الحساب المثلثي (الجزء الثاني)

I- التمثيل المبياني للدالتين sin و cos :

1) دراسة الدالة sin :

أ) تعريف :

الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$ تسمى دالة الجيب ونرمز لها بـ sin ومجموعة تعريفها هي : $\mathbb{R}$

ملاحظة :

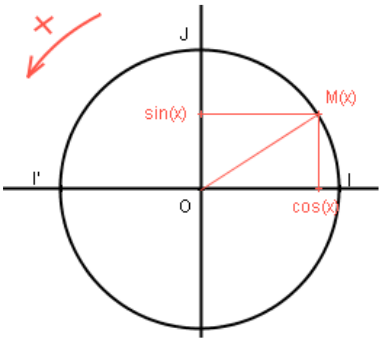
نعلم أنه لكل عدد x من $\mathbb{R}$ ولكل عدد k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\sin(x+2k\pi)=\sin x$

إذن لدراسة الدالة sin على $\mathbb{R}$ يكفي دراستها على المجال $]-\pi;\pi]$.

من جهة أخرى لدينا لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $\sin(-x)=-\sin x$ ، أي أن الدالة sin فردية ،

إذن يكفي دراسة الدالة sin على المجال $[0;\pi]$.

ب) تغيرات الدالة sin :



لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I و J النقطة من (U)

التي تحقق $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، و I' النقطة من (U)

التي تحقق $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OI'}\right)=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

لتكن $M(x)$ نقطة من (U) بحيث $0\le x\le\pi$

- عندما تتحرك النقطة M من I إلى J (أي عندما يتغير x من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$)

فإننا نلاحظ أن $\sin x$ يتزايد من 0 إلى 1 .

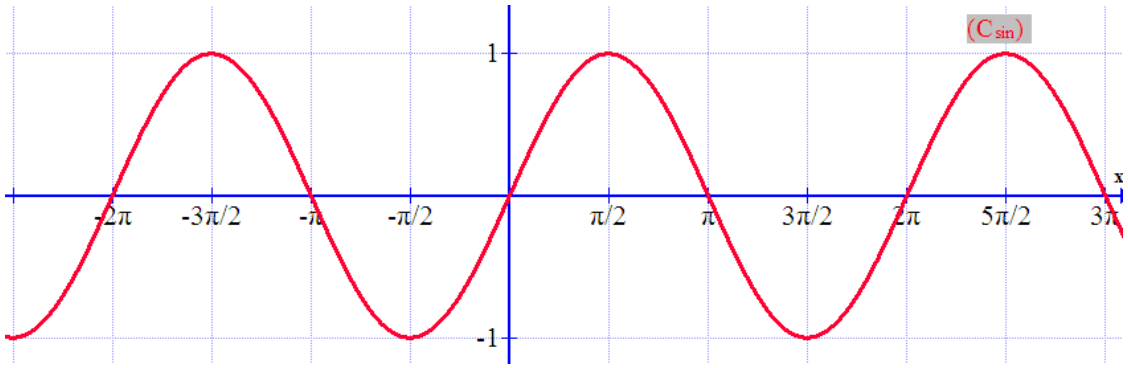
- عندما تتحرك النقطة M من J إلى I' (أي عندما يتغير x من $\frac{\pi}{2}$ إلى π)

فإننا نلاحظ أن $\sin x$ يتناقص من 1 إلى 0 .

إذن جدول تغيرات الدالة sin على المجال $[-\pi;\pi]$ هو :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

ج) منحنى الدالة sin على $\mathbb{R}$:



1) دراسة الدالة cos :

أ) تعريف :

الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$ تسمى دالة الجيب تمام ونرمز لها بـ cos ومجموعة تعريفها هي : $\mathbb{R}$

ملاحظة :

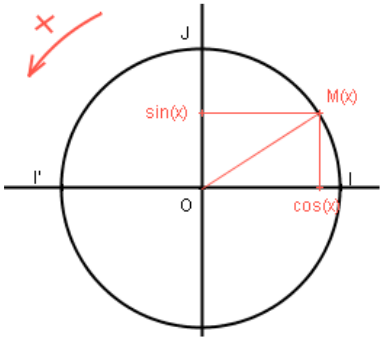
نعلم أنه لكل عدد x من $\mathbb{R}$ ولكل عدد k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\cos(x+2k\pi)=\cos x$

إذن لدراسة الدالة cos على $\mathbb{R}$ يكفي دراستها على المجال $]-\pi;\pi]$.

من جهة أخرى لدينا لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $\cos(-x)=\cos x$ ، أي أن

الدالة cos زوجية ،

إذن يكفي دراسة الدالة cos على المجال $[0;\pi]$.



ب) تغيرات الدالة cos :

لتكن (U) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I و J النقطة من (U)

التي تحقق $\left(\overline{OI};\overline{OJ}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، و I' النقطة من (U)

التي تحقق $\left(\overline{OI};\overline{OI'}\right)=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

لتكن $M(x)$ نقطة من (U) بحيث $0\le x\le\pi$

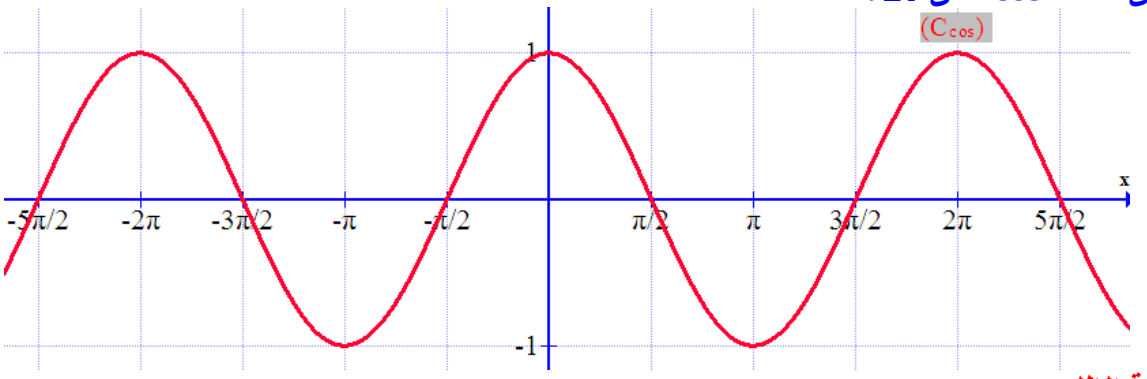
- عندما تتحرك النقطة M من I إلى I' في المنحى الموجب

(أي عندما يتغير x من 0 إلى π) فإننا نلاحظ أن $\cos x$ يتناقص من 1 إلى -1 .

إذن جدول تغيرات الدالة cos على المجال $[-\pi;\pi]$ هو :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

ج) منحنى الدالة cos على $\mathbb{R}$:



II- دالة الظل tan :

تعريف :

ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ،

- العدد الحقيقي $\frac{\sin x}{\cos x}$ يسمى ظل العدد x ونكتب : $\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

- الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بظله تسمى دالة الظل ونرمز لها بـ tan ومجموعة تعريفها هي :

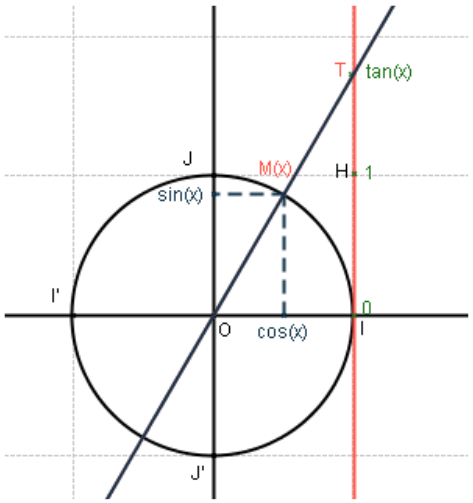
$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

التأويل الهندسي :

لتكن (U) الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ،

ليكن (Δ) المستقيم المماس للدائرة (U) في أصلها النقطة I و H المسقط العمودي للنقطة J على المستقيم (Δ).

نزود المستقيم (Δ) بالمعلم $\left(I;\overrightarrow{IH}\right)$.



ليكن α عددا حقيقيا بحيث $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ،

و M نقطة من (U) أحد أفاصيلها المنحنية هو α .

- لدينا $M(\cos\alpha;\sin\alpha)$ إذن $\overrightarrow{OM}(\cos\alpha;\sin\alpha)$

- بما أن $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، فإن $M \neq J$ و $M \neq J'$

ومنه $\cos\alpha \neq 0$ إذن المستقيم (OM) لا يوازي محور الأراتيب .

إذن للمستقيم (OM) معادلة على شكل $y = ax + b$.

وبما أن $O \in (OM)$ و $M \in (OM)$ فإن $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x$ أي :

$$(OM): y = (\tan\alpha)x$$

لتكن T نقطة تقاطع (OM) مع (Δ) ، لدينا $T(1;\tan\alpha)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ،

إذن $\tan\alpha$ هو أفصول T في المعلم $\left(I;\overrightarrow{IH}\right)$.

خاصيات :

ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا العلاقات التالية :

$\tan(-x) = -\tan(x)$ و $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$ لكل $k \in \mathbb{Z}$ و $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

أمثلة :

1) أملأ الجدول التالي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan(x)$						

2) أحسب الأعداد التالية إذا كان ذلك ممكنا : $\tan\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$ ، $\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)$ ، $\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

III- معادلات ومتراجحات مثلثية أساسية :

1) المعادلات من نوع $\cos(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\cos(x) \geq a$ أو $\cos(x) \leq a$:

أ) معادلة من نوع $\cos(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): \cos(x) = \frac{1}{2}$ ، ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}$ ،

لدينا (Δ) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I =]-\pi;\pi]$ هي $S_I = \left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- لنحدد S_J مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $J = [2\pi;6\pi]$ ،

لدينا $S_J \subset S_{\mathbb{R}}$ ، لنحدد قيم العدد k التي من أجلها $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \in J$ و $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \in J$ ، لدينا :

$\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J \Leftrightarrow 2\pi\le -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le -\frac{1}{3}+2k\le 6 \Leftrightarrow \frac{7}{6}\le k\le \frac{19}{6}$

$\Leftrightarrow k=2 \ ou \ k=3$

وبالتالي : $S_J=\left\{\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{11\pi}{3};\frac{13\pi}{3};\frac{17\pi}{3}\right\}$

$\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J \Leftrightarrow 2\pi\le \frac{\pi}{3}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le \frac{1}{3}+2k\le 6 \Leftrightarrow \frac{5}{6}\le k\le \frac{17}{6}$

$\Leftrightarrow k=1 \ ou \ k=2$

خاصية :

نعتبر المعادلة : (E) : $\cos(x)=a$ ، حيث $a\in\mathbb{R}$ ، ولتكن S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإن $S=\phi$.
- إذا كان $a=1$ فإن $S=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ وإذا كان $a=-1$ فإن $S=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.
- إذا كان $-1<a<1$ فإنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]0;\pi[$ يحقق $\cos(\alpha)=a$ وبالتالي :

$S=\{\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

ب) متراجحة من نوع $\cos(x)\le a$ أو $\cos(x)\ge a$:

مثال :

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\cos(x)\ge\frac{1}{2}$ ، باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\cos(x)\le\frac{1}{2}$ ،

باستغلال إلى الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

2) المعادلات من نوع $\sin(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\sin(x)\ge a$ أو $\sin(x)\le a$:

أ) معادلة من نوع $\sin(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : (E) : $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

لدينا (D) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين N و N' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I=]-\pi;\pi]$ هي $S_I=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

- لنحدد S_J مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $J=[2\pi;6\pi]$ ،

لدينا $S_J\subset S_{\mathbb{R}}$ ، لنحدد قيم العدد k التي من أجلها $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\in J$ و $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\in J$ ، لدينا :

$\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\in J \Leftrightarrow 2\pi\le \frac{\pi}{4}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le \frac{1}{4}+2k\le 6 \Leftrightarrow \frac{7}{8}\le k\le \frac{23}{8} \Leftrightarrow k=1 \ ou \ k=2$

وبالتالي : $S_J=\left\{\frac{9\pi}{4};\frac{11\pi}{4};\frac{17\pi}{4};\frac{19\pi}{4}\right\}$

$\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\in J \Leftrightarrow 2\pi\le \frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le \frac{3}{4}+2k\le 6 \Leftrightarrow \frac{5}{8}\le k\le \frac{21}{8}$

$\Leftrightarrow k=1 \ ou \ k=2$

خاصية :

نعتبر المعادلة : $(E): \sin(x)=a$ ، حيث $a\in\mathbb{R}$ ، ولتكن S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإن $S=\phi$.

- إذا كان $a=1$ فإن $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ وإذا كان $a=-1$ فإن $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

- إذا كان $-1<a<1$ فإنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يحقق $\sin(\alpha)=a$ وبالتالي :

$S=\{\alpha+2k\pi;\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

ب) متراجحة من نوع $\sin(x)\le a$ أو $\sin(x)\ge a$:

مثال :

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\sin(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\sin(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

باستغلال إلى الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

1) المعادلات من نوع $\tan(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\tan(x)\ge a$ أو $\tan(x)\le a$:

أ) معادلة من نوع $\tan(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): \tan(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ،

لدينا (D) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{-5\pi}{6}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I=]-\pi;\pi]$ هي $S_I=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{-5\pi}{6}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي :

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

ب) متراجحة من نوع $\tan(x)\le a$ أو $\tan(x)\ge a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): \tan(x)\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ ،

باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;\frac{-5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$