

Exercice:

$$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

Soit l'application

$$n \mapsto E \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

Pour Montrer que f est surjective, On procède par les étapes suivantes:

soit $p \in \mathbb{N}^*$, On pose $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq p\}$

a) Montrer par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq p$

b) Dédire $A_p \neq \emptyset$

c) Soit n le plus petit élément de A_p

a) Montrer que $p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < p + 1$

b) Dédire f surjective

Voir la solution dans la page suivante

Solution de l'exercice

Définitions et objectif

Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par : $f(n) = E\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

On souhaite montrer que f est surjective.

Pour cela, soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$A_p = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq p \right\}$$

Étape a) : Montrons que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

Preuve par récurrence :

- **Initialisation** ($p = 0$) :

$$\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2} = 1 \quad (\text{vrai})$$

- **Hérédité** :

Supposons l'inégalité vraie au rang p ,

$$\text{c'est-à-dire : } \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

Montrons-la au rang $p + 1$:

$$\sum_{k=1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k}$$

La deuxième somme contient 2^p termes,

chacun minoré par $\frac{1}{2^{p+1}}$,

$$\text{donc : } \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \geq 2^p \cdot \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \geq \left(1 + \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{p+1}{2}$$

La récurrence est établie.

Étape b) : Dédisons que $A_p \neq \emptyset$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, choisissons $n = 2^{2p}$.

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^{2^{2p}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{2p}{2} = 1 + p \geq p$$

Donc $n \in A_p$, ce qui implique $A_p \neq \emptyset$.

Étape c) : Soit n le plus petit élément de A_p

Puisque $A_p \subset \mathbb{N}^*$ est non vide et bien ordonné, il admet un plus petit élément, noté n .

Étape d) : Montrons que

$$p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < p + 1$$

- Par définition de A_p , on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq p$.

- Si $n = 1$, alors $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$, donc $p = 1$ et $1 < 2$.

- Si $n > 1$, alors $n - 1 \notin A_p$
(car n est le plus petit élément),

$$\text{donc : } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < p$$

$$\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < p + \frac{1}{n}$$

$$\text{Comme } n \geq 2, \text{ on a } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1,$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < p + 1$$

$$\text{Ainsi, } p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < p + 1.$$

Étape e) : Dédisons que f est surjective

D'après l'encadrement précédent,

la partie entière de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est p ,

$$\text{soit : } f(n) = E\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = p$$

Ceci étant valable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f est surjective.