Exercice 1 : *4pts*

(2) **1.** Résoudre dans $]0,+\infty[$: • $\ln(x)-2=0$ • $\ln(2x^2+1)=\ln(x+2)+\ln(x)$

(2) **2.** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=x^3+x^2-2$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $f_2(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 : *16pts*

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x+(x-2)\ln(x)$

(1) **1)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) **Montrer que :**

(1) **a–** $\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=\dfrac{2x-2+x\ln(x)}{x}$

(1) **b–** $\forall x\in]0,1],\ 2x-2+x\ln(x)\leq 0$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ 2x-2+x\ln(x)\geq 0$

(1) **3)** Etudier les variations de g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$

(0.5) **4)** En déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)>0$

(1) **5)** Montrer que : $g(x)\leq x \quad \forall x\in[1,2]$

II. On considère (U_n) la suite numérique définie par : $U_0=\sqrt{e}$ et $U_{n+1}=g(U_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

(1) **1)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1<U_n<2$.

(1) **2)** Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

(1) **3)** En déduire que la suite (U_n) est convergente puis déterminer $\lim U_n$.

III. Considérons la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\ln(x)\right)\ln(x)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1) **1)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(0.5) **2)** **a–** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(1) **b–** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2(x)}{x}=0$ (On pourra poser $t=\sqrt{x}$ on rappèlle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$)

(0.5) **c–** Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln(x)}{x^2}+\dfrac{\ln^2(x)}{x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

(1) **d–** En déduire que la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ à préciser sa direction.

(1) **3)** **a–** Montrer que : $f'(x)=\dfrac{1}{x}g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

(0.5) **b–** Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

(0.5) **c–** Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 1.

(0.5) **4)** Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α telle que $\sqrt{e}<\alpha<e$.

(1) **5)** Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, (On prend $\sqrt{e}\approx 1.6$ et $e\approx 2.7$).

Good Luck !