Inversion de matrice par Gauss-Jordan

Algorithm 1 Inversion de matrice par Gauss-Jordan

```
procedure InverserMatrice(A)
    for i ← 1 à n do
        if A[i][i] = 0 then
            Rechercher une ligne j > i tel que A[j][i] ≠ 0
            if une telle ligne existe then
                Échanger la ligne i avec la ligne j
            else
                Retourner ”Matrice non inversible”
            end if
        end if
        Diviser la ligne i par A[i][i] pour obtenir un 1 sur la diagonale principale
        for j ← 1 à n do
            if j ≠ i then
                Soustraire A[j][i] fois la ligne i de la ligne j pour obtenir des zéros en dessous du pivot
            end if
        end for
    end for
end procedure
```

Exemple d'application de l'algorithme de Gauss-Jordan avec matrice identité

Étape 1 :

Nous commençons avec la matrice augmentée (AI) :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 :

Nous remarquons que $A[1][1] = 1 \neq 0$, donc nous continuons sans échange de ligne. Nous divisons la première ligne par $A[1][1] = 1$ pour obtenir un 1 sur la diagonale principale :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & | & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 :

Nous soustrayons 4 fois la première ligne de la deuxième ligne et 7 fois la première ligne de la troisième ligne pour obtenir des zéros en dessous du pivot :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -11 & | & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 4 :

Nous continuons avec la deuxième colonne. Nous remarquons que $A[2][2] = -3 \neq 0$, donc nous continuons sans échange de ligne. Nous divisons la deuxième ligne par $A[2][2] = -3$ pour obtenir un 1 sur la diagonale principale :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -11 & | & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 5 :

Nous soustrayons 2 fois la deuxième ligne de la première ligne et -6 fois la deuxième ligne de la troisième ligne pour obtenir des zéros en dessus et en dessous du pivot de la deuxième colonne :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 6 :

Nous continuons avec la troisième colonne. Nous remarquons que $A[3][3] = 1 \neq 0$, donc nous continuons sans échange de ligne. Nous soustrayons 3 fois la troisième ligne de la première ligne et -2 fois la troisième ligne de la deuxième ligne pour obtenir des zéros en dessus du pivot de la troisième colonne :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous avons transformé (AI) en (IA^{-1}), où A^{-1} est la matrice inverse de A.

Calcul de A^{-1} et vérification de $A \times A^{-1} = I$

Étape 1 : Calcul de A^{-1}

Après l'exécution de l'algorithme de Gauss-Jordan, nous avons obtenu la matrice augmentée (AI) suivante :

$$(AI) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons extraire A^{-1} à partir de cette matrice. A^{-1} est simplement la partie droite de la barre verticale :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Vérification de $A \times A^{-1} = I$

Pour vérifier que $A \times A^{-1}$ donne bien la matrice identité I, nous effectuons le produit matriciel $A \times A^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Après le calcul du produit matriciel, nous obtenons :

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ce qui confirme que $A \times A^{-1}$ donne bien la matrice identité I, ce qui signifie que A^{-1} est effectivement l'inverse de A.