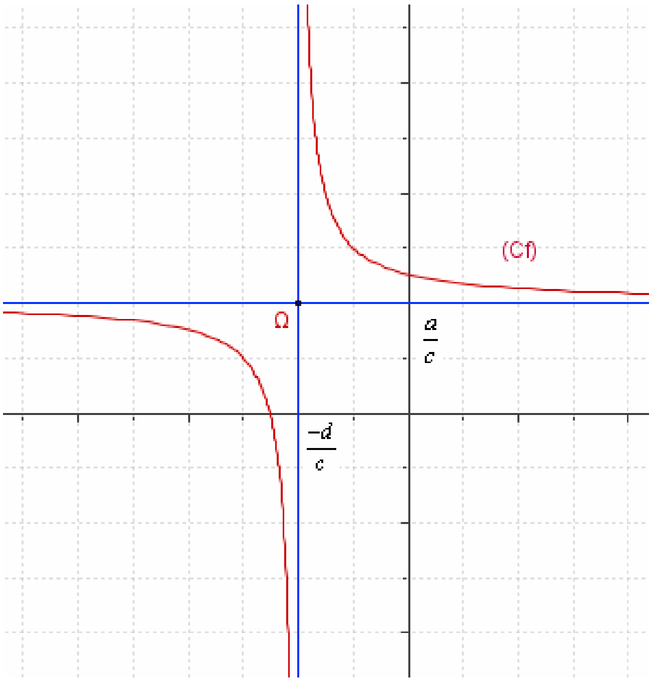
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$



5- دالة الجيب $\sin$ - دالة جيب التمام $\cos$

أ/ دالة الجيب $\sin$

تعريف

الدالة $\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$
نكتب $\sin : x \to \sin x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ نقول ان الدالة $\sin$ فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$
ومنه $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ نقول ان الدالة $\sin$ دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

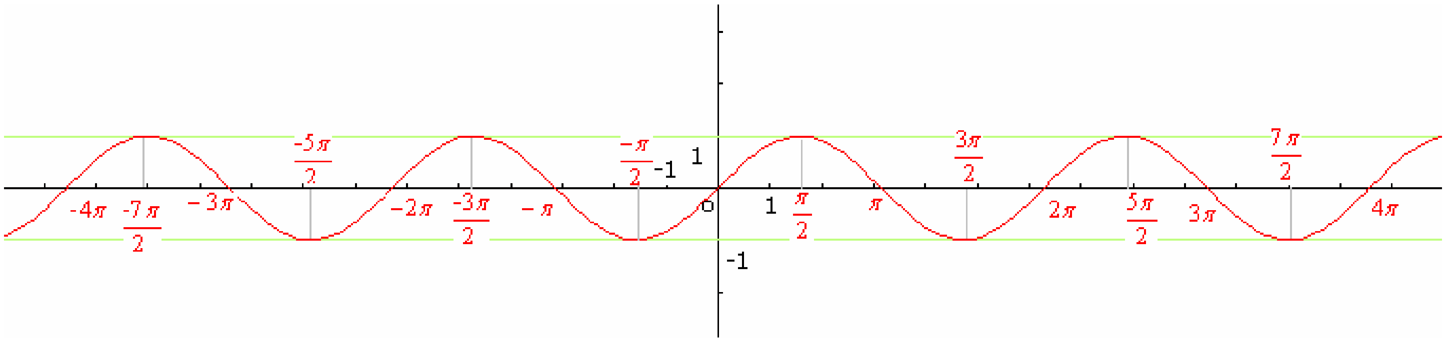
نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$
لتكن $M(x;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$
و حيث $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$
و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى
في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

sin فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم

يكفي تمثيل المنحنى $\left(C_{\sin}\right)$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $\left(C_{\sin}\right)$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة sin



ب/ دالة جيب التمام cos

تعريف

الدالة $\cos\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$

نكتب $\cos : x \to \cos x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$ نقول إن الدالة cos زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

ومنه $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ نقول إن الدالة cos دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

لتكن $M(x;\cos x)$ نقطة من المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$

و حيث $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

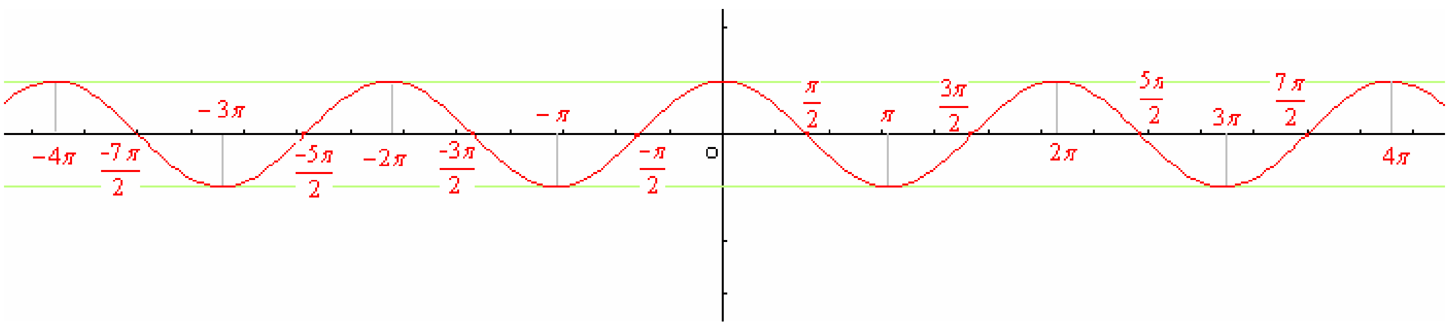
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$ على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

cos زوجية و منه المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتيب

يكفي تمثيل المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $\left(C_{\cos}\right)$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة cos



تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3- أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب

$f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $-2x+1\neq 0$ تكافئ $\quad$ $x\neq\dfrac{1}{2}$ $\quad$ إذن $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تغيرات f $\quad a=1 \quad \dfrac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

جدول تغيرات g $\quad$ لدينا $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

3- أ - نتمم الجدول

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

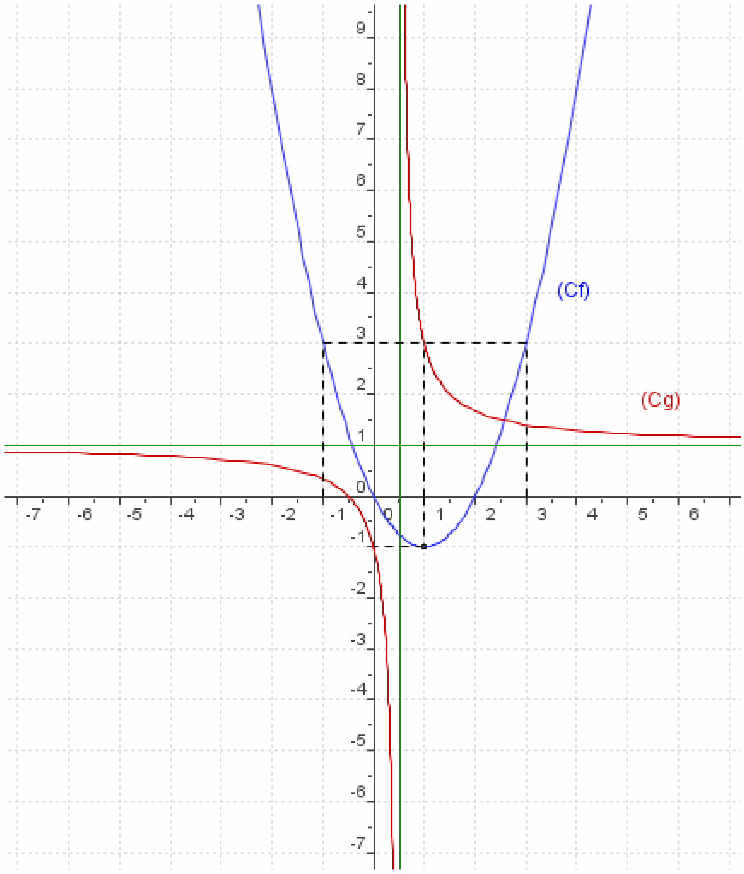
ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=2$$

إذن C_f يقطع محو الافاصيل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



تمرين2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$g(x)=x^2-3|x| \qquad f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- أعط جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5 - أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

الجواب

$$g(x)=x^2-3|x| \qquad f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $x-1\neq 0$

تكافئ $x\neq 1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

$$f(2)=\frac{4-1}{2-1}=3 \quad ; \quad g(2)=4-6=-2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad ; \quad g(4)=16-12=4$$

2- نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$

3- أ- ندرس زوجية g

لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}$

$$g(-x)=(-x)^2-3|-x|=x^2-3|x|=g(x)$$

g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا $g(x)=x^2-3x$ لكل x من $[0;+\infty[$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=0 \qquad \frac{-b}{2a}=\frac{3}{2}$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x\to x^2-3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

اذن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right]$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g		$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

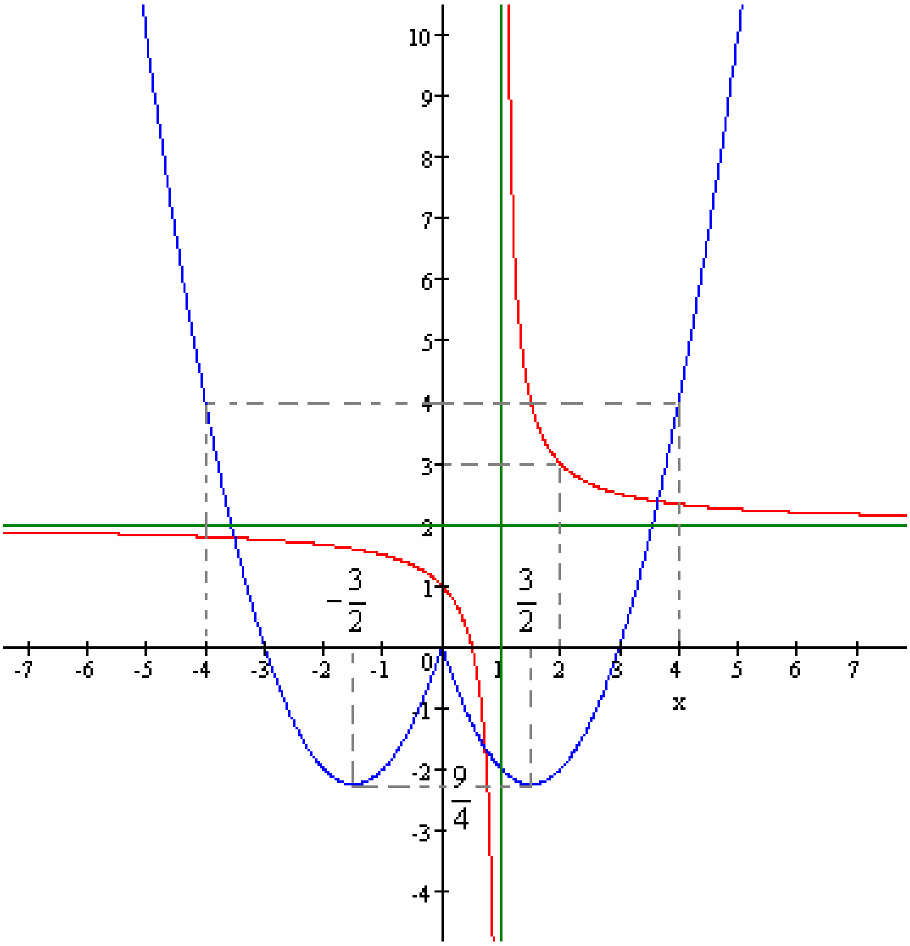
بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

ليكن $x\in\mathbb{R}^+$: $\quad g(x)=0$ تكافئ $x^2-3x=0$

تكافئ $x=0$ أو $x=3$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و -3 على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x)=g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

$x^2-3|x|\geq 0$ تكافئ $g(x)\geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

إذن $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

تمرين3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=x^2-x \qquad\qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

-3 أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

-2 أ- أعط جدول تغيرات f

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

-3 أ- بين أن g دالة زوجية

ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

4- أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

الجواب

$$f(x)=x^2-x \qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

4- أ- نحدد D_g

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_g$ تكافئ $|x|-1\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_g=\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(2)=2^2-2=4-2=2 \quad ; \quad g(2)=\frac{2\times 2-1}{2-1}=3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4} \quad ; \quad g(0)=\frac{2\times 0-1}{0-1}=1 \quad ; \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=0$$

2- أ- نعطي جدول تغيرات f

لدينا $f(x)=x^2-x$ أي $a=1$ و $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$

ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{2}$

3- أ- نبين أن g دالة زوجية

لكل $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ $\qquad g(-x)=\frac{2|-x|-1}{|-x|-1}=\frac{2|x|-1}{|x|-1}=g(x)$

إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها

لكل x من $[0;1[\cup]1;+\infty[$: $|x|=x$ ومنه $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

و حيث $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\prec 0$ فان g تناقصية على كل من $]1;+\infty[$ و $[0;1[$

و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

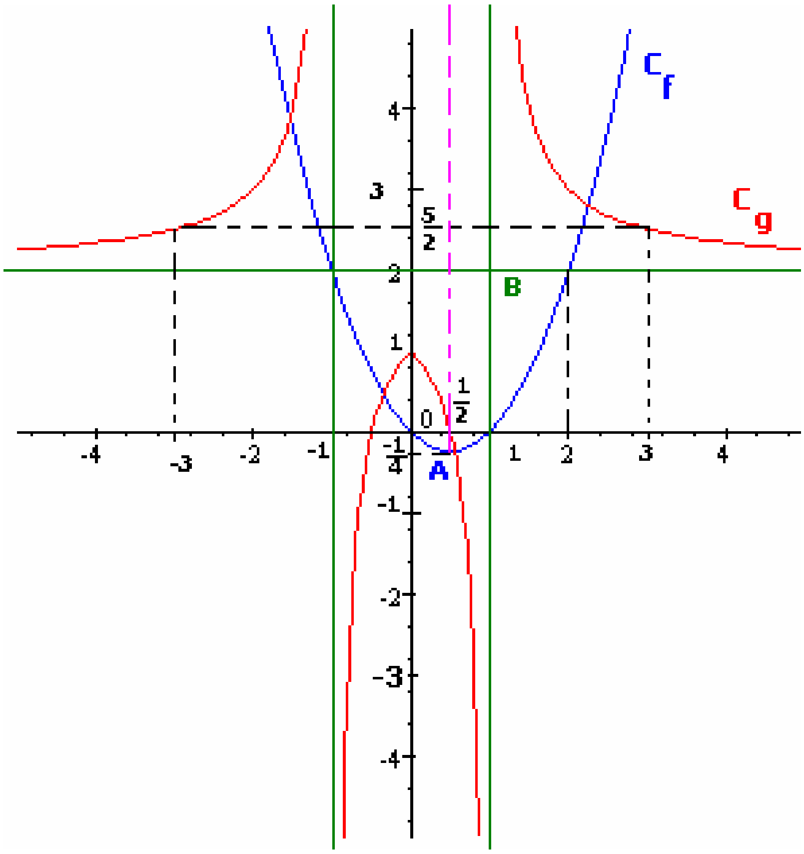
4- أ- ننشئ C_f و C_g

بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

جزئ منحنى C_g على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقارباه

$(\Delta_1): y=2 \quad (\Delta_2): x=1$

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلا ل التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل أربعة حلول