الدوال الأسية

I– الدالة الأسية النيبيرية :

1) نشاط : بين أن الدالة ln تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$.

2) تعريف :

الدالة العكسية للدالة ln هي الدالة $x \mapsto e^x$ وتسمى الدالة الأسية النيبيرية ويُرمز لها بالرمز : exp .

أي : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[) \quad : \quad y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln(y) = x$

3) خاصيات الدالة الأسية النيبيرية :

الخاصية الأساسية :

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ ونكتب أيضا : $e^{x+y} = e^x e^y$

خاصيات أخرى :

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا : $\exp(\ln(x)) = x$ ونكتب أيضا : $e^{\ln(x)} = x$

ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\ln(\exp(x)) = x$ ونكتب أيضا : $\ln(e^x) = x$

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا : $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ ؛ $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ ؛ $\exp(xy) = (\exp(x))^y$

$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$ ؛ $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

4) دراسة الدالة exp :

مجموعة التعريف : $D_{\exp} = \mathbb{R}$

النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

جدول التغيرات : لدينا الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $(\ln(e^x))' = x'$ ومنه لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$ وبالتالي لكل x من $\mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$

ومنه الدالة exp تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن جدول تغيرات الدالة exp هو :

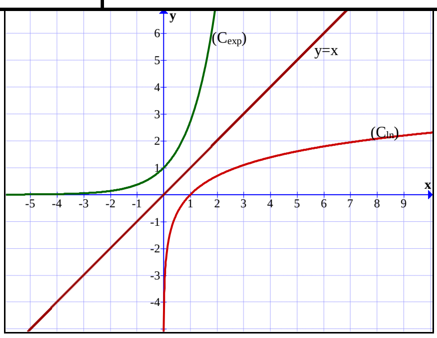
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

التمثيل المبياني :

نعلم أن الدالة العكسية للدالة ln هي الدالة exp،

إذن في معلم متعامد ممنظم يكون منحنيي الدالتين ln و exp

متماثلين بالنسبة للمنصف الأول للمعلم $((\Delta) : y = x)$



5) نتائج هامة :

* لدينا النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ، $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

* إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن :

- الدالة $f : x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا لكل x من I : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

- الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I هي $x \mapsto e^{u(x)} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$.

2) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\frac{1}{x}}$.

3) أدرس الدالة : $f : x \mapsto xe^x$.

II– الدالة الأسية للأساس a :

1) تعريف :

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ،
الدالة العكسية للدالة log_a هي الدالة $x\mapsto a^x$ وتسمى الدالة الأسية للأساس a ، ونرمز لها بالرمز : $\exp_a$
أي : $(\forall y\in]0;+\infty[)(\forall x\in \mathbb{R})\quad : \quad log_a(y)=x \Leftrightarrow y=a^x$

2) خاصيات :

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ، لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$a^x=e^{x\ln a}$ ؛ $a^{x+y}=a^x a^y$ ؛ $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ ؛ $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ ؛ $(a^x)^y=a^{xy}$

3) دراسة الدالة $\exp_a$:

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ،

مجموعة التعريف : $D_{\exp_a}=\mathbb{R}$

النهايات : باستعمال العلاقة $a^x=e^{x\ln a}$: $\forall x\in\mathbb{R}$ لدينا ما يلي :

- إذا كان $a>1$ فإن : $\ln(a)>0$ ومنه :

$$\lim_{x\to+\infty}\exp_a(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\exp_a(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp_a(x)}{x}=+\infty$$

- إذا كان $0<a<1$ فإن : $\ln(a)<0$ ومنه :

$$\lim_{x\to+\infty}\exp_a(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\exp_a(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\exp_a(x)}{x}=-\infty$$

دراسة التغيرات : لدينا $a^x=e^{x\ln a}$: $\forall x\in\mathbb{R}$

إذن الدالة $\exp_a$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $\exp_a'(x)=\ln(a)\times e^{x\ln a}$ إذن :

- إذا كان $a>1$ فإن $\ln(a)>0$ ومنه : لكل x من $\mathbb{R}$: $\exp_a'(x)>0$
وبالتالي $\exp_a$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln(a)<0$ ومنه : لكل x من $\mathbb{R}$: $\exp_a'(x)<0$
وبالتالي $\exp_a$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي ،

جدول التغيرات :

حالة : $a>1$

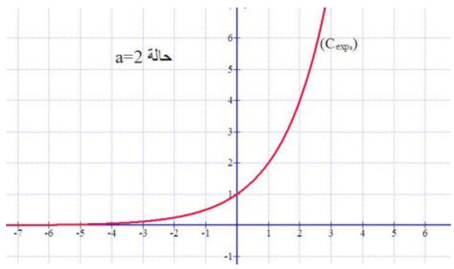
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp_a'(x)$	$+$
$\exp_a(x)$	$0 \nearrow +\infty$

حالة : $0<a<1$

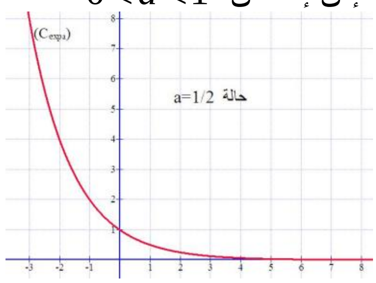
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp_a'(x)$	$-$
$\exp_a(x)$	$+\infty \searrow 0$

التمثيل المبياني :

- إذن إذا كان $a>1$



- إذن إذا كان $0<a<1$



تمرين :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2^{x-3}=3^{2-x}$

2) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^x$.