LES FONCTIONS PRIMITIVES

Série d'exercices

I. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$.

Exemples 1 :

1. Une primitive de $f(x) = 3$ est $F(x) = 3x$.
2. Une primitive de $f(x) = x^4$ est $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$.
3. Une primitive de $f(x) = 2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$.

Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

II. Primitives des polynômes

Pour $n \neq -1$: $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

On utilise également : $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Soit $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.
Une primitive est $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$.

Soit $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$.
Une primitive est $F(x) = x^4 + 2x^3 - 2x$.

Soit $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 7$.
Une primitive est $F(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 7x$.

III. Primitives de la forme $u' \cdot u^n$

Pour $n \neq -1$, une primitive de $f(x) = u'(x)[u(x)]^n$ est $F(x) = \dfrac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$, sur tout intervalle où l'expression est définie.

$f(x) = 2x(x^2+4) = (x^2+4)'(x^2+4)$.
Donc une primitive est $F(x) = \dfrac{(x^2+4)^2}{2}$.

$f(x) = 4x(2x^2+1)^3 = (2x^2+1)'(2x^2+1)^3$.
Donc une primitive est $F(x) = \dfrac{(2x^2+1)^4}{4}$.

$f(x) = 5(3x-1)^4 = \dfrac{5}{3}(3x-1)'(3x-1)^4$.
Donc une primitive est $F(x) = \dfrac{(3x-1)^5}{3}$.

IV. Fonctions contenant des racines

On peut écrire les racines sous forme de puissances : $\sqrt[n]{u(x)} = [u(x)]^{1/n}$.

Soit $g(x) = 3x\sqrt[4]{2x^2-7}$.
On écrit $g(x) = \dfrac{3}{4}(4x)(2x^2-7)^{1/4}$.
Or $(2x^2-7)' = 4x$.
Donc une primitive est $G(x) = \dfrac{3}{5}(2x^2-7)^{5/4}$.

Soit $g(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3x^2+2}}$.
On écrit $g(x) = \dfrac{5}{6}(6x)(3x^2+2)^{-1/2}$.
Or $(3x^2+2)' = 6x$.
Donc une primitive est $G(x) = \dfrac{5}{3}\sqrt{3x^2+2}$.

Soit $g(x) = 4x\sqrt[3]{x^2+5}$.
On écrit $g(x) = 2(2x)(x^2+5)^{1/3}$.
Or $(x^2+5)' = 2x$.
Donc une primitive est $G(x) = \dfrac{3}{2}(x^2+5)^{4/3}$.

Tableau des primitives usuelles

Fonction $f(x)$	**Une primitive** $F(x)$
k	$kx + C$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \neq 1)$	$\dfrac{x^{1-n}}{1-n} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{cos(x)}{sin(x)}x + C$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

EXERCICES

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur tout intervalle où elles sont définies.

Exercice 1

Fonctions polynômes

1. $f_1(x) = 2x + 3$
2. $f_2(x) = 5x^2 - 4$
3. $f_3(x) = 3x^3 + 2x$
4. $f_4(x) = 4x^2 - 6x + 1$
5. $f_5(x) = 7x^4 - 3x^2$
6. $f_6(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6$
7. $f_7(x) = 6x^5 - 2x^3 + 3$
8. $f_8(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4$
9. $f_9(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
10. $f_{10}(x) = 5x^6 - 4x^4 + 2x^2$
11. $f_{11}(x) = 3x^5 + 7x^3 - 2x$
12. $f_{12}(x) = 9x^4 - 6x^2 + 5x - 8$
13. $f_{13}(x) = 2x^7 - 3x^3 + 4$
14. $f_{14}(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 7$
15. $f_{15}(x) = 10x^3 + 5x^2 - 8x + 2$
16. $f_{16}(x) = 4x^6 - 3x^5 + 2x^2 - 1$
17. $f_{17}(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 6$
18. $f_{18}(x) = 7x^8 - 4x^5 + 3x^2$
19. $f_{19}(x) = 3x^6 + 2x^4 - 5x^3 + x$
20. $f_{20}(x) = 12x^5 - 10x^3 + 8x - 9$

Exercice 2

Fonctions de la forme $\frac{1}{x^p}$

1. $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$
2. $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$
3. $f_3(x) = \frac{2}{x^4}$
4. $f_4(x) = \frac{5}{x^2}$
5. $f_5(x) = \frac{3}{x^5}$
6. $f_6(x) = \frac{4}{x^6}$
7. $f_7(x) = \frac{7}{x^3}$
8. $f_8(x) = \frac{2}{x^7}$
9. $f_9(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2}$
10. $f_{10}(x) = \frac{5}{x^6} - \frac{3}{x^3}$

EXERCICES (SUITE)

Exercice 3

Fonctions contenant des racines

1. $f_1(x) = x\sqrt{x^2+1}$
2. $f_2(x) = 3x\sqrt{x^2+4}$
3. $f_3(x) = 2x\sqrt[3]{x^2+3}$
4. $f_4(x) = 5x\sqrt[4]{x^2+2}$
5. $f_5(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$
6. $f_6(x) = \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
7. $f_7(x) = 4x\sqrt[5]{2x^2+3}$
8. $f_8(x) = \frac{6x}{\sqrt[4]{3x^2+7}}$
9. $f_9(x) = 2x\sqrt{5x^2+1}$
10. $f_{10}(x) = 3x\sqrt[3]{4x^2-1}$

Exercice 4

Fonctions diverses

1. $f_1(x) = 2(2x+3)^4$
2. $f_2(x) = 3(3x-2)^5$
3. $f_3(x) = \frac{4}{(2x+1)^3}$
4. $f_4(x) = 5x(x^2+2)^4$
5. $f_5(x) = 6x(3x^2+1)^2$
6. $f_6(x) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$
7. $f_7(x) = 2(5x-1)^3 + 3x^2$
8. $f_8(x) = \frac{3x^2}{(x^3+4)^2}$
9. $f_9(x) = 4x(2x^2+5)^3$
10. $f_{10}(x) = \frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Détermination d'une primitive avec une condition initiale

Énoncé :

Trouver la fonction primitive F de

$$f(x) = 5x^2 - 7x + 3$$

qui vérifie la condition $F(1) = 4$.

Solution :

1. Déterminons une primitive de f.

On a :

$$F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + C$$

2. Utilisons la condition initiale $F(1) = 4$.

$$\frac{5}{3} - \frac{7}{2} + 3 + C = 4$$

Donc :

$$\frac{7}{6} + C = 4$$

Ainsi :

$$C = 4 - \frac{7}{6} = \frac{17}{6}$$

3. Conclusion :

La fonction primitive cherchée est :

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \frac{17}{6}}$$

Pour chaque fonction f, déterminer la primitive F qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $F(0) = 2$.
2. $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$; $F(1) = 3$.
3. $f(x) = 6x^2 - 4x + 2$; $F(-1) = 1$.
4. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; $F(0) = -2$.

Bon courage ! Travaillez avec méthode et rigueur.