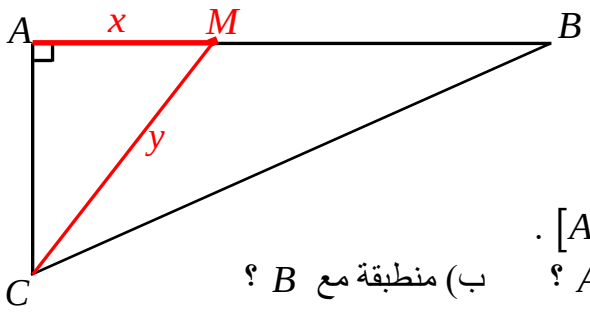
عموميات حول الدوال العددية

1) دالة عددية لمتغير حقيقي ومجموعة تعريفها :

نشاط :



نعتبر مثلثا ABC قائم الزاوية في A بحيث : $AB=8$ و $AC=3$ و M نقطة من القطعة $[AB]$

نضع $x=AM$ و $y=CM$

1) حدد تعبير y بدلالة x .

2) احسب قيمة y إذا كانت النقطة M منتصف القطعة $[AB]$.

3) ما هي قيمة y عندما تكون النقطة M : أ) منطبقة مع A ؟ ب) منطبقة مع B ؟

4) ماهي مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها العدد x ؟

تعريف :

كل علاقة f تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بعنصر على الأكثر y من $\mathbb{R}$ تسمى دالة عددية للمتغير الحقيقي x .

العدد y (إن وُجد) يسمى صورة العدد x بالدالة f ونرمز له بالرمز $f(x)$ والعدد x يسمى سابق للعدد y بالدالة f .

الأعداد الحقيقية x التي لها صورة بالدالة f تُكون مجموعة تسمى مجموعة تعريف الدالة f ونرمز لها بالرمز D_f .

أي : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\in\mathbb{R}\}$

مثال :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2-3x$ ، أحسب $f(2)$ ، $f(-1)$ و $f(0)$.

ملاحظة :

لتكن P حدودية ،

الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=P(x)$ تسمى دالة حدودية ومجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f في كل حالة من الحالات التالية ثم أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ و $f(9)$ إذا أمكن :

$f(x)=x^2-3x+1$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $f(x)=\dfrac{12}{x-3}$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\sqrt{x-5}$

2) التمثيل المبياني لدالة عددية :

تعريف :

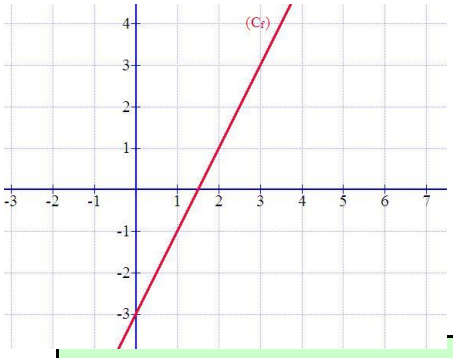
لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها و $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ معلما في المستوى .

مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث $x\in D_f$ و $y=f(x)$ تسمى التمثيل المبياني للدالة f ، أو منحنى الدالة f في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ ، ونرمز له عادة بالرمز : (C_f) ، $(C_f)=\{M(x;f(x))\ /\ x\in D_f\}$

مثال :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x-3$ ، جدول بعض القيم وصورها بالدالة f :

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3



3) تساوي دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعتي تعريفيهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان : $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ لكل x من D_f

أمثلة :

1) بين أن : $f = g$ حيث : $f(x)=1+\sqrt{x^2}$ و $g(x)=1+|x|$

2) هل f تساوي g حيث : $f(x)=\sqrt{1+x}\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ ؟ (علل جوابك)

3) هل f تساوي g حيث : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ ؟ (علل جوابك)

4) الدالة الزوجية ـ الدالة الفردية – التأويل المبياني :

أ) تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها .

نقول إن الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

نقول إن الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$

أمثلة :

أدرس زوجية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=2x^3$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $f(x)=2x+1$

ملاحظة :

- إذا كانت f دالة عددية غير زوجية فهذا لا يعني بالضرورة أنها فردية .
- إذا كانت f دالة عددية غير فردية فهذا لا يعني بالضرورة أنها زوجية.
- نعبر أيضا عن الشرط « لكل x من D_f : $(-x)\in D_f$ » بقولنا «مجموعة التعريف متماثلة بالنسبة لـ 0 »

ب- التأويل المبياني لزوجية دالة :

خاصية :

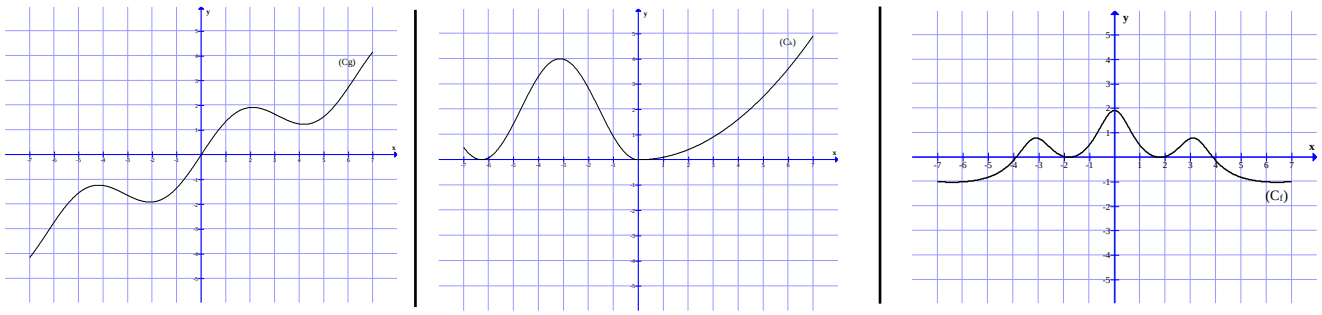
لتكن f دالة عددية و (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i};\vec{j})$.

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

أمثلة :

حدد مبيانيا زوجية الدوال f ، g و h الممثلة أسفله :



5) تغيرات دالة عددية :

أ) منحى تغيرات دالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .

- تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x\le y$ لدينا : $f(x)\le f(y)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x<y$ لدينا : $f(x)<f(y)$
- تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x\le y$ لدينا : $f(x)\ge f(y)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x<y$ لدينا : $f(x)>f(y)$
- تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I لدينا : $f(x)=f(y)$

مثال :

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=3x-2$ ، بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
2) لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=-2x+1$ ، بين أن g تناقصية على $\mathbb{R}$.
2) لتكن h الدالة العددية المعرفة كما يلي : $h(x)=4$ ، بين أن h ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب) الدالة الرتيبة :

تعريف :

نقول إن f رتيبة على مجال I إذا كانت إما تزايدية وإما تناقصية على المجال I.
نقول إن f رتيبة قطعا على مجال I إذا كانت إما تزايدية قطعا وإما تناقصية قطعا على المجال I.

ملاحظة :

دراسة رتابة أو تغيرات دالة على D_f يعني تحديد مجالات I ضمن D_f بحيث تكون f رتيبة أو رتيبة قطعا على I.
بعد دراسة رتابة دالة عددية f على مجموعة تعريفها D_f يتم تلخيص النتائج في جدول يسمى جدول تغيرات الدالة f.

مثال :

بين أن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2$ تزايدية على $\mathbb{R}^+$ وتناقصية على $\mathbb{R}^-$ ثم ضع جدول تغيراتها .

ج) معدل التغير ورتابة دالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و x و y من D_f بحيث $x \neq y$.
العدد الحقيقي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y ونرمز له بالرمز $T(x;y)$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .
إذا كان لكل x و y من I بحيث $x \neq y$:
$T(x;y) \geq 0$ فإن f تزايدية على I.
$T(x;y) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I.
$T(x;y) \leq 0$ فإن f تناقصية على I.
$T(x;y) < 0$ فإن f تناقصية قطعا على I.
$T(x;y) = 0$ فإن f ثابتة على I.

أمثلة :

أدرس رتابة الدالة f على D_f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x+1$
2) $f(x)=-5x+4$
3) $f(x)=3$
4) $f(x)=\sqrt{x}$

د) الرتابة وزوجية دالة :

خاصية :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة لصفر،
وليكن I مجالا ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و I' مماثل I بالنسبة لصفر.
* إذا كانت f دالة زوجية فإن :
f تزايدية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (قطعا) على I'
f تناقصية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (قطعا) على I'
* إذا كانت f دالة فردية فإن :
f تزايدية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (قطعا) على I'
f تناقصية (قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (قطعا) على I'

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^4-2x^2$.

1) بين أن f دالة زوجية .
2) أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0;1]$ و $]1;+\infty[$
3) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

6) القيم القصوى – القيم الدنيا لدالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها ، وليكن $x_0 \in I$.
- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة القصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان : $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من I .
- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة الدنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان : $f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من I .
- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو مطراف للدالة f إذا كان $f(x_0)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f على I .

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=1+\dfrac{x}{x^2+1}$

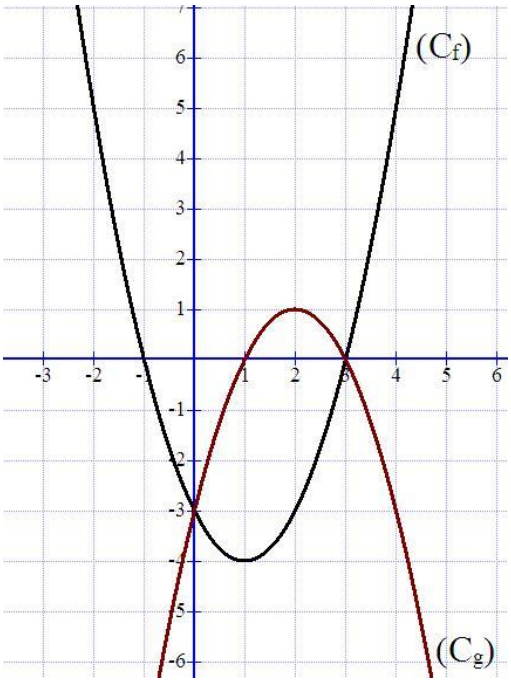
1) تحقق من أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.
2) بين أن $f(1)$ هي القيمة القصوى لـ f على $\mathbb{R}$.
3) بين أن $f(-1)$ هي القيمة الدنيا لـ f على $\mathbb{R}$.

ملاحظة :

- إذا كانت f دالة عددية تزايدية على مجال $[a;\alpha]$ وتناقصية على مجال $[\alpha;b]$ حيث $a<\alpha<b$ فإن $f(\alpha)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[a;b]$.
- إذا كانت f دالة عددية تناقصية على مجال $[a;\alpha]$ وتزايدية على مجال $[\alpha;b]$ حيث $a<\alpha<b$ فإن $f(\alpha)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[a;b]$.

7) حل بعض المعادلات مبيانيا :

لتكن f و g دالتين عدديتين منحنييهما على التوالي هما (C_f) و (C_g) ، و I مجالا ضمن مجموعتي تعريفهما ، و a عددا حقيقيا .
- حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال I ، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع (C_g) على المجال I.
- حلول المعادلة $f(x)=a$ على المجال I ، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=a$ على المجال I.



تمرين تطبيقي :

لتكن f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ الممثلتين جانبه :
1) حدد مبيانيا : $f(-1)$ و $g(4)$.
2) حدد مبيانيا الأعداد التي صورتها بالدالة f هي 5 .
3) حدد مبيانيا مطاريف الدالتين f و g .
4) من خلال التمثيل المبياني ضع جدولي تغيرات f و g .
5) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :
$f(x)=g(x)$ ، $f(x)=5$ و $g(x)=-3$.
6) ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$.

8) التمثيل المبياني للدالتين sin و cos :

1) دراسة الدالة sin :

أ) تعريف :

الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$ تسمى دالة الجيب ونرمز لها بـ sin ومجموعة تعريفها هي : $\mathbb{R}$

ملاحظة :

نعلم أنه لكل عدد x من $\mathbb{R}$ ولكل عدد k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\sin(x+2k\pi)=\sin x$

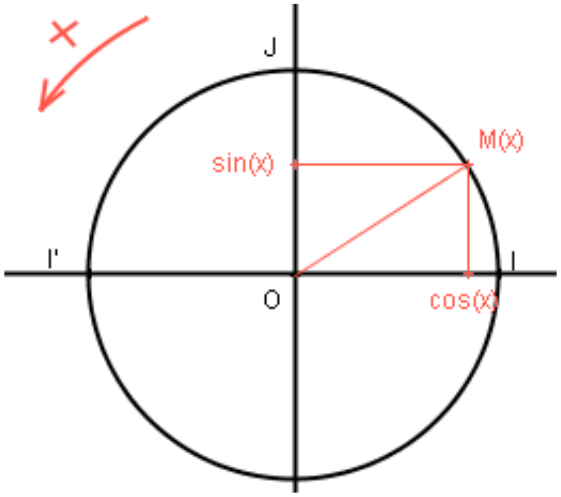
إذن لدراسة الدالة sin على $\mathbb{R}$ يكفي دراستها على المجال $]-\pi;\pi]$.

من جهة أخرى لدينا لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $\sin(-x)=-\sin x$ ، أي أن الدالة sin فردية ،

إذن يكفي دراسة الدالة sin على المجال $[0;\pi]$.

ب) تغيرات الدالة sin :

لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I و $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $I'(\pi)$ و $M(x)$ نقط منها حيث $0\le x\le\pi$.



- عندما تتحرك النقطة M من I إلى J

(أي عندما يتغير x من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$)

فإننا نلاحظ أن قيمة $\sin x$ تزداد من 0 إلى 1

إذن الدالة sin تزايدية على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

- عندما تتحرك النقطة M من J إلى I'

(أي عندما يتغير x من $\frac{\pi}{2}$ إلى π)

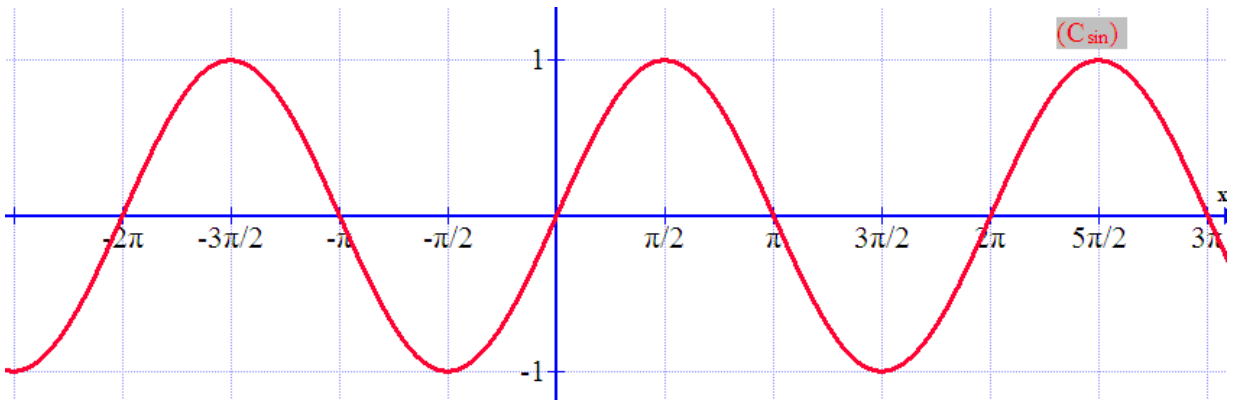
فإننا نلاحظ أن قيمة $\sin x$ في تراجع من 1 إلى 0

إذن الدالة sin تناقصية على $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ وبما أنها فردية ،

فإن جدول تغيراتها على المجال $[-\pi;\pi]$ هو :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

ج) منحنى الدالة sin على $\mathbb{R}$:



2) دراسة الدالة cos :

أ) تعريف :

الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$ تسمى دالة الجيب تمام ونرمز لها بـ cos ومجموعة

تعريفها هي : $\mathbb{R}$

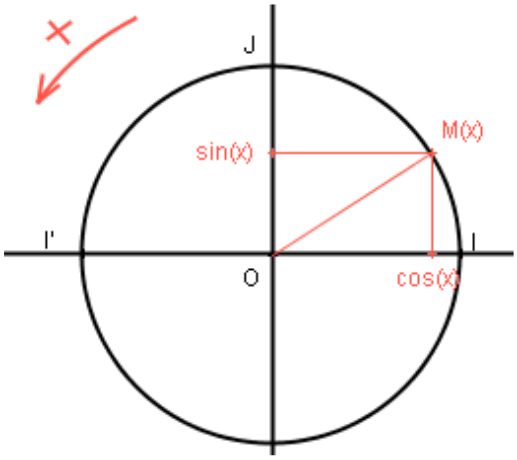
ملاحظة :

نعلم أنه لكل عدد x من $\mathbb{R}$ ولكل عدد k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\cos(x+2k\pi)=\cos x$

إذن لدراسة الدالة cos على $\mathbb{R}$ يكفي دراستها على المجال $]-\pi;\pi]$.

من جهة أخرى لدينا لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $\cos(-x)=\cos x$ ، أي أن الدالة cos زوجية ،

إذن يكفي دراسة الدالة cos على المجال $[0;\pi]$.



ب) تغيرات الدالة cos :

لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I ،

و $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $I'(\pi)$ و $M(x)$ نقط منها حيث $0\le x\le\pi$.

- عندما تتحرك النقطة M من I إلى I' في المنحى الموجب

(أي عندما يتغير x من 0 إلى π)

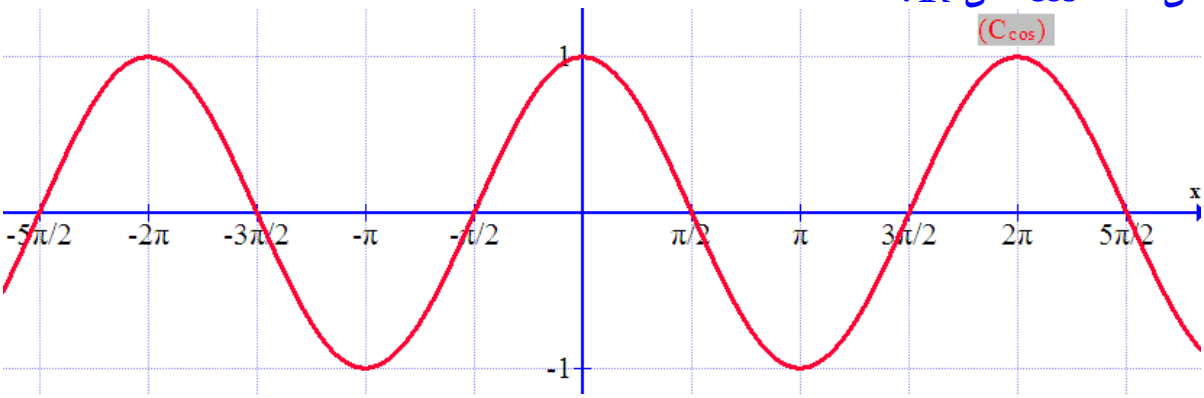
فإننا نلاحظ أن قيمة $\cos x$ في تراجع من 1 إلى -1

إذن الدالة cos تناقصية على المجال $[0;\pi]$ وبما أنها زوجية ،

فإن جدول تغيراتها على المجال $]-\pi;\pi]$ هو :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

ج) منحنى الدالة cos على $\mathbb{R}$:



9) الشلجم والهذلول :

أ) التمثيل المبياني وتغيرات الدالة $x\mapsto ax^2$ حيث $(a\neq 0)$:

نشاط :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=x^2$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$

1) تحقق أن الدالتين f و g زوجيتين .

2) أعط جدول تغيرات كل من الدالتين f و g .

3) أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتين f و g على التوالي .

تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدما ، و $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما في المستوى .

التمثيل المبياني للدالة $x\mapsto ax^2$ يسمى شلجما رأسه O ومحوره هو محور الأراتيب .

ب) التمثيل المبياني وتغيرات الدالة $x \mapsto ax^2+bx+c$ حيث $(a \neq 0)$:

نشاط :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2+2x-2$

1) تحقق أن $f(x)=(x+1)^2-3$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2) أملأ الجدول التالي :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

3) نعتبر النقطة $\Omega(-1;-3)$ والمستقيم $(\Delta): x=-1$ ،

أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم النقطة Ω والمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

4) استنتج مبيانيا تغيرات الدالة f ومطارفها ، ماذا تلاحظ عن (C_f) بالنسبة لمنحنى الدالة $x \mapsto x^2$ ؟

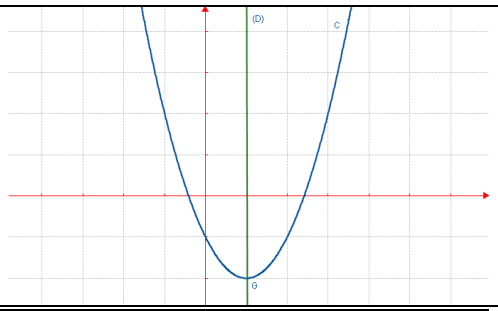
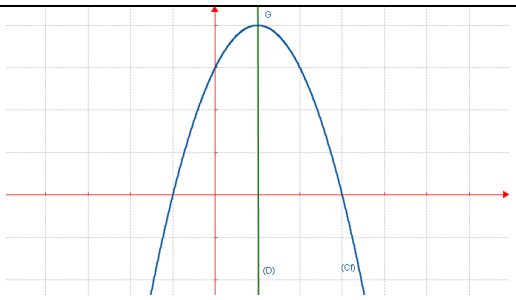
بصفة عامة :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a \neq 0$ ،

يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل القانوني : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني للدالة f في معلم م م هو شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ ومحوره المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{-b}{2a}$

موجه نحو الاعلى إذا كان $a>0$ وموجه نحو الأسفل إذا كان $a<0$.

	$a>0$	$a<0$
التمثيل المبياني (C_f)		
جدول التغيرات	x : $-\infty$ ، $\frac{-b}{2a}$ ، $+\infty$ $f(x)$: ↘ ↗	x : $-\infty$ ، $\frac{-b}{2a}$ ، $+\infty$ $f(x)$: ↗ ↘

إذا كان $a>0$ فإن $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ قيمة دنيا للدالة f وتأخذها عند العدد $\frac{-b}{2a}$.

إذا كان $a<0$ فإن $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ قيمة قصوى للدالة f وتأخذها عند العدد $\frac{-b}{2a}$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=-x^2+2x+3$ و (C_f) منحناها في معلم م م .

1) أكتب $f(x)$ على الشكل القانوني ثم استنتج طبيعة (C_f) وعناصره المميزة .

2) أنشئ (C_f) ثم استنتج مبيانيا تغيرات ثم مطاريف الدالة f.

ج) التمثيل المبياني وتغيرات الدالة : $x \mapsto \frac{a}{x}$ حيث $(a \neq 0)$:

نشاط :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=\frac{2}{x}$ و $g(x)=\frac{-1}{x}$

1) حدد D_f و D_g مجموعتي تعريف الدالتين f و g .

2) تحقق أن الدالتين f و g فرديتين .

3) أعط جدول تغيرات كل من الدالتين f و g .

4) أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتين f و g على التوالي .

تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدما ، و $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما في المستوى .

التمثيل المبياني للدالة $x\mapsto\frac{a}{x}$ يسمى هذلولا مركزه O ومقارباه هما محوري المعلم .

د) التمثيل المبياني وتغيرات الدالة $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $(a,b)\neq(0;0)\ ;c\neq0\ ;ad-bc\neq0$:

نشاط :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2) تحقق أن $f(x)=\frac{1}{x-1}-2$ لكل x من D_f .

3) أملأ الجدول التالي :

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$									

4) أنشئ في معلم متعامد ممنظم النقطة $\Omega(1;-2)$ والمستقيمين $(D):x=1$ و $(\Delta):y=-2$ والمنحنى (C_f) .

5) استنتج مبيانيا تغيرات الدالة f ،

- ماذا تلاحظ عن (C_f) بالنسبة لمنحنى الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ ؟

بصفة عامة :

الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

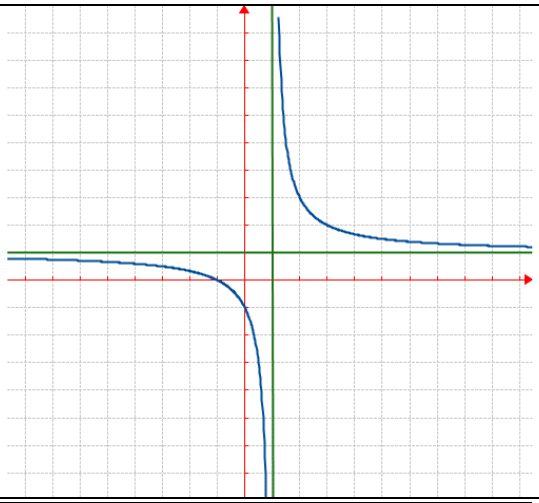
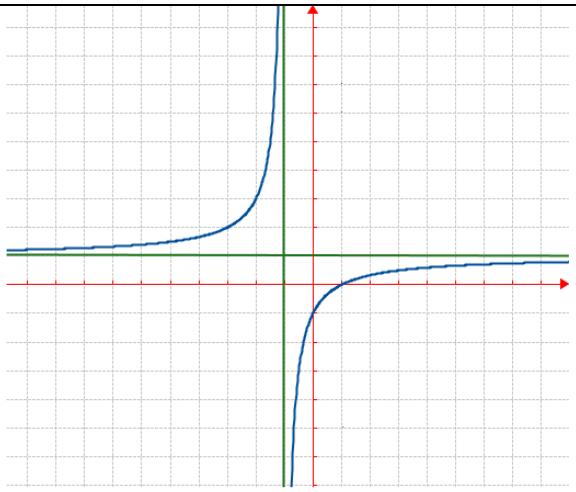
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0\ ;c\neq0\ ;(a,b)\neq(0;0)$ ، تسمى **دالة متخاطة** .

التمثيل المبياني للدالة f في معلم م م عبارة عن هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$ ويقترب من المستقيمين (D) و (Δ)

دون أن يقطعهما حيث $(\Delta):x=\frac{-d}{c}$ و $(D):y=\frac{a}{c}$.

هذان المستقيمان يسميان مقاربا المنحنى (C_f) .

$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}>0$	$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}<0$

التمثيل المبياني (C_f)		
جدول التغيرات	x : $-\infty$; $\frac{-d}{c}$; $+\infty$ $f(x)$: ↘ ; ↘	x : $-\infty$; $\frac{-d}{c}$; $+\infty$ $f(x)$: ↗ ; ↗

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و (C_f) منحناها في معلم م م .

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) حدد طبيعة (C_f) وعناصره المميزة .

3) أنشئ (C_f) .

4) استنتج مبيانيا تغيرات الدالة f.