الحساب المثلثي (الجزء الثاني)

I) المعادلات من نوع $\cos(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\cos(x)\geq a$ أو $\cos(x)\leq a$:

1) معادلة من نوع $\cos(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\cos(x)=\frac{1}{2}$ ، ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}$ ،

لدينا (Δ) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I=]-\pi;\pi]$ هي $S_I=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

- لنحدد S_J مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $J=[2\pi;6\pi]$ ،

لدينا $S_J\subset S_{\mathbb{R}}$ ، لنحدد قيم العدد k التي من أجلها $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J$ و $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J$ ، لدينا :

$$\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J\Leftrightarrow 2\pi\leq-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq 6\pi$$
$$\Leftrightarrow 2\leq-\frac{1}{3}+2k\leq 6\Leftrightarrow\frac{7}{6}\leq k\leq\frac{19}{6}$$
$$\Leftrightarrow k=2\ ou\ \ k=3$$

$$\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\in J\Leftrightarrow 2\pi\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq 6\pi$$
$$\Leftrightarrow 2\leq\frac{1}{3}+2k\leq 6\Leftrightarrow\frac{5}{6}\leq k\leq\frac{17}{6}$$
$$\Leftrightarrow k=1\ ou\ \ k=2$$

وبالتالي : $S_J\left\{\frac{7\pi}{3};\frac{11\pi}{3};\frac{13\pi}{3};\frac{17\pi}{3}\right\}$

خاصية :

نعتبر المعادلة : $(E):\cos(x)=a$ ، حيث $a\in\mathbb{R}$ ، ولتكن S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإن $S=\phi$.
- إذا كان $a=1$ فإن $S=\{2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$ وإذا كان $a=-1$ فإن $S=\{\pi+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.
- إذا كان $-1<a<1$ فإنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]0;\pi[$ يحقق $\cos(\alpha)=a$ وبالتالي :
$S=\{\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) متراجحة من نوع $\cos(x)\leq a$ أو $\cos(x)\geq a$:

مثال :

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$ ، باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\cos(x)\leq\frac{1}{2}$ ،

باستغلال إلى الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

II) المعادلات من نوع $\sin(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\sin(x)\geq a$ أو $\sin(x)\leq a$:

1) معادلة من نوع $\sin(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

لدينا (D) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين N و N' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I=]-\pi;\pi]$ هي $S_I=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

- لنحدد S_J مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $J=[2\pi;6\pi]$ ،

لدينا $S_J\subset S_{\mathbb{R}}$ ، لنحدد قيم العدد k التي من أجلها $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\in J$ و $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\in J$ ، لدينا :

$\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\in J\Leftrightarrow 2\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le\frac{1}{4}+2k\le 6\Leftrightarrow\frac{7}{8}\le k\le\frac{23}{8}\Leftrightarrow k=1\ ou\ \ k=2$

وبالتالي : $S_J\left\{\frac{9\pi}{4};\frac{11\pi}{4};\frac{17\pi}{4};\frac{19\pi}{4}\right\}$

$\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\in J\Leftrightarrow 2\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 6\pi$

$\Leftrightarrow 2\le\frac{3}{4}+2k\le 6\Leftrightarrow\frac{5}{8}\le k\le\frac{21}{8}$

$\Leftrightarrow k=1\ ou\ \ k=2$

خاصية :

نعتبر المعادلة : $(E):\sin(x)=a$ ، حيث $a\in\mathbb{R}$ ، ولتكن S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإن $S=\phi$.

- إذا كان $a=1$ فإن $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ وإذا كان $a=-1$ فإن $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

- إذا كان $-1<a<1$ فإنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يحقق $\sin(\alpha)=a$ وبالتالي :

$S=\{\alpha+2k\pi;\pi-\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) متراجحة من نوع $\sin(x)\le a$ أو $\sin(x)\ge a$:

مثال :

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\sin(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

- لنحل في المجال $I=]-\pi;\pi]$ المتراجحة : $\sin(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

باستغلال إلى الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

III) المعادلات من نوع $\tan(x)=a$ و المتراجحات من نوع $\tan(x)\ge a$ أو $\tan(x)\le a$:

1) معادلة من نوع $\tan(x)=a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\ \tan(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ،

لدينا (D) يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{-5\pi}{6}$ ،

- إذن مجموعة حلول المعادلة (E) على المجال $I=]-\pi;\pi]$ هي $S_I=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{-5\pi}{6}\right\}$

- وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي :

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2) متراجحة من نوع $\tan(x)\le a$ أو $\tan(x)\ge a$:

مثال :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\ \tan(x)\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ ،

باستغلال الدائرة المثلثية لدينا : $S_I=\left]-\pi;\frac{-5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$