Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$:
$f(x) = x^2 + 3x\sqrt{x^2+2}$; $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+10}}$; $\quad f(x) = 3x^2(x^3+1)^5 + \sin(2x)$
2. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2x+5}{(x-1)^3}$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que : $(\forall x \in I) \quad g(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.
   b) En déduire la primitive de la fonction g sur l'intervalle I qui s'annule en 0.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n+1}{U_n+2}$; $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\quad 0 \leq U_n < 1$.
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(1 - U_n)$.
4. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim U_n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$.
   a) Montrer que (V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
   b) Déterminer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et déduire la nature de la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = 6\sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)$, puis étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
4. a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f(x) - x = x\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(1 - 3\sqrt{x}\right)$.
   b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
5. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f''(x) = \dfrac{3\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$, puis étudier la concavité de $(\mathscr{C}_f)$.
6. Déterminer les points d'intersections de $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses, puis construire $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = \dfrac{4}{9}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = f(U_n)$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\quad \dfrac{1}{9} \leq U_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante puis déterminer $\lim U_n$.

﴿بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ طه (1) • مَآ أَنزَلْنَا عَلَيْكَ ٱلْقُرْءَانَ لِتَشْقَىٰٓ (2) • إِلَّا تَذْكِرَةً لِّمَن يَخْشَىٰ (3) • تَنزِيلًا مِّمَّنْ خَلَقَ ٱلْأَرْضَ
وَٱلسَّمَٰوَٰتِ ٱلْعُلَى (4) • ٱلرَّحْمَٰنُ عَلَى ٱلْعَرْشِ ٱسْتَوَىٰ (5) • لَهُۥ مَا فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلْأَرْضِ وَمَا بَيْنَهُمَا وَمَا تَحْتَ ٱلثَّرَىٰ (6) •
وَإِن تَجْهَرْ بِٱلْقَوْلِ فَإِنَّهُۥ يَعْلَمُ ٱلسِّرَّ وَأَخْفَى (7) • ٱللَّهُ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ ۖ لَهُ ٱلْأَسْمَآءُ ٱلْحُسْنَىٰ (8) •﴾ (طه الآيات 1-8)