الأعداد العقدية

$I-$ عموميات :

1) تقديم مجموعة الأعداد العقدية :

أ) تمهيد :

نعتبر المعادلة $(E)\ :\ x^2+1=0$ ، هذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

ب) مبرهنة مقبولة :

توجد مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ تتضمن المجموعة $\mathbb{R}$ ، بحيث :
- $\mathbb{C}$ تحتوي على عنصر غير حقيقي نرمز له بالرمز i حيث : $i^2=-1$.
- كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين .
- عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{C}$ تمديد لنفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات .

ج) ملاحظة :

لنحل المعادلة $(E)\ :\ x^2+1=0$ في $\mathbb{C}$:

لدينا : $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2-(-1)=0 \Leftrightarrow x^2-i^2=0 \Leftrightarrow (x-i)(x+i)=0 \Leftrightarrow x=i$ أو $x=-i$

وبالتالي : $S=\{-i;i\}$

د) تعاريف ومصطلحات :

- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى **مجموعة الأعداد العقدية** ولدينا : $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ a\in\mathbb{R}\ ;b\in\mathbb{R}\}$
- لكل $z\in\mathbb{C}$ الكتابة $z=a+ib$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ ، تسمى **الشكل الجبري** للعدد العقدي z .
- العدد الحقيقي a يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد z ، ونكتب : $\mathrm{Re}(z)=a$
- العدد الحقيقي b يسمى **الجزء التخيلي** للعدد z ، ونكتب : $\mathrm{Im}(z)=b$
- إذا كان $b=0$ فإن العدد z **عدد حقيقي** $(z\in\mathbb{R})$ وإذا كان $a=0$ و $b\neq 0$ فإن العدد z عدد **تخيلي صرف** .

هـ) ملاحظات :

- نرمز لمجموعة الأعداد العقدية غير المنعدمة بـ $\mathbb{C}^*$.
- لدينا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
- لدينا : $i\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}\ /\ z=ib\ ;b\in\mathbb{R}\}$
- $i\mathbb{R}^*$ هي مجموعة الأعداد العقدية التخيلية الصرفة .
- إذا كان $z=a+ib$ حيث $a\notin\mathbb{R}$ أو $b\notin\mathbb{R}$ فإن هذه الكتابة ليست الشكل الجبري للعدد العقدي z .

أمثلة :

نعتبر الأعداد العقدية التالية : $z_1=\sqrt{2}-i$ و $z_2=-5i$ و $z_3=\sqrt{3}+1$

حدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد : z_1 ، z_2 و z_3 .

2- تساوي عددين من $\mathbb{C}$:

خاصية :

ليكن z و z' عددين من $\mathbb{C}$ ، لدينا : $z=z' \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\ \text{و}\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\right)$

ملاحظات :

لدينا : $\forall a\in\mathbb{R}\ ;\forall b\in\mathbb{R}\ ;\quad a+ib=0 \Leftrightarrow \left(a=0\ \text{و}\ b=0\right)$

و : $\forall a\in\mathbb{R}\ ;\forall b\in\mathbb{R}\ ;\quad a+ib\neq 0 \Leftrightarrow \left(a\neq 0\ \text{أو}\ b\neq 0\right)$

3) الكتابة الجبرية والعمليات في $\mathbb{C}$:

نشاط :

نعتبر العددين العقديين $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ حيث a و b و a' و b' أعداد حقيقية ،

1) أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية : $z+z'$ ، zz' و kz (حيث $k\in\mathbb{R}$)

2) نفترض أن $z'\neq 0$ ، أكتب على الشكل الجبري العددين العقديين $\dfrac{z}{z'}$ و $\dfrac{1}{z'}$.

خاصيات :

لتكن a و b و a' و b' و k أعداد حقيقية ، نضع $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ ، لدينا :
$z+z'=(a+a')+i(b+b')$ و $zz'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$ و $kz=(k.a)+i(k.b)$
إذا كان $z'\neq 0$ فإن : $\frac{1}{z'}=\frac{a'}{a'^2+b'^2}+i\frac{-b'}{a'^2+b'^2}$ و $\frac{z}{z'}=\frac{a.a'+b.b'}{a'^2+b'^2}+i\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$

تطبيقات :

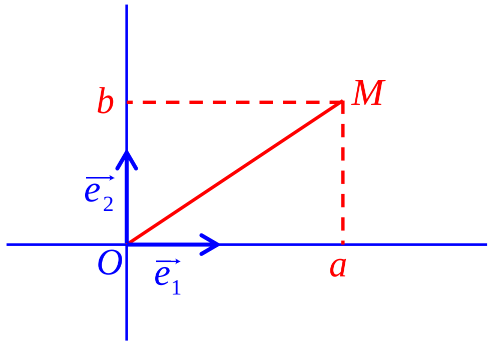
لتكن a و b عددين حقيقيين ، لدينا :
$(a+ib)^2=(a^2-b^2)+i(2ab)$ و $(a-ib)^2=(a^2-b^2)-i(2ab)$ و $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$
$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$ و $i^3=i^2i=-i$ و $i^4=i^2i^2=1$

4) التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

أ) صورة عدد عقدي – لحق نقطة :

تعريف :



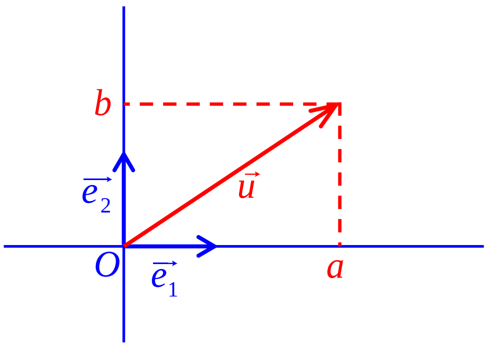
لكل عدد عقدي $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين،
النقطة $M(a;b)$ من المستوى (P) تسمى صورة العدد العقدي z ،
ويرمز لها بالرمز : $M(z)$.
لكل نقطة $M(a;b)$ من المستوى (P) ، العدد العقدي $z=a+ib$
يسمى لحق النقطة M ، ويرمز له بالرمز : $\text{aff}(M)$

ملاحظات ومصطلحات :

المستوى (P) المنسوب للمعلم $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ يسمى كذلك المستوى العقدي .
صورة العدد العقدي 0 هي النقطة O أصل المعلم .
صور الأعداد الحقيقية من □ تكون محور الأفاصيل ، ونسميه المحور الحقيقي .
أصل المعلم O وصور الأعداد التخيلية الصرفة من □ تكون محور الأراتيب ، ونسميه المحور التخيلي .

ب) الصورة المتجهية لعدد عقدي – لحق متجهة :

تعريف :



لكل عدد عقدي $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين،
المتجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ ، تسمى الصورة المتجهية للعدد العقدي z،
ويرمز لها بالرمز : $\vec{u}(z)$.
لكل متجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ ، العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى
لحق المتجهة $\vec{u}$ ، ويرمز له بالرمز : $\text{aff}(\vec{u})$

أمثلة :

1) أنشئ النقط : $M_1(1+2i)$ ، $M_2(2-3i)$ و $M_3(-2i)$.
2) أنشئ المتجهات : $\vec{u}_1(2+i)$ ، $\vec{u}_2(-1)$ و $\vec{u}(3i)$.

ج) لحق مجموع متجهتين :

نشاط 1 :

نعتبر المتجهتين : $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ و $\vec{v}=c\vec{e}_1+d\vec{e}_2$ ، قارن $\text{aff}(\vec{u}+\vec{v})$ مع $\text{aff}(\vec{u})+\text{aff}(\vec{v})$

خاصية 1 :

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا : $\text{aff}(\vec{u}+\vec{v})=\text{aff}(\vec{u})+\text{aff}(\vec{v})$

د) لحق جداء متجهة في عدد حقيقي :

نشاط 2 :

نعتبر المتجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ و العدد الحقيقي α ، قارن $\alpha\text{aff}(\vec{u})$ مع $\text{aff}(\alpha\vec{u})$

خاصية 2 :

ملاحظة : لكل α و β من $I\!R$
ولكل متجهتين من المستوى العقدي :
$\text{aff}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\text{aff}(\vec{u})+\beta\text{aff}(\vec{v})$

لكل متجهة $\vec{u}$ ولكل عدد حقيقي α لدينا : $\text{aff}(\alpha\vec{u}) = \alpha\,\text{aff}(\vec{u})$

هـ) لحق متجهة $\overrightarrow{AB}$:

نشاط 3 :

لتكن A و B نقطتين من المستوى و z_A و z_B لحقيهما على التوالي، حدد $\text{aff}(\overrightarrow{AB})$ بدلالة z_A و z_B .

خاصية 3 :

لتكن نقطتين A و B من المستوى ، لدينا : $\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$

و) تطبيقات :

- لحق منتصف قطعة :

نشاط 4 :

لتكن A و B نقطتين من المستوى و z_A و z_B لحقيهما على التوالي و I منتصف القطعة $[AB]$ ، حدد z_I لحق النقطة I بدلالة z_A و z_B .

خاصية 4 :

لتكن A و B نقطتين من المستوى و I منتصف القطعة $[AB]$ ، لدينا : $\text{aff}(I) = \dfrac{\text{aff}(A) + \text{aff}(B)}{2}$

- استقامية ثلاث نقط :

نشاط 5 :

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى مختلفة مثنى مثنى و z_A و z_B و z_C ألحاقها على التوالي ،

بين أن : (A و B و C نقط مستقيمية) يكافئ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

خاصية 5 :

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى مختلفة مثنى مثنى و z_A و z_B و z_C ألحاقها على التوالي ،

لدينا : A و B و C نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

تمرين تطبيقي :

بين أن النقط : $A(-1+i)$ ، $B(1+2i)$ و $C(5+4i)$ مستقيمية .

- أربع نقط متداورة :

خاصية 6 :

لتكن A و B و C و D أربع نقط **غير مستقيمية** ومختلفة مثنى مثنى من المستوى و z_A و z_B و z_C و z_D ألحاقها على التوالي، لدينا : A و B و C و D نقط متداورة $\Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \cdot \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

لتكن النقط : $A(1+5i)$ ، $B(5+3i)$ و $C(3-i)$ و $D(-1+i)$ ،

تحقق من أن النقط A و B و C و D غير مستقيمية ثم بين أنها متداورة .

5) مرافق عدد من :

أ) تعريف :

ليكن $z = a + ib$ حيث a و b عددين حقيقيين،
العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز $\bar{z}$ ، ونكتب : $\bar{z} = a - ib$.

أمثلة :

حدد مرافق العدد z في الحالات :

$z = 2+3i$ ، $z = 3-2i$ ، $z = 1+\sqrt{2}$ و $z = 8i$

ب) خاصيات :

نشاط 1 :

ليكن $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين، أحسب : $\overline{(\bar{z})}$ ، $\frac{z+\bar{z}}{2}$ ، $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ و $z\bar{z}$

نفترض أن $a=3$ وأن $b=2$ ، مثل النقطتين $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ ، ماذا تلاحظ ؟

خاصية 1 :

ليكن $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين، و $\bar{z}$ مرافقه و M و M' صورتي z و $\bar{z}$ على التوالي .

- لدينا : $\overline{(\bar{z})}=z$ ، $\frac{z+\bar{z}}{2}=\mathrm{Re}(z)$ ، $\frac{z-\bar{z}}{2i}=\mathrm{Im}(z)$ و $z\bar{z}=a^2+b^2$

- $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلتين بالنسبة للمحور الحقيقي .

ج) ملاحظات :

لدينا : $\forall z\in\mathbb{C} :\ z\bar{z}\in\mathbb{R}^+$ ، $\forall z\in\mathbb{C} :\ \bar{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ و $\forall z\in\mathbb{C} :\ \bar{z}=-z \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

نشاط 2 :

ليكن z و z' عددين من $\mathbb{C}$ و α عددا من $\mathbb{R}$،

قارن : $\overline{z+z'}$ مع $\bar{z}+\bar{z}'$ ثم قارن : $\overline{\alpha z}$ مع $\alpha\bar{z}$ ثم قارن : $\overline{zz'}$ مع $\bar{z}\,\bar{z}'$

خاصية 2 :

لكل عددين z و z' من $\mathbb{C}$ و α من $\mathbb{R}$، لدينا : $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ ، $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$ و $\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z}'$

د) استنتاجات :

لكل $z\in\mathbb{C}$ و $z'\in\mathbb{C}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ و $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

تمرين تطبيقي :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$،

حدد ثم مثل المجموعة : $E=\left\{M(z)\in(P)\,/\,z\neq 0\ et\ \left(z+\frac{1}{z}\right)\in i\mathbb{R}\right\}$

II– معيار عدد عقدي :

1) تعريف :

ليكن z عددا عقديا ، معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar{z}}$ ، ونرمز له بالرمز $|z|$

ونكتب : $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ ، إذا كان $z=a+ib$ فإن $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

2) التأويل الهندسي لمعيار عدد عقدي :

نشاط :

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ المتجهة $\vec{u}(z)$ والنقطتين $M(z)$ و $M'(z')$،

حيث z و z' من $\mathbb{C}$ ،

1) قارن الأعداد الحقيقية التالية : $|z|$ و OM و $\|\vec{u}\|$.

2) قارن الأعداد الحقيقية التالية : $|z'-z|$ و MM' و $\|\overrightarrow{MM'}\|$

خاصيات :

إذا كان z عددا من $\mathbb{C}$ ، صورته M وصورته المتجهة $\vec{u}$ فإن : $|z|=OM=\|\vec{u}\|$

إذا كان z_A و z_B عددين من $\mathbb{C}$ ، صورتيهما A و B على التوالي فإن : $|z_B-z_A|=AB=\|\overrightarrow{AB}\|$

مثال :

أحسب المسافة بين النقطتين : $A(1-i)$ و $B(-2+3i)$

3) خاصيات معيار عدد عقدي :

لكل عددين z و z' من $\mathbb{C}$ و n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$|\bar{z}|=|z|$ ، $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ ، $|zz'|=|z|.|z'|$ و $|z^n|=|z|^n$

وإذا كان $z'\neq 0$: $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ و $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

- ولدينا : $\mathrm{Re}(z)\leq|z|$ ، $\mathrm{Im}(z)\leq|z|$ و $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

تمرين تطبيقي :

أحسب معيار العدد z في الحالات : 1) $z=6-8i$ (2 $z=\left(\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^{2012}$ (3 $z=\frac{\left(\sqrt{7}-3i\right)^3}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}$

III– عمدة عدد عقدي غير منعدم :

في هذه الفقرة المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

1) تعريف :

ليكن z عددا عقديا **غير منعدما** ، و M صورته ، كل قياس للزاوية الموجهة $(\vec{e_1};\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة للعدد z ، ونرمز له بالرمز : $\arg(z)$.

ملاحظات :

إذا كان العدد θ عمدة للعدد العقدي z، فإن كل عدد $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هو كذلك عمدة للعدد z، ونكتب: $\arg(z)=\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ أو كذلك : $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

عادة نأخذ θ هو القياس الرئيسي للزاوية $(\vec{e_1};\overrightarrow{OM})$. $(\theta\in]-\pi;\pi])$.

أمثلة :

حدد عمدة كل عدد من الأعداد التالية : $z_1=3$ ، $z_2=2i$ ، $z_3=-1$ ، $z_4=-i$ و $z_5=1+i$

2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

نشاط 1 :

ليكن z عددا عقديا غير منعدما و θ عمدته ، بين أن $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

خاصية تعريف :

كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=|z|$ و $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ، ونكتب أيضا : $z=[r;\theta]$.

عكسيا، لكل زوج $(r;\theta)$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in\mathbb{R}$ يوجد عدد عقدي وحيد z من $\mathbb{C}^*$ بحيث $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ملاحظات :

- العدد 0 لا يمكن كتابته على الشكل المثلثي لأن عمدته غير محددة .
- ليكن z من $\mathbb{C}^*$ ، لدينا : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0\ ou\ \arg(z)\equiv 0[\pi]$ و $z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$
- لكل r و r' من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل θ و θ' من $\mathbb{R}$ لدينا : $[r;\theta]=[r';\theta']\Leftrightarrow(r=r'$ و $\theta\equiv\theta'\ 2[\pi])$

3) عمدة عدد عقدي غير منعدم والعمليات :

نشاط 2:

ليكن $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ عددين من $\mathbb{C}^*$ ،

حيث r و r' من $\mathbb{R}_+^*$ و θ و θ' من $\mathbb{R}$ بين أن: $\arg(zz')\equiv\theta+\theta'[2\pi]$ وأن: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\theta-\theta'[2\pi]$

خاصية :

ليكن z و z' عددين من $\mathbb{C}^*$ ولكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$ و $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

نشاط 3 :

ليكن z عددا من $\mathbb{C}^*$ بحيث $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و M صورته .

لتكن M_1 و M_2 و M_3 صور الأعداد $\bar{z}$ و $-z$ و kz $(k \in \mathbb{R}^*)$، على التوالي .

- أنشئ الشكل ثم حدد الشكل المثلثي للأعداد : $\bar{z}$ و $-z$ و kz .
- حدد الشكل المثلثي للعدد $\frac{1}{z}$.

خاصيات :

ليكن z عددا من $\mathbb{C}^*$ بحيث $z = [r;\theta]$ و k عدد حقيقي غير منعدم .

لدينا : $\bar{z} = [r;-\theta]$ و $-z = [r;\theta - \pi]$ و $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \left[\frac{1}{r};-\theta\right]$

إذا كان $k > 0$: $kz = [kr;\theta]$ و إذا كان $k < 0$: $kz = [-kr;\theta - \pi]$

تمرين تطبيقي :

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية : $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ و $z_2 = 1 - i$ و $z_3 = -5i$ و $z_4 = \sqrt{2}$

4) زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما :

أ) عمدة لحق متجهة $\overrightarrow{AB}$:

نشاط 1 :

ليكن z_A و z_B عددين مختلفين من $\mathbb{C}$ صورتيهما ع ت A و B، بين أن: $\arg(z_B - z_A) \equiv (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

خاصية 1 :

ليكن z_A و z_B عددين مختلفين من $\mathbb{C}$ و A و B صورتيهما ع ت، لدينا: $\arg(z_B - z_A) \equiv (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

ب) زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما:

نشاط 2 :

ليكن z_A و z_B و z_C ثلاثة أعداد من $\mathbb{C}$ بحيث $z_B \neq z_A$ و $z_C \neq z_A$ و A و B و C صورها على التوالي.

بين أن : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi]$

خاصية 2 :

ليكن z_A و z_B و z_C أعداد من $\mathbb{C}$ بحيث $z_B \neq z_A$ و $z_C \neq z_A$ A و B و C صورها على التوالي، لدينا :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi]$$

تمرين تطبيقي :

نعتبر النقط : $A(5-i)$ ، $B(3+i)$ و $C(2-4i)$ ، بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

$IV-$ تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الإعتيادية :

1) الكتابة العقدية للإزاحة :

نشاط :

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي (P) و $\vec{u}(z_0)$ متجهة ،

و $T = t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ ، نفترض أن $T(M) = M'$ ، حدد z' بدلالة z و z_0 .

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى العقدي (P) نقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ ومتجهة $\vec{u}(z_0)$.

تكون النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ إذا وفقط إذا كان : $z' = z + z_0$

العلاقة $z'=z+z_0$ تسمى الكتابة العقدية أو التمثيل العقدي للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$.

مثال :

نعتبر النقطة $A(1+2i)$ والمتجهة $\vec{u}(2-3i)$

1) حدد الكتابة العقدية للإزاحة $T=t_{\vec{u}}$ ، ثم استنتج لحق النقطة A' صورة النقطة A بالإزاحة T .

2) حدد التحويل ذو الكتابة العقدية : $z'=z+1-\sqrt{2}i$

2) الكتابة العقدية للتحاكي :

نشاط :

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي (P) و k عددا حقيقيا، و $H=h(\Omega;k)$ التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k ، نفترض أن $H(M)=M'$ ، حدد z' بدلالة z و ω و k.

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى العقدي (P) ثلاث نقط $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ وعددا حقيقيا k .
تكون النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k إذا وفقط إذا كان :
$z'-\omega=k(z-\omega)$
العلاقة $z'-\omega=k(z-\omega)$ تسمى الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k.

مثال :

نعتبر النقطتين $A(2-i)$ و $\Omega(1+i)$.

1) حدد الكتابة العقدية للتحاكي $h=H(\Omega;3)$ ثم استنتج لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي H .

2) حدد التحويل ذو الكتابة العقدية : $z'=-2z+12-3i$.

3) الكتابة العقدية للدوران :

نشاط :

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي (P) و θ عددا حقيقيا ، و $R=r(\Omega;\theta)$ الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ ، نفترض أن $R(M)=M'$ ، حدد z' بدلالة z و ω و θ.

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى العقدي (P) ثلاث نقط $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ وعددا حقيقيا θ .
النقطة M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ إذا وفقط إذا كان :
$z'-\omega=(z-\omega)(\cos\theta+i\sin\theta)$
العلاقة $z'-\omega=(z-\omega)(\cos\theta+i\sin\theta)$ تسمى الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ .

مثال :

نعتبر النقطتين $A(2+i)$ و $\Omega(1+2i)$.

1) أ) حدد الكتابة العقدية للدوران $R=r\left(\Omega;\frac{\pi}{4}\right)$

ب) استنتج لحق النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

2) حدد التحويل ذو الكتابة العقدية : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1+\sqrt{3}i$