الدوال اللوغاريتمية

I- دالة اللوغاريتم النيبيري :

1) نشاط :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$.

بين أن f تقبل دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$.

2) تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ التي تنعدم عند 1 تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري، ويرمز لها بـ ln

ملاحظة :

1) الدالة ln معرفة على المجال $]0;+\infty[$ (2 $\forall x>0 : \ln'(x)=\frac{1}{x}$ (3 $\ln(1)=0$

3) خاصيات :

الخاصية الأساسية :

لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

أمثلة :

$$\ln(6)=\ln(2\times3)=\ln(2)+\ln(3)$$
$$\ln(9)=\ln(3\times3)=\ln(3)+\ln(3)=2\ln(3)$$

خاصيات أخرى :

لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل $r\in\mathbb{Q}$ لدينا :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b) \qquad \ln(a^r)=r\ln(a)$$
$$\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a) \qquad \ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b \qquad \ln(a)<\ln(b)\Leftrightarrow a<b$$

تمرين تطبيقي :

1) حدد مجموعات تعريف الدوال f و g و h المعرفة كما يلي :

$f(x)=\ln(x+3)$ ، $g(x)=x+\ln(1-x^2)$ و $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) : $(E): \ln(x+1)+\ln(x-1)=0$

4) دراسة الدالة ln :

مجموعة التعريف : $D_{\ln}=]0;+\infty[$

النهايات : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

التغيرات : الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا لكل x من المجال $]0;+\infty[$: $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$ ،

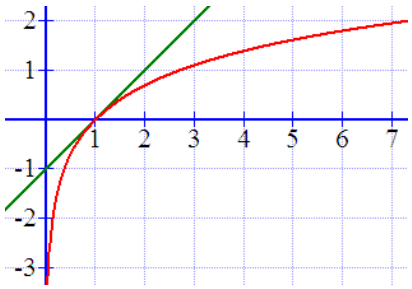
ومنه الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

إذن جدول تغيرات الدالة ln هو :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

نعلم أيضا أن الدالة $\ln$ متصلة ورتيبة قطعا على $]0;+\infty[$ ، إذن المعادلة $\ln(x)=1$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز e . أي : $\ln(e)=1$ ($e\approx 2,718281828459045235360287471352 6$)

التمثيل المبياني :



من خلال النهايات السابقة، منحنى الدالة $\ln$ يقبل محور الأراتيب مقاربا عموديا له، ويقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لمنحنى $\ln$ في النقطة $A(1;0)$

منحنى الدالة $\ln$ مقعر على المجال $]0;+\infty[$ لأن :

$$\forall x>0:\quad \ln''(x)=\frac{-1}{x^2}<0$$

5) نتائج هامة :

- لدينا النهايات : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $u(x)>0$ لكل x من I فإن الدالة $f: x\mapsto \ln(u(x))$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $u(x)\neq 0$ لكل x من I فإن الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x\mapsto \ln\left(|u(x)|\right)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

1) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^3}$.

2) حدد مجموعة تعريف ثم مشتقة الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\ln\left(x-x^2\right)$

3) حدد الدالة الأصلية G للدالة $\tan$ على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ والتي تنعدم عند $\dfrac{\pi}{3}$.

II– دالة اللوغاريتم ذات الأساس a :

1) تعريف :

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ، دالة اللوغاريتم ذات الأساس a هي الدالة المعرفة $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ويرمز لها بالرمز $\log_a$ ، أي : $\forall x>0:\quad \log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

2) ملاحظات :

$$\forall x>0:\log_e(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)\qquad \text{و}\qquad \log_a(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$$

3) خاصيات :

ليكن a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ، لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل $r\in\mathbb{Q}$ لدينا :

$$\log_a(x\,y)=\log_a(x)+\log_a(y)\ ,\quad \log_a(x^r)=r\log_a(x)\ ,\quad \log_a\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)\qquad ,\qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$$

4) دراسة الدالة $\log_a$ حيث $a>0$ و $a\neq 1$:

مجموعة التعريف : $D_{\log_a} =]0;+\infty[$

النهايات : باستعمال العلاقة $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ لدينا ما يلي : $\forall x > 0$:

إذا كان $a > 1$ فإن $\ln(a) > 0$ ومنه : $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln(a) < 0$ ومنه : $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$

التغيرات : لدينا $\forall x > 0$: $\log_a(x) = \left(\dfrac{1}{\ln(a)}\right)\ln(x)$

إذن الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا لكل x من $]0;+\infty[$: $\log_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{1}{x}$ إذن :

- إذا كان $a > 1$ فإن $\ln(a) > 0$ ومنه : لكل x من $]0;+\infty[$: $\log_a'(x) > 0$

أي $\log_a$ تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln(a) < 0$ ومنه : لكل x من المجال $]0;+\infty[$: $\log_a'(x) < 0$

أي $\log_a$ تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ ، وبالتالي :

حالة : $a > 1$

x	0		$+\infty$
$\log_a'(x)$	‖	$+$	
$\log_a(x)$	$-\infty$ ‖	↗	$+\infty$

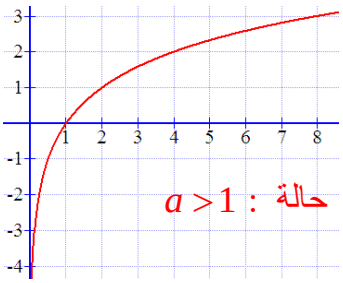
حالة : $0 < a < 1$

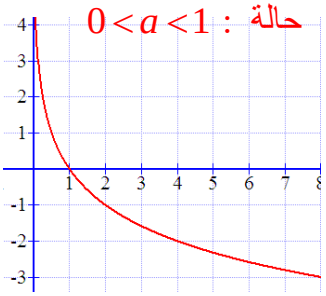
x	0		$+\infty$
$\log_a'(x)$	‖	$-$	
$\log_a(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$-\infty$

التمثيل المبياني : من خلال النهايات السابقة ، لدينا منحنى الدالة $\log_a$ يقبل محور الأراتيب مقاربا عموديا له ، بجوار 0 على اليمين ويقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

منحنى الدالة $\log_a$ مقعر إذا كان $a > 1$ لأن : $\forall x > 0$: $\log_a''(x) = \dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{-1}{x^2} < 0$

و محدب إذا كان $0 < a < 1$ لأن : $\forall x > 0$: $\log_a''(x) = \dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{-1}{x^2} > 0$





5) حالة خاصة (اللوغاريتم العشري)

تعريف :

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس 10 ويرمز لها بالرمز $\log$

أي : $\forall x > 0$: $\log(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

تطبيق :

أحسب : $\log(100)$ ، $\log(1000)$ و $\log(0,1)$ وحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\log(x) = \dfrac{1}{2}$.