المعادلات والمتراجحات والنظمت

I- المعادلات :

(1) معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف :

كل متساوية على شكل $ax + b = 0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى **معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد**.

قيم الأعداد x التي تحقق $ax + b = 0$ تسمى **حلول** (أو جذور) هذه المعادلة ، ومجموعة هذه القيم تسمى **مجموعة الحلول** ، ونرمز لها عادة بالرمز S

مثال :

$$\text{لنحل المعادلة } 2x - 3 = 0 : \text{ لدينا } 2x - 3 = 0 \text{ يعني } 2x = 3 \text{ أي } x = \frac{3}{2} \text{ إذن } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

خاصية :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \neq 0$ ،

$$\text{مجموعة حلول المعادلة } ax + b = 0 \text{ هي } S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

تمرين تطبيقي :

$$\text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلات : } 2x - 3 = 2(x - 1) \text{ و } 2x - 1 = \frac{x - 2}{2} + \frac{3}{2}x$$

(2) معادلات على شكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

نشاط :

$$\text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة : } (2x - 4)(3x + 9) = 0$$

خاصية :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$$\text{مجموعة حلول المعادلة } (ax + b)(cx + d) = 0 \text{ هي : } S = \left\{ \frac{-b}{a}; \frac{-d}{c} \right\}$$

(3) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

(أ) المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$:

تعريف :

كل متساوية على شكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى **معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد**. (و $ax^2 + bx + c$ تسمى **ثلاثية الحدود**)

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث يسمى **ميز** المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (وكذلك مميز ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$).

خصائص :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بحيث $a \neq 0$ ، ولتكن S مجموعة حلولها و Δ مميزها ، لدينا :

$$\text{- إذا كان } \Delta > 0 \text{ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ إذن : } S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

$$\text{- إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن المعادلة تقبل حل وحيد هو } \frac{-b}{2a} \text{ إذن : } S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$\text{- إذا كان } \Delta < 0 \text{ فإن المعادلة لا تقبل حلا في } \mathbb{R} \text{ إذن : } S = \emptyset$$

أمثلة :

$$\text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلات التالية : } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ ، } x^2 + 6x + 9 = 0 \text{ و } x^2 - 2x + 7 = 0$$

(ب) حالة خاصة المعادلة $x^2 = a$:

نشاط :

$$\text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلات : } x^2 = 9 \text{ ، } x^2 = -16 \text{ و } x^2 = 0 \text{ و } x^2 = 3$$

خاصية :

نعتبر المعادلة $x^2 = a$ حيث a عدد حقيقي ،

$$\text{- إذا كان } a > 0 \text{ فإن المعادلة } x^2 = a \text{ تقبل حلين متقابلين هما : } \sqrt{a} \text{ و } -\sqrt{a} \text{ ، إذن } S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$$

$$\text{- إذا كان } a = 0 \text{ فإن المعادلة } x^2 = a \text{ تقبل حل وحيد هو } 0 \text{ ، إذن } S = \{0\}$$

$$\text{- إذا كان } a < 0 \text{ فإن المعادلة } x^2 = a \text{ لا تقبل حلا في } \mathbb{R} \text{ ، إذن } S = \emptyset$$

(ج) مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية :
خاصية :

إذا كان مميز المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ موجبا قطعاً فإنها تقبل حلين x_1 و x_2 يحققان : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ و $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

أمثلة :

تحقق أن المعادلة $-2x^2 + x + 6 = 0$ تقبل حلين مختلفين ثم حدد مجموعهما وجداءهما دون حساب الحلين .
(د) تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية :

خاصية :

نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ بحيث $a \neq 0$ ، و Δ مميزها ، لدينا :
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

ولدينا : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد x_0 إذن : ولدينا : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلاً في $\mathbb{R}$ ولا يمكن تعميل ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ إلى جداء حدانيتين .

أمثلة :

عمل ثلاثيات الحدود التالية إذا أمكن : $2x^2 - 6x + 4$ ، $x^2 - 6x + 9$ و $4x^2 - 4x + 1$

II- المتراجحات :

(1) متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف :

كل متفاوتة على شكل $ax + b \leq 0$ أو $ax + b > 0$ أو $ax + b < 0$ أو $ax + b \geq 0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى **متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد** .

أمثلة :

- لنحل المتراجحة $2x - 4 \leq 0$: لدينا $2x - 4 \leq 0$ يعني $2x \leq 4$ أي $x \leq 2$ إذن $S =]-\infty; 2]$.

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax + b \leq 0$ و S مجموعة حلولها، إذا كان $a > 0$ فإن : $S =]-\infty; \frac{-b}{a}]$

- لنحل المتراجحة $-2x + 6 < 0$:

لدينا $-2x + 6 \leq 0$ يعني $-2x \leq -6$ أي $x \geq 3$ إذن $S = [3; +\infty[$.

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax + b \leq 0$ و S مجموعة حلولها، إذا كان $a < 0$ فإن : $S = [\frac{-b}{a}; +\infty[$

- لنحل المتراجحة $5x - 10 \geq 0$:

لدينا $5x - 10 \geq 0$ يعني $5x \geq 10$ أي $x \geq 2$ إذن $S = [2; +\infty[$.

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax + b \geq 0$ و S مجموعة حلولها، إذا كان $a > 0$ فإن : $S = [\frac{-b}{a}; +\infty[$

- لنحل المتراجحة $-3x + 21 \geq 0$:

لدينا $-3x + 21 \geq 0$ يعني $-3x \geq -21$ أي $x \leq 7$ إذن $S =]-\infty; 7]$.

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة $ax + b \geq 0$ و S مجموعة حلولها، إذا كان $a < 0$ فإن : $S =]-\infty; \frac{-b}{a}]$

تمرين تطبيقي :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $2x - 1 < 4x + 3$ ، $2 + \frac{1}{2}x > \frac{x + 2}{2}$ و $2x + 1 \geq 2(x + 1)$

(2) إشارة الحدانية $ax + b$ حيث $a \neq 0$:

خاصية :

نعتبر الحدانية $ax + b$ حيث $a \neq 0$ ،

إذا كان $x \geq \frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax + b$ هي إشارة a .

إذا كان $x \leq \frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax + b$ هي عكس إشارة a .

أمثلة :

(1) حدد جدولتي إشارات الحدانيتين : $3x - 6$ و $-2x + 1$

(2) استنتج إشارات الجداء : $(-2x + 1)(3x - 6)$.

ونلخص هذه النتائج في جدول الإشارات التالي :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	○	إشارة a

(3) إشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية : خاصية :

نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ و Δ مميزها ،
إذا كان $\Delta > 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a خارج الجذرين وعكس إشارة a داخل الجذرين وتنعدم عند الجذرين.
إذا كان $\Delta = 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a على $\mathbb{R}$ وتنعدم عند الجذر.
إذا كان $\Delta < 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a على $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على $\mathbb{R}$.

أمثلة :

أدرس إشارات ثلاثيات الحدود التالية : $-2x^2 + 5x - 3$ ، $2x^2 - 8x + 8$ و $x^2 - 2x + 7$
(4) المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

تعريف :

كل متفاوتة على شكل $ax^2 + bx + c \leq 0$ أو $ax^2 + bx + c \geq 0$ أو $ax^2 + bx + c < 0$ أو $ax^2 + bx + c > 0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و a غير منعدم و x عدد مجهول تسمى **متراجحة من الدرجة الثانية بمجهول واحد**.

ملاحظة :

لحل متراجحة من نوع $ax^2 + bx + c \leq 0$ أو $ax^2 + bx + c \geq 0$ أو $ax^2 + bx + c < 0$ أو $ax^2 + bx + c > 0$ نتبع المراحل التالية :

- نحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.

- نستنتج جدول إشارات ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$.

- نستخرج حلول المتراجحة مباشرة من الجدول .

أمثلة :

حل المتراجحات التالية :

$$(1) \quad -2x^2 + 5x - 3 \geq 0$$

$$(2) \quad -2x^2 + 5x - 3 < 0$$

$$(3) \quad 2x^2 - 8x + 8 < 0$$

$$(4) \quad x^2 - 2x + 7 > 0$$

III- النظمات :

(1) تعريف :

كل متساوية على شكل $ax + by = c$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و x و y عددين مجهولين تسمى **معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين** .

النظمة $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a و b و c و a' و b' و c' من $\mathbb{R}$ و x و y عددين مجهولين تسمى **نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين**.

ملاحظات :

- إذا كان $ab' - a'b \neq 0$ فإن للنظمة (S) حل وحيد .

- حلول النظمة (S) إن وُجدت ، هي عبارة عن أزواج $(x; y)$.

(2) طرق الحل في حالة $ab' - a'b \neq 0$:

(أ) طريقة التعويض :

مثال :

لنحل النظمة التالية بطريقة التعويض :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

(ب) طريقة التأييف الخطية :

مثال :

لنحل النظمة التالية بطريقة التأييف الخطية :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

مسألة :

اشترى تلميذ 10 دفاتر بعضها من فئة 50 ورقة والبعض الآخر من فئة 100 ورقة بمبلغ 47 درهما .
ثمن دفتر من فئة 50 ورقة هو 3,50 درهما و ثمن دفتر من فئة 100 ورقة هو 6,50 درهما ،
كم من دفتر من كل فئة اشترى هذا التلميذ ؟