

Exercise 4:

Résoudre les équation complexe suivantes : $z^2 + 2z + 5 = 0$, $z^2 + z + 1 = 0$, $z^4 + 1 = 0$
 $z^2 + 2z + 5 = 0$, $2z^2 - 4z + 7 = 0$

Solution:

1 → Pour $z^2 + 2z + 5 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$$

Puisque Δ est négatif, nous pouvons directement utiliser la formule : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$$\text{Donc } z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

2 → Pour $z^2 + z + 1 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

Encore une fois, Δ est négatif, donc :

$$z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

3 → Pour $z^4 + 1 = 0$:

On a

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= 0 \\ z^4 - (-1) &= 0 \\ (z^2)^2 - i^2 &= 0 \\ (z^2 - i)(z^2 + i) &= 0 \\ z^2 - i &= 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + i = 0 \\ z^2 &= i \quad \text{ou} \quad z^2 = -i \\ z^2 &= e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad z^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{remarquer que } i = 0 + 1 \times i = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \times i \\ z &= \pm (e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad z = \pm (e^{-i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ z &= \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad z = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ z &= \pm (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad \text{ou} \quad z = \pm (\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4}) \end{aligned}$$

Alors

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

4 → Pour $2z^2 - 4z + 7 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 16 - 56 = -40$$

Donc :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{40}}{2 \times 2} = \frac{4 - 2i\sqrt{10}}{4} = 1 - i\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{4 + i\sqrt{40}}{2 \times 2} = \frac{4 + 2i\sqrt{10}}{4} = 1 + i\frac{\sqrt{10}}{2}$$