Exercice 1 hfill (8 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 \leq u_n \leq 3$.

2. a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)(3 - u_n)}{u_n - 1}$
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c) En déduire que (u_n) est convergente.
   d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 3 - u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$
   (on pourra remarquer que $u_n \geq \dfrac{5}{2}$)
   e) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq 3 - u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et déterminer son premier terme.
   b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   et $T_n = (1 + v_0) + (3 + v_1) + \cdots + (2n + 1 + v_n)$
   a) Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   b) Exprimer T_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 2 hfill (12 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2} - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que : $\mathscr{D}_f = [-2; -1[\cup] - 1; +\infty[$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.
4. a) Étudier la dérivabilité de f à droite en -2 et donner une interprétation géométrique.
   b) Montrer que : $(\forall x \in \mathscr{D}_f) \quad f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x+2} - 1)^2 + 1}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} - 1)^2}$
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$.
   d) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.
5. Tracer (C_f) et (T) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On remarquera que : $f(0) = 0$)
6. Soit g la restriction de f sur $]-1; +\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.
   b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.
   c) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (avec une autre couleur).
7. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$
   a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathscr{D}_f) : f(x) - x = \dfrac{x(2 - \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2} - 1}$, puis étudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$ sur $]-1; +\infty[$.
   b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 2$.
   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   d) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
   e) Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 en utilisant (C_f) et (Δ).