Leçon nř5 : Fonctions logarithmes

Prof : El Maalmi Khalid
Niveau : 2 BAC/GC
Année scolaire : 2024/25

I. Fonction logarithme népérien

1. Définition

Définition

La fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée la fonction **logarithme népérien**, notée ln :

$$\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln(x)$$

Conséquence :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ x \in]0,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

2. Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

— $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ (Attention : $\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$)
— $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ (Attention : $\ln(a-b) \neq \ln(a) - \ln(b)$)
— $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ (car $\ln(1) = 0$)
— $\ln(a^n) = n\ln(a)$ (Cas particulier : $\ln(e^n) = n$ car $\ln(e) = 1$)
— Valeurs approchées : $\ln(2) \simeq 0,7$, $\ln(3) \simeq 1,1$, $e \simeq 2,7$

Application

1. **Calculer** : $\ln(6)$, $\ln(4)$, $\ln(8)$, $\ln(72)$, $\ln\left(\sqrt{2}\right)$, $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$.
2. **Simplifier** et **calculer** l'expression :

$$A = \ln\left(e^{2030}\right) - \ln\left(e^2\right) + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

3. **Écrire** en fonction de $\ln(3)$ l'expression :

$$B = \frac{1}{4}\ln(81) + \ln\sqrt{3} - \ln\left(\frac{1}{27}\right)$$

Remarque

Soient a et b deux réels strictement négatifs (donc $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$) :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|, \quad \ln\left(a^{2n}\right) = 2n\ln|a| \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

3. Équations et inéquations

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- $\ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$
- $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$
- $\ln(x) = 0 \iff x = 1$
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
- $\ln(x) \geq \ln(y) \iff x \geq y$
- $\ln(x) > \ln(y) \iff x > y$

Exemple

1. **Déterminer** l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x-1)$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

2. **Résoudre** l'équation $\ln(2x-1) = 1$:

$$\ln(2x-1) = 1 \iff \ln(2x-1) = \ln(e) \iff 2x-1 = e \iff x = \frac{e+1}{2} \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Donc $S = \left\{\frac{e+1}{2}\right\}$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(x) < 2\ln(3)$
- $\ln(x+2) < \ln(-3x+1)$
- $1 - \ln(x) \geq 0$
- $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(5)$
- $\ln(x-2) = \ln(3)$
- $\ln(3x) = \ln(x-1)$
- $\ln(x-3) = 4$
- $\ln(-5x+10) = 2$

4. Limites fondamentales

Théorème

- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$ (pour $n > 0$)
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (pour $n > 0$)

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} [\ln(x) + x^3\ln(x)] = -\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} x^3\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x\to +\infty} (x - \ln(x))$: forme indéterminée $\infty - \infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} (x - \ln(x)) = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Application

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0^+} (x - \ln(x))$

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^4 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - \ln(x))$

d) $\lim_{x\to 0^+} (x-2)\ln(x)$

e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)^2}{x}$

f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\ln(x)}{x}$

g) $\lim_{x\to 0^+} x(1+\ln(x))$

5. Étude de la fonction logarithme népérien

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note (C_f) la courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(x)$.

— **Domaine de définition** : $D_f =]0, +\infty[$

— **Tableau de variations** : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

— **Asymptote verticale** : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc (C_f) admet l'axe des ordonnées $x = 0$ comme asymptote verticale.

— **Branche infinie en** $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

— **Tangente au point d'abscisse 1** : $f'(1) = 1$, $f(1) = 0$, donc l'équation de la tangente est $y = x - 1$.

6. Dérivée d'une fonction de type $x \mapsto \ln(U(x))$

Théorème

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $U(x) > 0$ pour tout $x \in I$. La fonction $f : x \mapsto \ln(U(x))$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Exemple

Soit f définie sur $I =]-2, 2[$ par $f(x) = \ln(4 - x^2)$. Alors :

$$f'(x) = \frac{(4 - x^2)'}{4 - x^2} = \frac{-2x}{4 - x^2}.$$

Application

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué :

1. $f(x) = \ln(x^2 + 5)$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln(4x - 8)$, $I =]2, +\infty[$
3. $f(x) = \ln(9x + 18)$, $I =]-2, +\infty[$
4. $f(x) = \ln(3x^2 + 6x + 5)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \ln(4x^2 + 2x + 7)$, $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \ln(2x^4 + 4x^2 + 1)$, $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = x^2 \ln(x)$, $I =]0, +\infty[$
8. $f(x) = x^3 \ln(x) - 5x$, $I =]0, +\infty[$
9. $f(x) = x \ln(x) + 2x$, $I =]0, +\infty[$
10. $f(x) = x^2 \ln(x^2)$, $I =]0, +\infty[$

Remarque

Si U est dérivable sur I avec $U(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln|U(x)|$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

7. Logarithme décimal et logarithme de base a

Définition

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction **logarithme de base** a est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Remarque

Pour tout $a > 0$, $a \neq 1$, on a :

$$\log_a(a) = 1, \quad \log_a(1) = 0, \quad \log_e(x) = \ln(x).$$

Propriétés

Pour tous $x, y > 0$, $a > 0$ $(a \neq 1)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

— $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

— $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

— $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

— $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$

Définition

La fonction **logarithme décimal** est le logarithme de base 10, noté log :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Application

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \log_e(e^3) + \log_2(2^5)$
2. $B = \log_e(e^7) + \log_3(3^7)$
3. $C = \log_5(1) + \log_2(4)$
4. $D = \log_e(e^6) + \log_3(9)$
5. $E = \log_2(8) + \log_3(3^5)$
6. $F = \log_5(1) + \log_2(16)$
7. $G = \log(100) - \log(2025)$
8. $H = \log(10) - \log\left(\frac{1}{10^5}\right)$