Examen National 2008 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{5\mathcal{U}_n}{2\mathcal{U}_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{U}_0 = 2$

1) Montrer que $\mathcal{U}_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{\mathcal{U}_n - 1}{\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2009 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 0$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{1+4\mathcal{U}_n}{7-2\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Vérifier que $1-\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{6\,(1-\mathcal{U}_n)}{5+2\,(1-\mathcal{U}_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $1-\mathcal{U}_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{2\mathcal{U}_n - 1}{\mathcal{U}_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2010 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{3\mathcal{U}_n - 1}{2\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_n - 1 > 0$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{\mathcal{U}_n - 1}{2\mathcal{U}_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $\mathcal{V}_n = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{\mathcal{V}_n - 1}{2\mathcal{V}_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $\lim \mathcal{U}_n = 1$
3) Calculer la limite de la suite $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par $\mathcal{W}_n = \ln(\mathcal{U}_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Examen National 2010 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 1$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{3\mathcal{U}_n}{21+\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que $\mathcal{U}_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Montrer que $\mathcal{U}_{n+1} < \dfrac{1}{7}\mathcal{U}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
3) Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente
4) a. Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n \leq \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Déterminer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Examen National 2011 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n}{5+8\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{U}_0 = 1$

1) Montrer que $\mathcal{U}_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{1}{\mathcal{U}_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 5 puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim \mathcal{U}_n$

Examen National 2011 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 1$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{6\mathcal{U}_n}{15\mathcal{U}_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a. Montrer que $\mathcal{U}_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\mathcal{U}_n - \dfrac{1}{3}}{15\mathcal{U}_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n > \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = 1 - \dfrac{1}{3\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   ⇒ Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
3) Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{1}{3-2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2012 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 11$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{10}{11}\mathcal{U}_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Vérifier que $\mathcal{U}_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(\mathcal{U}_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_n < 12$
   b. Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
   c. En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
3) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$
4) a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim \mathcal{U}_n$

Examen National 2012 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 3$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{4\mathcal{U}_n+3}{3\mathcal{U}_n+4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_n > 1$
2) On pose $\mathcal{V}_n = \dfrac{\mathcal{U}_n - 1}{\mathcal{U}_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Vérifier que $1 - \mathcal{V}_n = \dfrac{2}{\mathcal{U}_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $1-\mathcal{V}_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \dfrac{1+\mathcal{V}_n}{1-\mathcal{V}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
3) a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\lim \mathcal{V}_n = 0$ et en déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Examen National 2013 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_1 = 0$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{25}{10-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) Vérifier que $5 - \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{5\,(5-\mathcal{U}_n)}{5+(5-\mathcal{U}_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5-\mathcal{U}_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{5}{5-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
   a. Montrer que $\mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{10-\mathcal{U}_n}{5-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ puis vérifier que $\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
   b. Montrer que $\mathcal{V}_n = n$ et en déduire que $\mathcal{U}_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
   c. Déterminer $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2013 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{1}{5}\mathcal{U}_n + \dfrac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Vérifier que $\mathcal{U}_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{5}(\mathcal{U}_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) a. Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente
3) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique telle que $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\lim \mathcal{U}_n = 1$.

Examen National 2014 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 13$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathcal{U}_n + 7$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique telle que $\mathcal{V}_n = 14 - \mathcal{U}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. En déduire que $\mathcal{U}_n = 14 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim \mathcal{U}_n$
   c. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\mathcal{U}_n > 13,99$.

Examen National 2014 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_1 = 5$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{5\mathcal{U}_n - 4}{1+\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \dfrac{3}{\mathcal{U}_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
   a. Montrer que $\mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{1+\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ puis montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1
   b. Ecrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire que $\mathcal{U}_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
   c. Déterminer $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2015 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 4$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{U}_n + 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Vérifier que $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{3}{5}(5 - \mathcal{U}_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   puis en déduire que $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante
3) En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
4) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique telle que $\mathcal{V}_n = 5 - \mathcal{U}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$
   puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2016 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{3+\mathcal{U}_n}{5-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Vérifier que $\mathcal{U}_{n+1} - 3 = \frac{4(\mathcal{U}_n - 3)}{2 + (3 - \mathcal{U}_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   puis montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{U}_n - 1}{3 - \mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
   puis en déduire que $\mathcal{V}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = \frac{1+3\mathcal{V}_n}{1+\mathcal{V}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis écrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n
   c. Déterminer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Examen National 2016 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{16}\mathcal{U}_n + \frac{15}{16}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a. Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Vérifier que $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -\frac{15}{16}(\mathcal{U}_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   puis montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   c. En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique telle que $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$
   puis écrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n
   b. Montrer que $\mathcal{U}_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim \mathcal{U}_n$.

Examen National 2017 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 17$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{4}\mathcal{U}_n + 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a. Montrer par récurrence que $\mathcal{U}_n > 16$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente
2) Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique telle que $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 16$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique
   b. En déduire que $\mathcal{U}_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim \mathcal{U}_n$
   c. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\mathcal{U}_n < 16,0001$.

Examen National 2020 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = \frac{3}{2}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{2\mathcal{U}_n}{2\mathcal{U}_n + 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Calculer $\mathcal{U}_1$
2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_n > 0$
3) a. Montrer que $0 < \mathcal{U}_{n+1} \leq \frac{2}{5}\mathcal{U}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   puis en déduire que $0 < \mathcal{U}_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Calculer $\lim \mathcal{U}_n$
4) On considère la suite numérique $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{V}_n = \frac{4\mathcal{U}_n}{2\mathcal{U}_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$
   b. Ecrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Examen National 2020 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 1$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{3\mathcal{U}_n - 8}{2\mathcal{U}_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n < 2$
2) On pose $\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{U}_n - 3}{\mathcal{U}_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2
   b. Ecrire $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$
   c. Calculer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Examen National 2021 Normale

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n}{3 - 2\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Calculer $\mathcal{U}_1$
2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ $0 < \mathcal{U}_n \leq \frac{1}{2}$
3) a. Montrer que pour n de $\mathbb{N}$ on a $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \leq \frac{1}{2}$
   b. En déduire la monotonie de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4) a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $0 < \mathcal{U}_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ puis calculer $\lim \mathcal{U}_n$
   b. On pose $\mathcal{V}_n = \ln(3 - 2\mathcal{U}_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ calculer $\lim \mathcal{V}_n$
5) a. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$ $\frac{1}{\mathcal{U}_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{\mathcal{U}_n} - 1\right)$
   b. En déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Examen National 2021 Rattrapage

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{3}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1+\mathcal{U}_n}{3-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $0 < \mathcal{U}_n < 1$
2) a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{(\mathcal{U}_n - 1)^2}{3 - \mathcal{U}_n}$
   b. Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
3) On pose $\mathcal{V}_n = \frac{1}{1 - \mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme
   b. Déterminer $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire que $\mathcal{U}_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   c. Calculer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4) Quelle est la valeur du nombre n pour laquelle on a $\mathcal{U}_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Examen National 2022 Rattrapage

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_n > 1$
   b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente
2) On pose $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
   b. Ecrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   c. Calculer la somme $\mathcal{S} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + ... + \mathcal{U}_{2021}$