العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية

I- مجموعات الأعداد :

1) نشاط : أملأ الجدول التالي بوضع علامة في الخانات المناسبة :

	0	−3	6	$-\frac{1}{5}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	3,14
عدد صحيح طبيعي							
عدد صحيح نسبي							
عدد عشري نسبي							
عدد جذري							
عدد حقيقي							

2) ترميز :

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تُكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ، ونكتب : $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$

$\mathbb{N}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة : $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;.....\}$

- الأعداد الصحيحة النسبية تُكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ، ونكتب : $\mathbb{Z}=\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$

- الأعداد العشرية النسبية تُكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{D}$ ، ونكتب : $\mathbb{D}=\left\{\frac{a}{10^n}/\,a\in\mathbb{Z}\;;\,n\in\mathbb{N}\right\}$

- الأعداد الجذرية تُكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، ونكتب : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\,a\in\mathbb{Z}\;;\,b\in\mathbb{Z}^*\right\}$

- الأعداد الجذرية واللاجذرية تُكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

3) ملاحظة :

☜ لدينا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

حدد طبيعة كل عدد من الأعداد التالية :

$\sqrt{49}$ ، $(-4)^2$ ، $-(4)^2$ ، $\frac{\sqrt{36}}{15}$ ، $\frac{1}{7}$.

II- العمليات على مجموعة الأعداد الحقيقية وخاصياتها :

1) الجمع في $\mathbb{R}$:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :

- $a+b=b+a$ (عملية الجمع تبادلية في $\mathbb{R}$).
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ (عملية الجمع تجميعية في $\mathbb{R}$).
- $a+0=0+a=a$ (0 هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$).
- $a+(-a)=(-a)+a=0$ ($-a$ هو مقابل العدد a بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$).

2) الضرب في $\mathbb{R}$:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :

- $ab=ba$ (عملية الضرب تبادلية في $\mathbb{R}$).
- $a(bc)=(ab)c$ (عملية الضرب تجميعية في $\mathbb{R}$).
- $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (1 هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$).
- إذا كان $a\neq 0$: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ ($\frac{1}{a}$ هو مقلوب العدد a بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$).

ملاحظة : ☜ العدد 0 لا يملك مقلوبا في $\mathbb{R}$.

3) العمليات على الكسور :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $b\neq 0$ و $d\neq 0$ ، لدينا :

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
- وإذا كان $c\neq 0$: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

تمرين تطبيقي :

1) أحسب العدد : $2-2\times3+(8-1)\times4$

2) أكتب العدد A على شكل كسر مختزل ، حيث : $A=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}$

4) النشر والتعميل :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية ، لدينا :

* $a(b+c)=ab+ac$ * $a(b-c)=ab-ac$

* $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ * $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$

التعميل ⟵ النشر ⟶ التعميل ⟵ النشر ⟶

5) متطابقات هامة :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا :

* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ * $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

* $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ * $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

التعميل ⟵ النشر ⟶ التعميل ⟵ النشر ⟶

أمثلة :

1) أنشر التعبير : $A=(a+3)(a-2)$ حيث a من $\mathbb{R}$.

2) عمل التعبير : $B=ab+a-b-1$ حيث a و b من $\mathbb{R}$.

III– القـــــوى :

1) تعريف :

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم ، و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدما :

نسمي قوة العدد x ذات الأس n العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز x^n ويحقق :

$x^n=\underbrace{x\times x\times...\times x}_{n\ facteurs}$ و $x^0=1$ ولدينا كذلك : $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

2) العمليات على القوى :

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و n و m من $\mathbb{N}$ لدينا :

$a^n a^m=a^{n+m}$ ، $\left(a^n\right)^m=a^{n.m}$ ، $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ و $a^n b^n=(ab)^n$ و $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3) قوى العدد 10 :

لدينا : $10^0=1$ ، $10^1=10$ ، $10^2=100$ ، $10^{-1}=0,1$ ، $10^{-2}=0,01$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $10^n=1\underbrace{00....0}_{n\ zeros}$ و $10^{-n}=\underbrace{0,00....01}_{n\ zeros}$

4) الكتابة العلمية لعدد عشري غير منعدم :

كل عدد عشري غير منعدم x يُكتب بكيفية وحيدة على الشكل $x=a\cdot10^n$ أو على الشكل $x=a\cdot10^{-n}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}$ و a عدد عشري له رقم وحيد غير منعدم قبل الفاصلة .

أمثلة :

- الكتابة العلمية للعدد 68000000 هي $6,8.10^7$
- الكتابة العلمية للعدد $0,00000214$ هي $2,14.10^{-6}$
- الكتابة العلمية للعدد $-0,015$ هي $-1,5\cdot10^{-2}$

IV– الجذور المربعة :

1) تعريف :

ليكن x عددا حقيقيا موجبا ، نسمي جذر مربع x العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي x ، ونرمز له بـ $\sqrt{x}$

أمثلة :

$\sqrt{4}=2$ ، $\sqrt{1}=1$ ، $\sqrt{0}=0$ ، $\sqrt{25}=5$ و $\sqrt{49}=7$

ملاحظة :

إذا كان x و y عددين حقيقيين موجبين فإن :

* $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يعني $x=y$ * $\sqrt{x}=0$ يعني $x=0$.

2) خاصيات :

ليكن x و y من عددين حقيقيين موجبين ، لدينا :

$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ ، $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{x^2}=x$

وإذا كان $y\neq 0$: $\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{y}}{y}$ ، $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

V- التناسبية :

نشاط :

1) بسط كتابة العددين $\frac{12}{4}$ و $\frac{21}{7}$.

2) ماذا تستنتج ؟

تعريف :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية غير منعدمة ،

* نقول إن الأعداد a و b و c و d في هذا الترتيب تُكون تناسبا (أو a و c متناسبان مع b و d) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- العددين a و d يسميان طرفي التناسب والعددين b و c يسميان وسطي التناسب .

- خارج a على b يسمى معامل التناسب .

تمرين تطبيقي :

1) بين أن الأعداد 3 و 2 و 18 و 12 في هذا الترتيب تُكون تناسبا .

2) حدد طرفي هذا التناسب ووسطيه ومعامله .

خاصية 1 :

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية غير منعدمة ،

لدينا : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني أن $ad=bc$

خاصية 2 :

إذا كانت لأعداد a و b و c و d في هذا الترتيب تكون تناسبا وكان $b+d\neq 0$ و $b-d\neq 0$

فإن : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

تمرين 1 :

1) بسط كتابة العددين A و B حيث :

$A=\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-1}$ و $B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

2) حدد قيمة العدد الحقيقي a إذا علمت أن $a^2=25$.

تمرين 2 :

عمل التعابير التالية : $A=x^2+25-10x$ و $B=x^2-9+2(x+3)$ و $C=x^3-8+2(x-2)$

تمرين 3 :

اعط الكتابة العلمية للأعداد التالية : 105000 و $0,000063$ و $-24,5$

تمرين 4 :

1) حدد قيمة العدد x علما أن الأعداد 2 و 5 و 6 و x تُكون في هذا الترتيب تناسبا .

2) حدد معامل هذا التناسب .