Exercice 40 — BAC 2010 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
2. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *1pt*
   - b) Montrer que $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. *0.75pt*
   - c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de$\mathbb{N}$. *0.5pt*

Exercice 41 — BAC 2010 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21 + u_n}$ pour tout n de$\mathbb{N}$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*
2. Montrer que $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente. *0.5pt*
4. - a) Montrer par récurrence que $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*
   - b) Déterminer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 42 — BAC 2011 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n. *1,5pt*
   - b) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3 \times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *1pt*

Exercice 43 — BAC 2011 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. - a) Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
   - b) Montrer par récurrence que $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2. On considère la suite numérique (v_n) définie par : 1,5pt

$$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n

3. Montrer que $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. 1pt

Exercice 44 — BAC 2012 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.25pt
2. a. Montrer par récurrence que $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.5pt
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0.5pt
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0.25pt
3. Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. En utilisant la question **1**. montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n. 0.75pt
   b. Montrer que $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite de la suite (u_n). 0.75pt

Exercice 45 — BAC 2012 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \text{ pour tout } n \text{ deN } \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $\dot{u}_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.5pt
2. On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. Vérifier que $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.5pt
   b. Montrer queu $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.5pt
3. a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n. 1pt
   b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n). 0.5pt

Exercice 46 — BAC 2013 — N

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1. Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour

tout n de $\mathbb{N}^*$. *1pt*

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{5}{5-u_n} \text{ pour tout n de } \mathbb{N}^*.$$

a Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que *0,75pt*

$$v_{n+1} - v_n = 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

b Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que *1pt*

$$u_n = 5 - \frac{5}{n} \text{ pour tout n de } \mathbb{N}^*.$$

c Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *0,25pt*

Exercice 47 — BAC 2013 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 Vérifier que : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2 **a** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0,5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0,25pt*

3 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n. *0,5pt*

b En déduire que $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 48 — BAC 2014 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 13 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 \text{ pour tout n de } \mathbb{N}.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et exprimer v_n en fonction de n. *1pt*

b En déduire que $u_n = 14 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de$\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0.75pt*

c Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 13,99$. *0.5pt*

Exercice 49 — BAC 2014 — R

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*
2. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

   a. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1. *1pt*

   b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*

   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *0.5pt*

Exercice 50 — BAC 2015 — N

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}.$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $1 \le u_n \le \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante *0,5pt*
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0,75pt*

Exercice 51 — BAC 2015 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante. *0,75pt*
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0,25pt*
4. Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n. *0,75pt*

   b. En déduire que $u_n = 5 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 52 — BAC 2016 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \text{ pour tout } n \text{ de} \mathbb{N}.$$

1 Vérifier que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

b Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer u_n en fonction de n. *0.5pt*

c Déterminer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 53 — BAC 2016 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 a Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

b Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

2 Soit $(v_)$la suite numérique telle que $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ et exprimer v_n en fonction de n. *1pt*

b Montrer que $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n). *0.75pt*

Exercice 54 — BAC 2017 — N

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x.$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1 Montrer par récurrence que **:** $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n. *0,5pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante *0,5pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0,75pt*

Exercice 55 — BAC 2017 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 17$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 12$ pour tout entier naturel n.

1 a Montrer par récurrence que : $u_n > 16$ pour tout entier naturel n. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente. *0,5pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique. *0,5pt*

b En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n). *0,5pt*

c Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,001$. *0,5pt*

Exercice 56 — BAC 2018 — N

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)\,e^{-x} + x$.

Soit((u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

3 En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

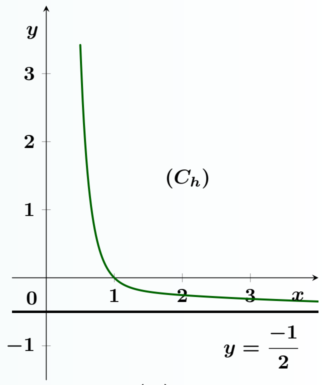
Exercice 57 — BAC 2018 — R

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$



1 Vérifier que $h(1) = 0$. *0.25pt*

2 **Dans la figure ci-contre**, (C_h) est la représentation graphique de la fonction h.
Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$ puis en déduire que : $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$. *0.75pt*

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.75pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

Exercice 58 — BAC 2019 — N

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 **a** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0,5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente . *0,5pt*

2 Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 59 — BAC 2019 — R

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente. *0,5pt*
3. Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 60 — BAC 2020 — N

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 *0.25pt*
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n > 0$ *0.5pt*
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$

   puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ *1pt*

   b. Calculer $\lim u_n$ *0.5pt*
4. On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ *0.75pt*

   b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *1pt*

Exercice 61 — BAC 2020 — R

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n < 2$ *0.5pt*
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

   a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 *0.5pt*

   b. Écrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

   c. Calculer la limite de la suite (u_n) *0.25pt*

Exercice 62 — BAC 2021 — N

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de IN

1. Calculer u_1 *0.25pt*
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ *0.5pt*
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ *0.5pt*

   b. En déduire la monotonie de la suite (u_n) *0.5pt*
4. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n) *0.75pt*

   b. On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$ *0.5pt*

5 **a** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ *0.5pt*

b En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.5pt*

Exercice 63 — BAC 2021 — Ⓡ

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ *0.5pt*

2 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$ *0.5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est convergente. *0.5pt*

3 On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme. *0.75pt*

b Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.75pt*

c Calculer la limite de la suite (u_n) *0.5pt*

4 A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$? *0.5pt*

Exercice 64 — BAC 2022 — Ⓝ

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$
Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.5pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

4 Calculer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 65 — BAC 2022 — Ⓡ

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}; \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

1 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n > 1$ *0,5pt*

b Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente *0,75pt*

2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme. *0,5pt*

b Écrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n). *0,5pt*

c Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2021}$ *0,25pt*