الدوال الأصلية

I- دالة أصلية لدالة على مجال :

1) تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I .
نقول إن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كانت :
F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x)=f(x)$ لكل x من I

2) أمثلة :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=4x^3$ ، والدالة F المعرفة بما يلي : $F(x)=x^4$ ،
- لدينا F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $F'(x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، إذن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
- هل الدالة G المعرفة بـ : $G(x)=x^4+1$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ؟

3) خاصيات :

نشاط :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ،ولتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .
لتكن G الدالة المعرفة على I بـ $G(x)=F(x)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$
تحقق من أن G قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $G'(x)$ لكل x من المجال I ، ماذا تستنتج ؟

خاصية 1 :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ، ولتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .
كل دالة G معرفة على I بـ $G(x)=F(x)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على المجال I.

خاصية 2 :

لتكن f دالة تقبل دالة أصلية على مجال I و $x_0\in I$ و $y_0\in\mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق : $G(x_0)=y_0$.

مثال :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2$ ،
1) حدد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 1 (أي تحقق $F(1)=0$)

خاصية 3 :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين على التوالي للدالتين f و g على مجال I ، وكان k عددا حقيقيا فإن :
الدالة $F+G$ هي دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I .
الدالة $k.F$ هي دالة أصلية للدالة $k.f$ على المجال I .

مثال :

حدد الدالة الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin x$ والتي تنعدم عند 0 .

خاصية 4 :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على المجال I .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x\sin x-\cos\frac{1}{x} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} F(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \ ; \ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f غير متصلة في 0 .
2) بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
3) ماذا تستنتج ؟

II- جدول الدوال الأصلية الاعتيادية :

لتكن u و v دالتين معرفتين على مجال I .

صيغة الدالة f	صيغة الدالة الأصلية F
0	c $(c \in \mathbb{R})$
a $(a \in \mathbb{R})$	$ax+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^*$ و $n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
x^r $(r \in \mathbb{Q}^*$ و $r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\cos(ax+b)$ $(a \neq 0$ و $b \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\sin(ax+b)$ $(a \neq 0$ و $b \in \mathbb{R})$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi ; k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$u'(x)\times(u(x))^r$ $(r \in \mathbb{Q}^*$ و $r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$	$u(x)\times v(x)+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$ $(u \neq 0$ على $I)$	$\frac{1}{u(x)}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$ $(v \neq 0$ على $I)$	$\frac{u(x)}{v(x)}+c$ $(c \in \mathbb{R})$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ $(u > 0$ على $I)$	$\sqrt{u(x)}+c$ $(c \in \mathbb{R})$

تمرين تطبيقي :

حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية على مجموعات تعريفها :

$f : x \mapsto \cos^3 x$ ، $g : x \mapsto \sin^2 x$ و $h : x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$