

Complément de cours : Notions d'arithmétiques dans $\mathbb{N}$

(Nombre de diviseurs d'un entier, et comment les déterminer)

Si un nombre est écrit sous forme de produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

alors le **nombre de diviseurs** de n est :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$$

Pour $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$:

$$\text{Nombre de diviseurs} = (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Donc, 360 a 24 diviseurs.

Pour trouver les diviseurs de n :

- On écrit les puissances de chaque facteur premier dans des parenthèses.
- On développe en multipliant chaque élément de gauche avec chaque élément de droite.

Pour $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$:

$$(1; 5) \times (1; 3; 9) \times (1; 2; 4; 8)$$

Étape 1 : Développons les deux premiers ensembles :

$$(1; 5) \times (1; 3; 9) = (1; 3; 9; 5; 15; 45)$$

Étape 2 : Multiplions ce résultat par $(1; 2; 4; 8)$:

$$(1; 3; 9; 5; 15; 45) \times (1; 2; 4; 8) =$$

$$(1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72; 5; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120; 45; 90; 180; 360)$$

Liste finale des diviseurs (triée) :

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 24; 30; 36; 40; 45; 60; 72; 90; 120; 180; 360\}$$

