Lycée : Taghzirt | **Série : Limite d'une suite numérique** | **Prof :** *R. MOSAID*
2025/2026 | Par Pr. MOHAMED JOUAHRI | 2BAC.PC/SVT

Exercice 1

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 8}{2U_n - 5} \quad , \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 = 4 \end{cases}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n - 2}$
   a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n + 2 = \dfrac{3U_n - 7}{U_n - 2}$
   b) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 2$.
   c) Calculer V_0, puis déterminer V_n en fonction de n.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \dfrac{8n - 4}{4n - 1}$, puis calculer $\lim U_n$.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{8(U_n - 1)}{U_n + 2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad : 2 < U_n < 4$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (U_n) et vérifier qu'elle est convergente.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - U_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - U_n)$.
4. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - U_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, puis calculer $\lim U_n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 2}$.
6. Montrer que (V_n) est géométrique.
7. Redéterminer $\lim U_n$.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [1, 2]$ par : $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x + 3}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.
2. En déduire l'image de l'intervalle I par la fonction f.
3. Montrer que : $(\forall x \in I) \quad : f(x) \leq x$

On considère (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = f(U_n)$

4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad : 1 \leq U_n \leq 2$.
5. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
6. En déduire que la suite (U_n) est convergente puis déterminer $\lim U_n$.

بالتوفيق