المعادلات التفاضلية

$I-$ المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة :

1) تعريف :

ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}$.
المعادلة $y'=ay+b$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة .
(الدالة y هي المجهول و y' مشتقتها)
كل دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x)=af(x)+b$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$

خاصية 1 :

ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}$ بحيث $a \neq 0$.
حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

حالة خاصة : (إذا كان $a=0$)
المعادلة $y'=ay+b$ تصبح $y'=b$ وحلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=bx+k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

خاصية 2 :

ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}$ بحيث $a \neq 0$ و x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$.
المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ تقبل حلا وحيدا f يحقق : $f(x_0)=y_0$ وهو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$$

تمرين تطبيقي : حل المعادلة التفاضلية : $y'=2y-1$ و $y(0)=2$.

$II-$ المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

1) تعريف :

ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}$.
المعادلة $y''+ay'+by=0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة .
(الدالة y هي المجهول و y' مشتقتها و y'' مشتقتها الثانية)
كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ بحيث $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x)+af'(x)+bf(x)=0$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$.
المعادلة $r^2+ar+b=0$ حيث $r \in \mathbb{C}$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$.

مثال : $y''+y'-2y=0$ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية معادلتها المميزة هي : $r^2+r-2=0$

2) خاصية :

لتكن المعادلة التفاضلية $(E): y''+ay'+by=0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و $r^2+ar+b=0$ معادلتها المميزة،
و Δ مميز المعادلة $r^2+ar+b=0$: (1) (أي $\Delta=a^2-4b$)
- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 وحلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددين من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا حقيقيا مزدوجا r_0 وحلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(\alpha x+\beta)e^{r_0x}$ حيث α و β عددين من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$ (حيث p و q من $\mathbb{R}$)، وحلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{px}(\alpha\cos(qx)+\beta\sin(qx))$ حيث α و β عددين من $\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي : حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} y''+2y'-3y=0 \\ y(0)=5 \\ y'(0)=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''-2y'+y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''-4y'+13y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$