نهاية متتالية عددية

I- نهاية متتالية عددية :

تعريف :

ليكن J مجالا ضمن $\mathbb{R}$ ، و $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية و $n_0 \in I$.
نقول أن جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تنتمي إلى المجال J ابتداء من الرتبة n_0 إذا كان $\forall n \geq n_0 : u_n \in J$

مثال :

نعتبر المجال المفتوح $\left]\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right[$ والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي $u_n = \frac{1}{n}$

بما أن $\forall n \geq 3 : 0 \leq u_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ فإن جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تنتمي إلى المجال $\left]\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right[$ ابتداء من الرتبة 3 .

1) متتالية تؤول إلى عدد حقيقي :

تعريف :

نقول إن نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي العدد الحقيقي ℓ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$ ، إذا كان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ابتداء من رتبة معينة.

ملاحظة :

المجالات المفتوحة التي مركزها ℓ هي : المجال $]-\infty;+\infty[$ و كل مجال على شكل $]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$.

خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تؤول إلى عدد حقيقي ℓ فإن هذا العدد وحيد .

2) متتالية تؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف :

- نقول إن نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim u_n = +\infty$ إذا كان كل مجال مفتوح من نوع $]a;+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ابتداء من رتبة معينة.
- نقول إن نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ أو $\lim u_n = -\infty$ إذا كان كل مجال مفتوح من نوع $]-\infty;a[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ابتداء من رتبة معينة.

3) تقارب متتالية عددية :

تعريف :

- نقول إن متتالية $(u_n)_{n\in I}$ متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية.
- نقول إن متتالية $(u_n)_{n\in I}$ متباعدة إذا كانت غير متقاربة (أي لا تقبل نهاية أو تقبل نهاية لا منتهية).

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي .
لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$

4) نهايات المتتاليات المرجعية :

خاصية :

ليكن $p \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ ، لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

إذا كان $r > 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$

أمثلة :

أحسب النهايات : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{5}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[8]{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{4}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+n^{-0,25}\right)$.

II– العمليات على النهايات – المتتاليات والترتيب :

العمليات على نهايات المتتاليات هي نفس العمليات على نهايات الدوال العددية .

1) أمثلة :

حدد النهايات : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^3-3n^2-1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n}{2n^2+1}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3n+4}{n^3+5n^2-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}-n$

2) النهايات والترتيب :

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين ، و ℓ و ℓ' نهايتيهما على التوالي .
إذا كان $u_n \geq 0$ ابتداء من رتبة معينة فإن $\ell \geq 0$.
إذا كان $u_n \leq v_n$ ابتداء من رتبة معينة فإن $\ell \leq \ell'$.

ملاحظات :

إذا كان $u_n > 0$ ابتداء من رتبة معينة فإن $\ell \geq 0$ وليس بالضرورة $\ell > 0$.
إذا كان $u_n < v_n$ ابتداء من رتبة معينة فإن $\ell \leq \ell'$ وليس بالضرورة $\ell < \ell'$.

أمثلة :

a) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ : $u_n = \dfrac{1}{n}$ لدينا : $u_n > 0$; $\forall n \geq 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بـ : $u_n = -\dfrac{1}{n}$ و $v_n = \dfrac{1}{n}$

لدينا : $u_n < v_n$; $\forall n \geq 1$ لكن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

III– مصاديق التقارب :

خاصية 1 :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتين عدديتين و ℓ عدد حقيقي .
إذا كان $|v_n - \ell| \leq u_n$ ابتداء من رتبة معينة وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن $(v_n)_{n\in I'}$ متقاربة ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

مثال :

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ : $v_n = \dfrac{2n+\sin n}{n}$

بين أن : $|v_n - 2| \leq \dfrac{1}{n}$: $\forall n \geq 1$ ثم استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها .

خاصية 2 :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I'}$ و $(w_n)_{n\in I''}$ متتاليات عددية و ℓ عدد حقيقي .
إذا كان $u_n \leq v_n \leq w_n$ ابتداء من رتبة معينة وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
فإن $(v_n)_{n\in I'}$ متقاربة ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2+1}$
بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها .

خاصية 3 :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتين عدديتين .
إذا كان $u_n \leq v_n$ ابتداء من رتبة معينة وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
إذا كان $u_n \leq v_n$ ابتداء من رتبة معينة وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = 2n + \sin(n)$

تحقق من أن : $\forall n \geq 0 : \; 2n - 1 \leq 2n + \sin n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

خاصية 4 :

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة وكل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة .

نتيجة :

كل متتالية موجبة و تناقصية هي متتالية متقاربة وكل متتالية سالبة و تزايدية هي متتالية متقاربة .

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ ، بين أن (u_n) متقاربة .

IV – متتاليات خاصة :

1) تقارب المتتالية (a^n) :

خاصية :

ليكن a عدد حقيقي .

إذا كان $a > 1$	فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.	إذا كان $-1 < a < 1$	فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
إذا كان $a = 1$	فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.	إذا كان $a \leq -1$	فإن : (a^n) لا تقبل نهاية .

مثال :

أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n - 3^n}{3^n}\right)$.

2) تقارب المتتالية $(v_n)_{n\in I}$ حيث $v_n = f(u_n)$:

خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متقاربة و ℓ نهايتها و f دالة متصلة في ℓ فإن المتتالية $(v_n)_{n\in I}$ المعرفة بـ $v_n = f(u_n)$; $\forall n \in I$ متقاربة ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$ ، أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$

مثال :

نضع : $u_n = \dfrac{1}{3}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \pi\right)$ و $v_n = \sin(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، أحسب النهاية : $\lim v_n$.

ملاحظة :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = E(x)$ ،

تحقق من أن : $\forall n \geq 0 : \; 0 \leq u_n < 1$ ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ و $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$ ، ماذا تستنتج ؟

3) متتاليات من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

خاصية :

لتكن f دالة عددية و I مجال ضمن D_f و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية معرفة بـ $u_{n+1} = f(u_n)$: $\forall n \geq n_0$.

إذا كان : f متصلة على I و $f(I) \subset I$ و $u_{n_0} \in I$ و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة ،

فإن نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حل للمعادلة : $f(x) = x$

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

1) بين أن $1 \leq u_n \leq 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا واستنتج أنها متقاربة .

3) أحسب $\lim u_n$.