Lycée: Sebaayoune Al-jadida	**devoir libre 2**	Niveau : 2bac pc 1
Année scolaire : 2024/2025		Prof : jawad loulichki

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\, 1 \leq u_n \leq 2$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) puis en déduire qu'elle converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$.
   (a) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n) une deuxième fois.

Exercice 2

A) f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $+\infty$.
2. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$.
   (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\, f'(x) > 0$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
   (c) Montrer que la droite $(D) : y = x$ est tangente à (Cf) au point O.
   (d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) - x \geq 0$ puis interpréter le résultat géométriquement.
4. Tracer (Cf) dans un repère orthonormé.
5. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J (à déterminer).
   (b) Tracer (Cf^{-1}), le graphe de f^{-1}, dans le même repère.
   (c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.

B) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\, -1 < u_n < 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.