

Exercice 1

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
(b) Dédurre la monotonie de $(u_n)_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis calculer la limite de $(u_n)_n$.
5. (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$.
(b) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$

1. (a) Montrer que : $(\forall x > 0) : h'(x) = 6\sqrt{x}(-\sqrt{x} + 1)$.
(b) Dresser le tableau de variations de h .
(c) Vérifier que $(\forall x \geq 0) : h(x) - x = -3x(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right)$
(d) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{9}, 1\right] : h(x) - x \geq 0$.
2. Soit la suite $(U_n)_n$ définie par
$$\begin{cases} U_{n+1} = h(U_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} : \frac{1}{9} \leq U_n \leq 1$.
(b) Montrer que la suite $(U_n)_n$ est croissante.
3. Dédurre que la suite $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $I = \mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que le point $I(0, -1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(c) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
(b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .
(c) Tracer (C_f) , (T) et l'asymptote (Δ) .