

Examen 1

Exercice 1 : Analyse

Partie I - Fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 2)e^{-x} - 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -(x + 1)e^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Partie II - Fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
5. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2 : Complexes et Géométrie

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. Soit $a = 2 + 2i\sqrt{3}$. Écrire a sous forme trigonométrique et exponentielle.
3. Calculer a^{2024} sous forme algébrique.
4. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes : $z_A = 1+i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -2i$.
 - (a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - (b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
 - (c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Examen 2**Exercice 2 : Nombres complexes et rotations**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 10 = 0$.
2. Soit $a = \sqrt{3} + i$.
 - (a) Déterminer le module et un argument de a .
 - (b) Écrire a sous forme exponentielle.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
 - (a) Donner l'écriture complexe de R .
 - (b) Déterminer l'affixe du point A' image du point A d'affixe a par R .
 - (c) Montrer que OAA' est un triangle isocèle.
4. Soit B le point d'affixe $b = -2i$. Déterminer l'affixe du point B' image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $2 + 2i$.

Exercice 2 : Équations complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 6z + 12 = 0$.
2. Soit $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$.
 - (a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
 - (b) Calculer z_1^{2025} .
3. Dans le plan complexe, soit A et B les points d'affixes z_1 et z_2 .
 - (a) Montrer que OAB est un triangle isocèle.
 - (b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange.
 - (c) Calculer l'aire du triangle ABC .

Examen 3

Exercice 1 : Problème d'analyse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ (inégalité de convexité).
5. Soit g définie par $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
 - (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - (b) Montrer que g est impaire.
 - (c) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
 - (d) Tracer (C_g) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Complexes et configurations

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. Soit $a = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
 - (a) Écrire a et b sous forme algébrique.
 - (b) Calculer $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ sous forme exponentielle.
3. Dans le plan complexe, on donne $A(2 + 2i)$, $B(2 - 2i)$, $C(-2 + 2i)$.
 - (a) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
 - (b) Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC .
 - (c) Soit D l'image de A par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de D .

Examen 4**Exercice 1 : Étude complète d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{-x} + 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)-1}{x}$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x(2-x)e^{-x}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions.
7. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 8z + 25 = 0$.
2. Soit $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 4 - 3i$.
 - (a) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.
 - (b) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. Dans le plan complexe, on considère les points M, N, P d'affixes : $z_M = 1 + i$, $z_N = -1 + i$, $z_P = -1 - i$.
 - (a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - (b) Quelle est la nature du triangle MNP ? Justifier.
 - (c) Déterminer l'affixe du point Q tel que $MNPQ$ soit un carré.
 - (d) Soit R la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point N' image de N par R .

Examen 5

Exercice 1 : Analyse

Partie I - Fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 2)e^{-x} - 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -(x + 1)e^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
4. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
6. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2 : Complexes et Géométrie

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. Soit $a = 2 + 2i\sqrt{3}$. Écrire a sous forme trigonométrique et exponentielle.
3. Calculer a^{2024} sous forme algébrique.
4. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes : $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -2i$.
 - (a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - (b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
 - (c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Examen 6**Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que f est impaire.
5. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
6. Montrer que la droite $(D) : y = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f) .
7. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Nombres complexes et rotations

1. Résoudre dans $\mathbb{C} : z^2 - 2z + 10 = 0$.
2. Soit $a = \sqrt{3} + i$.
 - (a) Déterminer le module et un argument de a .
 - (b) Écrire a sous forme exponentielle.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
 - (a) Donner l'écriture complexe de R .
 - (b) Déterminer l'affixe du point A' image du point A d'affixe a par R .
 - (c) Montrer que OAA' est un triangle isocèle.
4. Soit B le point d'affixe $b = -2i$. Déterminer l'affixe du point B' image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $2 + 2i$.

Examen 7**Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$.
4. Résoudre $f'(x) = 0$ (on trouvera deux solutions x_1 et x_2).
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
7. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Équations complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 6z + 12 = 0$.
2. Soit $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$.
 - (a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
 - (b) Calculer z_1^{2025} .
3. Dans le plan complexe, soit A et B les points d'affixes z_1 et z_2 .
 - (a) Montrer que OAB est un triangle isocèle.
 - (b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange.
 - (c) Calculer l'aire du triangle ABC .

Examen 8**Exercice 1 : Étude de fonctions exponentielles****I) - Fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 1 - xe^x$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -xe^x$.
3. Dresser le tableau de variations de g (on admettra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$).
4. Calculer $g(0)$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$.

II) - Fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{2x}{e^x - 1} + 3$ et on pose $f(0) = 5$ (prolongement par continuité).

1. (a) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2x}{e^x - 1} + 3$.
(b) Montrer que f est continue en 0 (utiliser $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
(b) En utilisant les résultats de la partie I, étudier le signe de $f'(x)$.
(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
5. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.
2. Soit $a = 2 + 2i$. Écrire a sous forme trigonométrique, puis calculer a^{2024} .
3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes : $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = -2$.
(a) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.
(b) Déterminer l'affixe du point D tel que $OADB$ soit un carré.
(c) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe de A' image de A par R .

Examen 9**Exercice 1 : Étude de fonctions exponentielles****I) - Fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x - 2)e^x + 2$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^x$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Calculer $g(0)$ et $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II) - Fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
(b) En utilisant la partie I, déterminer le signe de $f'(x)$.
(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la droite $(D) : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer (C_f) et (D) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C} : z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Soit $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
(a) Écrire a sous forme exponentielle.
(b) Calculer $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ sous forme algébrique.
3. Dans le plan complexe, A, B, C ont pour affixes $a, b, a + b$.
(a) Placer ces points dans le repère.
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$?
(c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Examen 10**Exercice 1 : Étude de fonctions exponentielles****I) - Fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(1 - x) - 1$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -xe^x$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Calculer $g(0)$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$.

II) - Fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (utiliser $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$). Prolonger f par continuité en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que f est une fonction paire.
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 6z + 13 = 0$.
2. Soit $a = 3 + 2i$ et $b = 3 - 2i$.
(a) Calculer $|a|$ et $|b|$.
(b) Écrire a et b sous forme trigonométrique.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
(a) Déterminer l'écriture complexe de R .
(b) Soit A' et B' les images de A et B par R . Calculer leurs affixes.
(c) Montrer que $A'B' = AB$.

Examen 11**Exercice 1 : Étude de fonctions exponentielles****I) - Fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x - 2) + 2$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x(x - 1)$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II) - Fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 8z + 20 = 0$.
2. Soit $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \sqrt{3} + i$.
(a) Écrire b sous forme exponentielle.
(b) Calculer a^{2023} .
3. Dans le plan complexe, A, B, C ont pour affixes $a, b, c = 4$.
(a) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
(b) Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
(c) Soit D l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de D .

Examen 12**Exercice 1 : Étude de fonctions exponentielles****I) - Fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(2 - x) - 2$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x(1 - x)$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Calculer $g(0)$ et $g(2)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II) - Fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que la droite $(D) : y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C} : z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
2. Soit $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
(a) Écrire a sous forme exponentielle.
(b) Calculer $a \times b$ sous forme algébrique.
3. Dans le plan complexe, A, B, C ont pour affixes $a, \bar{a}, b$.
(a) Montrer que A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
(b) Déterminer la nature du triangle OAB .
(c) Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Calculer l'afixe de A' image de A par R .

Bon courage !