V- المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و $a\neq 0$:

1) المعادلة $z^2=a$ حيث $a\in\mathbb{R}$:

خاصية 1 :

نعتبر في ℂ المعادلة $z^2=a$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.
- إذا كان $a>0$ فإن المعادلة $z^2=a$ تقبل حلين حقيقيين متقابلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
- إذا كان $a=0$ فإن المعادلة $z^2=a$ تقبل حل حقيقي وحيد هو 0
- إذا كان $a<0$ فإن المعادلة $z^2=a$ تقبل حلين تخيليين صرفين متقابلين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$

مثال : حل في ℂ المعادلة $z^2=-49$

2) المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و $a\neq 0$:

خاصية 2 :

نعتبر في ℂ المعادلة (E) : $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ و $\Delta=b^2-4ac$.
- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة (E) تقبل حل حقيقي وحيد هو : $\frac{-b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين هما : $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

ملاحظات :

إذا كان z_1 و z_2 هما حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ في حالة $\Delta\neq 0$ فإن :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2) \quad \text{و} \quad z_1+z_2=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad z_1.z_2=\frac{c}{a}$$

مثال :

حل في ℂ المعادلتين $z^2-2z+5=0$ و $5z^2+2z+1=0$ ثم عمل z^2-2z+5 و $5z^2+2z+1$.

VI- الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم - صيغة موافر وتطبيقاتها :

1) الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ من $ℂ^*$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in\mathbb{R}$ ، يكتب على شكل $z=re^{i\theta}$ ، هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد العقدي z .

أمثلة :

أكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية : i ، $-i$ ، -1 و $1+i$.

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية : $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $e^{i\frac{\pi}{3}}$

ملاحظة :

الكتابة العقدية للدوران: $z'=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-\omega)+\omega$ يمكن كتابتها: $z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

2) صيغتا أولير :

خاصية وتعريف :

لكل θ من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ ، هاتان الصيغتان تسميان صيغتي أولير.

3) صيغة موافر:

خاصية :

لكل θ من $\mathbb{R}$ ، ولكل عدد n من ℤ ، لدينا : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

هذه العلاقة تسمى صيغة موافر وتكتب أيضا على شكل : $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$

تطبيق : أنشر التعبير $(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ ثم استنتج $\cos(2\theta)$ و $\sin(2\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.