Exercice 1 (7 points)

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = \dfrac{2x-1}{5x^2+8x-4}$; $f(x) = \sqrt{5x^2+8x-4}$; $f(x) = \dfrac{7x^2+2}{2\cos^2(x)-1}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{5x^2+8x-4}}$

$f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$; $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{|3x-6|-4}$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+x-12} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Exercice 2 (4,5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2) Montrer que la fonction f est paire.
3) a. Soient a et b de $[0;1[\cup]1;+\infty[$ tels que : $a \neq b$. Montrer que :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{(a-1)(b-1)-1}{(a-1)(b-1)} = 1 - \frac{1}{(a-1)(b-1)}$$

   b. Montrer que : f est décroissante sur $[0;1[$ et $]1;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

4) Déduire une comparaison de $f\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$ (sans calcul).

Exercice 3 (5,5 points)

Les questions I et II sont indépendantes.

I. Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = \sin\left(\dfrac{6\pi}{16}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{16}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{16}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{8}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
2. $F = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{9\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

II. Soit $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose : $A(x) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(\pi-x) - 5\sin(\pi-x)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) + 2$

1) Montrer que : $A(x) = -3 + 2\cos^2(x)$.
2) Montrer que : $A(x) = \dfrac{-1-3\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$.
3) a. Déterminer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sachant que : $A(x) = -\dfrac{3}{2}$.

   b. Déterminer la valeur de x.

Exercice 4 (3 points)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que : $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(5\pi+x) - 1 = (\cos(x)+1)(2\cos(x)-1)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $]-\pi;2\pi[$ l'équation (E) : $(E) : 2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(5\pi+x) - 1 = 0$
3) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;2\pi[$ l'inéquation : $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(5\pi+x) - 1 \geq 0$