الدوال العددية (دراسة التغيرات)

1) تعاريف ومصطلحات :

أ) الدالة التزايدية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .
- تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x \leq y$ لدينا : $f(x) \leq f(y)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x < y$ لدينا : $f(x) < f(y)$

ملاحظة :

إذا كانت f تزايدية على مجال I فإنه كلما ازدادت قيمة x في المجال I ازدادت قيمة $f(x)$.

مثال :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = 2x - 1$ ، بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

ب) الدالة التناقصية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .
- تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x \leq y$ لدينا : $f(x) \geq f(y)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I بحيث $x < y$ لدينا : $f(x) > f(y)$

ملاحظة :

إذا كانت f تزايدية على مجال I فإنه كلما ازدادت قيمة x في المجال I تناقصت قيمة $f(x)$.

مثال :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = -3x + 4$ ، بين أن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

ج) الدالة الثابتة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .
تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان لكل x و y من I لدينا : $f(x) = f(y)$

ملاحظة :

إذا كانت f ثابتة على مجال I فإنه عندما تتغير قيمة x في المجال I لا تتغير قيمة $f(x)$.

مثال :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = 3$ ، تحقق أن f ثابتة قطعا على $\mathbb{R}$.

د) الدالة الرتيبة :

تعريف :

نقول إن f رتيبة على مجال I إذا كانت إما تزايدية وإما تناقصية على المجال I.
نقول إن f رتيبة قطعا على مجال I إذا كانت إما تزايدية قطعا وإما تناقصية قطعا على المجال I.

تمرين تطبيقي :

بين أن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^2$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$.

2) معدل تغير دالة عددية :

أ) تعريف :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و x و y من D_f بحيث $x \neq y$.

العدد الحقيقي $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y ونرمز له بالرمز $T(x;y)$.

أمثلة :

أحسب معدل التغير بين a و b حيث a و b من D_f و $a \neq b$ في الحالات التالية :

$f(x) = 3x + 7$ ، $f(x) = -5x + 4$ و $f(x) = \sqrt{x}$

ب) معدل التغير ورتابة دالة عددية :

خاصية :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .
إذا كان لكل x و y من I بحيث $x \neq y$:

$T(x;y) \geq 0$ فإن f تزايدية على I.	$T(x;y) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I.
$T(x;y) \leq 0$ فإن f تناقصية على I.	$T(x;y) < 0$ فإن f تناقصية قطعا على I.
$T(x;y) = 0$ فإن f ثابتة على I.	

ج) جدول تغيرات دالة عددية :

بعد دراسة رتابة دالة عددية f على مجموعة تعريفها D_f يتم تلخيص النتائج في جدول يسمى جدول تغيرات الدالة f.

أمثلة :

أدرس رتابة الدالة f على D_f في كل حالة من الحالات التالية ثم ضع جدول تغيراتها :

1) $f(x) = 2x + 1$ 2) $f(x) = -5x + 4$ 3) $f(x) = 3$ 4) $f(x) = x^2$

د) الرتابة والزوجية :

خاصية :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة لصفر،
وليكن I مجالا ضمن D_f وضمن $\mathbb{R}^+$ و I' مماثله بالنسبة لصفر.

* إذا كانت f دالة زوجية فإن :	* إذا كانت f دالة فردية فإن :
f تزايدية على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية على I'	f تزايدية على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية على I'
f تناقصية على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية على I'	f تناقصية على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية على I'

تطبيق :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^2 + 1$.

1) بين أن f دالة زوجية .

2) أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f على D_f.

3) القيم القصوى – القيم الدنيا لدالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها ، وليكن $x_0 \in I$.

- نقول إن $f(x_0)$ قيمة قصوى للدالة f على I إذا كان : $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من I .
- نقول إن $f(x_0)$ قيمة دنيا للدالة f على I إذا كان : $f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من I .
- نقول إن $f(x_0)$ مطراف للدالة f إذا كان $f(x_0)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f على I .

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$

1) تحقق أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.

2) بين أن $f(1)$ هي القيمة القصوى لـ f على $\mathbb{R}$ و أن $f(-1)$ هي القيمة الدنيا لـ f على $\mathbb{R}$.

4) دراسة بعض الدوال الإعتيادية :

أ) الدالة الخطية $f(x) = ax$:

هناك حالتان :

الحالة 1 : إذا كان $a = 0$ فإن $f(x) = 0$ إذن f دالة ثابتة ومنحناها (C_f) هو مستقيم منطبق مع محور الأفاصيل .

الحالة 2 : إذا كان $a \neq 0$ فإن $T(x;y) = a$ لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$ ، إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذا كان $a > 0$ وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ إذا كان $a < 0$ ومنحناها (C_f) هو المستقيم ذو المعادلة $y = ax$.

أمثلة :

أعط جدول تغيرات ثم مثل الدالة f في الحالتين : $a = 2$ و $a = -1$.

ب) الدالة التآلفية $f(x) = ax + b$:

هناك حالتان :

الحالة 1 : إذا كان $a = 0$ فإن $f(x) = b$ إذن f دالة ثابتة ومنحناها (C_f) هو المستقيم ذو المعادلة $y = b$.

الحالة 2 : إذا كان $a \neq 0$ فإن $T(x;y)=a$ لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$ ، إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذا كان $a>0$ وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ إذا كان $a<0$ ومنحناها (C_f) هو المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$.

أمثلة :

أعط جدول تغيرات ثم مثل الدالة f في الحالتين : $f(x)=2x-3$ و $f(x)=-x+2$.

ج) الدالة $f(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$:

نشاط :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2$ و $g(x)=-x^2$

أعط جدول تغيرات ثم أنشئ في نفس المعلم منحنيي الدالتين f و g .

تعريف :

منحنى الدالة $x \mapsto ax^2$ حيث $a \neq 0$ ، يسمى شلجما رأسه O أصل المعلم ومحور تماثله هو محور الأراتيب .

ملاحظة :

- إذا كان $a>0$ فإن 0 قيمة دنيا للدالة لـ f على $\mathbb{R}$ أي : $f(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $a<0$ فإن 0 قيمة قصوى للدالة لـ f على $\mathbb{R}$ أي : $f(x)\leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

د) الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$:

نشاط :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2+2x-2$

1) تحقق أن $f(x)=(x+1)^2-3$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2) أملأ الجدول التالي :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

3) نعتبر النقطة $A(-1;-3)$ والمستقيم $(\Delta): x=-1$ ،

أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم النقطة A والمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

4) استنتج مبيانيا تغيرات الدالة f ،

خاصية :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$ ،

التمثيل المبياني للدالة f في معلم م م هو شلجم رأسه $A\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ ومحوره هو المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{-b}{2a}$

هـ) الدالة $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$:

نشاط :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{2}{x}$ و $g(x)=\frac{-1}{x}$

1) حدد مجموعتي تعريف الدالتين f و g .

2) أعط جدول تغيرات ثم أنشئ في نفس المعلم منحنيي الدالتين f و g .

تعريف :

منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ حيث $a \neq 0$ ، يسمى هذلولا مركزه O (أصل المعلم) ومقارباه هما محوري المعلم .