الترتيب في $\mathbb{R}$

I- الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$:

نشاط :

قارن العددين : $\frac{6}{7}$ و $\frac{7}{8}$.

تعريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين ،
- نقول إن a أصغر من أو يساوي b ونكتب $a \le b$ إذا كان : $0 \le b-a$

مثال :

قارن العددين : 1 و $\frac{7}{8}$.

خاصيات :

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :
- $a \le a$
- إذا كان $a \le b$ و $b \le a$ فإن $a=b$.
- إذا كان ($b \le c$ و $a \le b$) فإن $a \le c$.

مثال :

لدينا $\frac{7}{8} \le 1$ و $\frac{6}{7} \le \frac{7}{8}$ إذن $\frac{6}{7} \le 1$

II- الترتيب والعمليات :

1) الترتيب والجمع :

نشاط :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ،
- نفترض أن $a \le b$ ، قارن $a+c$ مع $b+c$.
- نفترض أن $a \le b$ و $c \le d$ ، قارن $a+c$ مع $b+d$.

خاصيات :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ،
- إذا كان $a \le b$ فإن $a+c \le b+c$.
- إذا كان ($a \le b$ و $c \le d$) فإن $a+c \le b+d$.

مثال :

قارن $3+\sqrt{2}$ مع $2+\sqrt{2}$ ثم $0,05+1$ مع $0,25+2$.

2) الترتيب والضرب :

خاصيات :

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ،
- إذا كان c موجب قطعا فإن : $a \le b$ يعني $ac \le bc$.
- إذا كان c سالب قطعا فإن : $a \le b$ يعني $ac \ge bc$.

مثال :

لدينا $1 \le 2$ ، إذن $(-3)\times 1 \ge (-3)\times 2$ ومنه $-3 \ge -6$

لدينا $\frac{2}{5} \le \frac{3}{5}$ ، إذن $5\times\frac{2}{5} \le 5\times\frac{3}{5}$ ومنه $2 \le 3$

3) الترتيب والمربع - الترتيب والجذر مربع :

خاصيات :

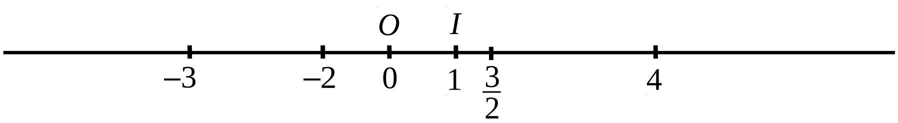
ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين ، فإن : $a \le b$ يعني $a^2 \le b^2$ ويعني $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

ليكن a و b عددين حقيقيين سالبين ، فإن : $a \le b$ يعني $b^2 \le a^2$

III- المجالات في $\mathbb{R}$:

1) المستقيم العددي :

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، يمكن تمثيلها على مستقيم (D) مزود بمعلم $(o;I)$:

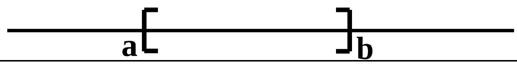
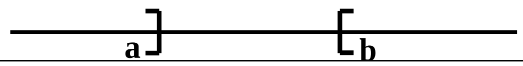
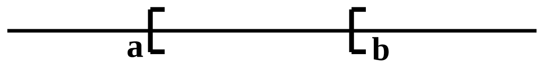
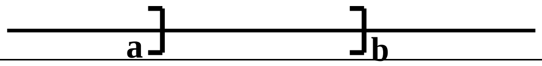
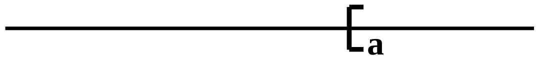
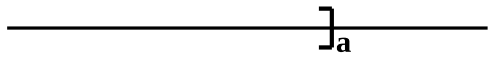
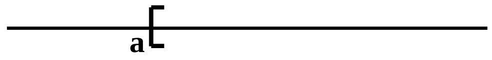
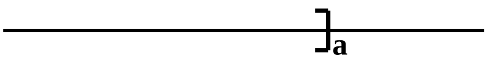


حيث :

- كل نقطة من المستقيم (D) تقبل عددا حقيقيا وحيدا أفصولا لها .
- كل عدد حقيقي هو أفصول لنقطة وحيدة من المستقيم (D) .
- المستقيم (D) في هذه الحالة يسمى محورا ونرمز له بالرمز $D(o;I)$.

2) مجالات $\mathbb{R}$:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a<b$ ،

	مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق	نرمز لها بالمجال	تمثيل المجال على محور
المجالات المحدودة	$a\le x\le b$	$[a;b]$	
	$a<x<b$	$]a;b[$	
	$a\le x<b$	$[a;b[$	
	$a<x\le b$	$]a;b]$	
المجالات غ المحدودة	$x<a$	$]-\infty;a[$	
	$x\le a$	$]-\infty;a]$	
	$x\ge a$	$[a;+\infty[$	
	$x>a$	$]a;+\infty[$	

ملاحظة :

لدينا $\mathbb{R}^{+}=[0;+\infty[$ و $\mathbb{R}^{-}=]-\infty;0]$

تمرين تطبيقي :

1) مثل على محور المجالين : $[-1;3]$ و $]-\infty;2[$

2) حدد من الشكل : $[-1;3]\cap]-\infty;2[$ و $[-1;3]\cup]-\infty;2[$

$IV-$ القيمة المطلقة :

تعريف :

ليكن x عدد حقيقي ،
نسمي القيمة المطلقة للعدد x العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $|x|$ والمعرف كما يلي :
إذا كان x موجبا فإن $|x|=x$ وإذا كان x سالبا فإن $|x|=-x$

أمثلة :

أحسب القيمة المطلقة للأعداد التالية :

$a=5$ ، $b=-7$ ، $c=\sqrt{2}-1$ و $d=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

ملاحظات :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **عدد موجب** .

إذا كان x عددا سالبا فإن $-x$ عدد موجب ، **مثلا** $x=-3$ إذن $-x=-(-3)=3$ عدد موجب.

خاصية :

ليكن x و y عددين حقيقيين ، لدينا :

$|x|\ge 0$ ، $|-x|=|x|$ ، $|xy|=|x||y|$ ، $\sqrt{x^2}=|x|$ ،

إذا كان $y\ne 0$ فإن $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ و $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$

أمثلة :

$|x|=8$ يعني أن ($x=8$ أو $x=-8$)

$|x|=-2$ مستحيل (لأن $|x|$ عدد موجب)

$|x+4|=11$ يعني ($x+4=11$ أو $x+4=-11$) يعني ($x=7$ أو $x=-15$)

$V-$ التأطير :

1) تعريف :

ليكن a و b و x أعداد حقيقية ، الكتابة $a \le x \le b$ تسمى تأطير للعدد x .

أمثلة :

$1,41 \le \sqrt{2} \le 1,42$ تأطير للعدد $\sqrt{2}$

$1,73 \le \sqrt{3} \le 1,74$ تأطير للعدد $\sqrt{3}$

2) التأطير والعمليات :

لتكن a و b و c و d و x و y أعداد حقيقية .

أ) تأطير مجموع عددين :

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي فإن :
$a + c \le x + y \le b + d$ تأطير للعدد $x + y$.

مثال :

نعلم أن : $1,4 \le \sqrt{2} \le 1,5$ و $1,73 \le \sqrt{3} \le 1,74$ إذن : $3,14 \le \sqrt{2} + \sqrt{3} \le 3,16$

ب) تأطير جداء عددين :

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي ، فإنه :
إذا كانت الأعداد a و b و c و d موجبة فإن $ac \le xy \le bd$ تأطير للعدد xy
إذا كانت الأعداد a و b و c و d سالبة فإن $bd \le xy \le ac$ تأطير للعدد xy

مثال :

إذا علمت أن : $1,4 \le \sqrt{2} \le 1,5$ و $1,7 \le \sqrt{3} \le 1,8$ ، حدد تأطيرا للعدد $\sqrt{6}$.

نتائج :

إذا كان $a \le x \le b$ تأطير للعدد x فإنه :
إذا كان العددين a و b موجبين فإن $a^2 \le x^2 \le b^2$ تأطير للعدد x^2 .
إذا كان العددين a و b سالبين فإن $b^2 \le x^2 \le a^2$ تأطير للعدد x^2 .

ج) تأطير مقابل عدد :

إذا كان $a \le x \le b$ تأطير للعدد x فإن $-b \le -x \le -a$ تأطير للعدد $-x$.

نتيجة :

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي فإن :
$a - d \le x - y \le b - c$ تأطير للعدد $x - y$.

مثال :

إذا علمت أن : $1,4 \le \sqrt{2} \le 1,5$ و $1,7 \le \sqrt{3} \le 1,8$ حدد تأطيرا للعدد $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

د) تأطير مقلوب عدد :

ليكن $a \le x \le b$ تأطير للعدد x :
إذا كان العددين a و b غير منعدمين ولهما نفس الإشارة فإن $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$ تأطير للعدد $\frac{1}{x}$.

مثال :

إذا علمت أن : $2 \le \sqrt{5} \le 2,5$ ، حدد تأطيرا للعدد $\frac{1}{\sqrt{5}}$.