**Exercice 01**

On pose $a = 6n + 11,\ b = 2n + 4,\ n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la parité de $a$ et $b$.
2. En déduire la parité de $c = (6n+11)(-1)^b + (2n+4)(-1)^a$.
3. Montrer que $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40.

**Exercice 02**

1. Étudier la parité de $n^2 + 3n + 4$.
2. Développer et réduire $(n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$.
3. En déduire que $n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n$ est un multiple de 4.

**Exercice 03**

1. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$ ?

**Exercice 04**

Soit $n$ un entier naturel impair.

1. Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. En déduire que 16 divise $(n^4 - 1)$.
3. Soient $a, b$ deux entiers naturels impairs. Montrer que 16 divise $a^4 + b^4 - 2$

**Exercice 05**

1. Vérifier que 337 est premier.
2. Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$ en facteurs premiers.
3. En déduire $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$.
4. Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$.

**Exercice 06**

On pose $a = 2160,\ b = 4860$.

1. Décomposer $a$ et $b$ en facteurs premiers.
2. En déduire $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$.
3. Donner la décomposition en facteurs premiers de $a^3 \times b^2$.
4. Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel.
5. Écrire $\dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

**Exercice 07**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = 7^{n+2} - 7^n,\ b = 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^n$.

1. Montrer que $a$ est multiple de 3 et $b$ multiple de 13.
2. Décomposer $a$ et $b$ en facteurs premiers.
3. En déduire $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$.

**Exercice 08**

1. Vérifier que $\dfrac{n+7}{n+1} = 1 + \dfrac{6}{n+1}$.
2. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $\dfrac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $\dfrac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$.

**Exercice 09**

1. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{N}$, $x + y$ et $x - y$ sont de même parité.
2. Déterminer les diviseurs de 28.
3. Résoudre $x^2 - y^2 = 28$ en entiers naturels.
4. Résoudre $mn + 3m + 2n = 28$ en entiers naturels.

**Exercice 10**

1. Résoudre $x^2 - y^2 = 51$ en entiers naturels.
2. Déterminer tous les couples $(a, b)$ tels que $a^2 - b^2 = 7344$ et $\text{pgcd}(a, b) = 12$.

**Exercice 11**

1. Soient $a = 2520$ et $b = 1750$.
   a) Décomposer $a$ et $b$ en produit de facteurs premiers puis calculer le $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$.
   b) Calculer le nombre de diviseurs de $a$.
   c) Déterminer le plus petit entier naturel $m$ pour que le nombre $ma$ soit un carré parfait.
   d) Déduire la simplification des nombres $\dfrac{a}{b}, \sqrt{ab}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On pose $x = n^2 + n + 117$ et $y = (2n + 1)^{2025} + 2$.
   — Étudier la parité de $x$ et $y$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre $A = 5^{n+2} - 5^n$ est multiple de 6.
4. On considère le nombre $B$ tel que : $B = \dfrac{n^2 + 5n + 14}{n + 3}$.
   a) Montrer que $B = n + 2 + \dfrac{8}{n+3}$.
   b) Déduire toutes les valeurs de l'entier naturel $n$ pour que le nombre $B$ soit un entier naturel.
5. Le nombre 437 est-il premier ?
6. Soit $a$ un nombre premier tel que $a \geq 3$ et $b$ un entier naturel multiple de 3.
   — Montrer que 6 divise le nombre $(3a + 2b + 3)$.