Exercice 1

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x + 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.
2. (a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g.
   (b) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x\ln^2(x) + 2x\ln(x) + 1$.

1. Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) : h(x) = g(x) + x\left[\left(\ln(x) + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right]$.
2. Déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[) : h(x) > 0$.

Partie C : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2 + \ln(x) + 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left]\dfrac{1}{e^2}, \dfrac{1}{e}\right[$.
6. Soit (Δ) la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
   (a) Vérifier que l'équation de (Δ) est $(\Delta) : y = x$.
   (b) Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) : f(x) - x = (\ln(x) + 1)g(x)$.
   (c) Étudier la position relative de (C_f) et de la droite $(\Delta) : y = x$.
7. Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{1}{e} \leq U_n \leq 1$.
2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 2

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = x^3 + \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   (b) $g(x) = \sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}} + \dfrac{\ln^3(x)}{x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
2. (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) Déterminer la fonction primitive H de la fonction h sur $]0, +\infty[$ telle que : $h(x) = x^3 + \ln(x)$ et $H(1) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(I) : \dfrac{2+\ln(x)}{\ln(x)-1} \leq 2$ et $(E) : \log^2(x-1) + 3\log\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + 2 = 0$.