Lycée Qualifiant Taghzirt	**Devoir 01 - S01 (2BAC.PC/SVT) Par Pr. MOHAMED JOUAHRI**	*R. MOSAID*
2025/2026	visit www.mosaid.xyz for more!	2BAC.PC/SVT

Exercice 1 : (4 points)

2 1. Résoudre dans $]0,+\infty[$: $(E_1) : \ln(x) - 3 = 0$; $(E_2) : \ln(x^2+8) = \ln(x+4) + \ln(x)$

2 2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
$f_1(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$; $f_2(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+5} + \dfrac{1}{x}$

Exercice 2 : (18 points)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

1 (1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

1 (2) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

1 (3) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

1 (4) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$.

1 (5) Calculer $g(1)$ puis montrer que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0,1]$ et que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$.

II. Considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{2} - \ln(x) + \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$,
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 (1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

1 (2) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\ln(x) - 1\right)\ln(x)$,
et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1 (3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} = 0$ (on pourra poser $\sqrt{x} = t$). Et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

1 (4) Montrer que (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique
de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

1 (5) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

1 (6) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

1 (7) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

1 (8) En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.

1 (9) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x) - x = \dfrac{1}{2}(\ln(x)-1)^2$ et déduire la position relative de (C_f) et (Δ).

1 (10) Tracer (C_f) et (Δ) dans le même repère orthonormé.

III. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$, et $U_{n+1} = f(U_n)$.

1 (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq e$.

1 (2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

1 (3) En déduire que la suite (U_n) est convergente puis déterminer $\lim U_n$.

﴿ٱللَّهُ يَعۡلَمُ مَا تَحۡمِلُ كُلُّ أُنثَىٰ وَمَا تَغِيضُ ٱلۡأَرۡحَامُ وَمَا تَزۡدَادُۖ وَكُلُّ شَيۡءٍ عِندَهُۥ بِمِقۡدَارٍ﴾ (الرعد 8)