

Nombres Amicaux et Nombres Solitaires

les « vrais amis » sont rares !

Introduction

En théorie des nombres, certains entiers naturels partagent une propriété fascinante liée à la **fonction somme des diviseurs**. Cette propriété conduit à la notion de **nombres amicaux** (ou **friendly numbers**) et de **nombres solitaires**.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On note $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n . On appelle **abondance** (ou *abundancy*) de n le rapport :

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$$

Deux nombres m et n sont dits **amicaux** si et seulement si :

$$A(m) = A(n) \quad \text{et} \quad m \neq n$$

Exemples de Nombres Amicaux

Exemple

Exemple 1 :

Les nombres 6 et 28 forment une paire amicale.

On a $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ Donc $A(6) = \frac{\sigma(6)}{6} = \frac{12}{6} = 2$

On a $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$ Donc $A(28) = \frac{\sigma(28)}{28} = \frac{56}{28} = 2$

Ainsi, $A(6) = A(28) = 2$. Les deux nombres ont la même abondance : ils forment donc une **paire amicale**.

Exemple

Exemple 2 :

Les nombres 4320 et 4680 sont également amicaux.

On a $\sigma(4320) = 15120$ et $A(4320) = \frac{15120}{4320} = \frac{7}{2}$

On a $\sigma(4680) = 16380$ et $A(4680) = \frac{16380}{4680} = \frac{7}{2}$

Les deux nombres partagent donc la même abondance $\frac{7}{2}$.

Exemple

Exemple 3 :

Une paire amicale très surprenante est celle de 24 et 91963648 :

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, \quad \sigma(24) = 60 \quad A(24) = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma(91963648) = 229909120$$

$$A(91963648) = \frac{229909120}{91963648} = \frac{5}{2}$$

Bien que ces deux nombres soient extrêmement éloignés, ils forment tout de même une paire amicale.

Nombres Solitaires

Définition

Un nombre naturel n est dit **solitaire** s'il n'existe aucun entier $m \neq n$ tel que :

$$A(m) = A(n)$$

Autrement dit, n n'appartient à aucune paire amicale.

Exemple

Exemple 4 : Les nombres 1, 2, 3, 4, et 5 sont tous solitaires.

$$D_1 = \{1\} \Rightarrow A(1) = 1 \quad ; \quad D_2 = \{1, 2\} \Rightarrow A(2) = \frac{3}{2}$$

$$D_3 = \{1, 3\} \Rightarrow A(3) = \frac{4}{3} \quad ; \quad D_4 = \{1, 2, 4\} \Rightarrow A(4) = \frac{7}{4} \quad ; \quad D_5 = \{1, 5\} \Rightarrow A(5) = \frac{6}{5}$$

Aucune de ces valeurs d'abondance n'est partagée par un autre nombre naturel.

Remarque

Remarque Importante : Le cas du nombre 10 est particulièrement célèbre. Il est **inconnu** à ce jour si 10 possède un ami ou non. En d'autres termes, on ne sait pas si 10 est solitaire ou amical. C'est un problème **ouvert** en théorie des nombres.

- Le fait d'être « amicaux » définit une **relation d'équivalence** sur les entiers positifs.
- Cette relation partitionne les entiers en **classes d'amitié** (ou *clubs*) où tous les membres partagent la même abondance.
- Il existe très peu de paires amicales connues : les « **vrais amis** » sont **rares** !

Conclusion

Les nombres amicaux et solitaires représentent un domaine récréatif fascinant de la théorie des nombres. Malgré leur apparente simplicité, ces notions cachent des mystères encore non résolus. Le problème de savoir si certains nombres, comme 10, sont solitaires ou non reste à ce jour un défi pour les mathématiciens.